SULL'APPLICABILITÀ DI UNA FORMULA PER IL CALCOLO NUMERICO DELLA TRASFORMATA DI HILBERT (*)

di ANTONIO CRISCI (a Bari) (**)

SUMMARY. - *We give a class* **H** *of functions for which Hilbert transform exists and sufficient conditions for belonging to* **H**.

We show that the numerical formula:

$$g_{T/2}(c+nT)=\frac{2}{\pi}\sum_{k\,-\infty}^{+\infty}\frac{f(c+(n+k)T)}{2k+1},$$

found [3] *under the assumption that the function f to transform belongs to* $L^2\,]-\infty,+\infty[$, *holds for functions belonging to* **H**. *A bound for error is given.*

SOMMARIO. - *Si introduce una classe* **H** *di funzioni per le quali esiste la trasformata di Hilbert e si danno condizioni sufficienti per l'appartenenza alla classe.*

Si dimostra che la formula numerica:

$$g_{T/2}(c+nT)=\frac{2}{\pi}\sum_{k\,-\infty}^{+\infty}\frac{f(c+(n+k)T)}{2k+1},$$

trovata [3] *sotto la condizione che la funzione f di cui si vuole calcolare la trasformata di Hilbert appartenga ad* $L^2\,]-\infty,+\infty[$, *è applicabile a funzioni che appartengono ad* **H**. *Si valuta un maggiorante dell'errore.*

Introduzione.

In una precedente nota [1], in cui si risolvono numericamente due esempi di problemi di Filtraggio Statistico e Predizione, si utilizza, per il

(*) Pervenuto in Redazione il 24 luglio 1973.

Lavoro eseguito nell'ambito del G. N. A. F. A. del C.N.R..

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Analisi Matematica dell'Università 70100 Bari.

calcolo numerico della trasformata di Hilbert g di una funzione f, la formula (cfr. [3], 2)

$$(*) \qquad g_{T/2}(c+nT) = \frac{2}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{f(c+(n+k)T)}{2k+1},$$

ottenuta sotto la condizione che la f sia di quadrato integrabile. Nel secondo esempio trattato in [1] la formula ($*$) è stata applicata per il calcolo numerico della trasformata di Hilbert della funzione $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$ che non risulta di quadrato integrabile, ottenendo ugualmente risultati accettabili. Si dimostra, infatti, che essa è applicabile alla suddetta funzione di interesse per i citati problemi.

In questa nota si introduce una classe **H** di funzioni, in cui rientra la funzione $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$, per le quali si può definire la trasformata di Hilbert e risulta ancora applicabile la formula ($*$) purché venga sommata secondo Cauchy.

1. Definizione della classe H.

Sia **H** la classe delle funzioni $f(y)$ reali di variabile reale che soddisfano le seguenti condizioni:

a) *$f(y)$ dotata di derivata prima limitata.*

b) $\forall x \in R \ (f(y+x) - f(-y+x)) \log y$

(1.1) *converge per* $y \to +\infty$

c) $\forall x \in R \ (f'(y+x) + f'(-y+x)) \log y$

assolutamente integrabile su $[0, +\infty[$.

È facile verificare che **H** è uno spazio vettoriale sul corpo dei reali.

Per ogni $f \in \mathbf{H}$ e per ogni numero reale x introduciamo le quantità:

$$|f_0|(x) = \lim_{y \to +\infty} |f(y+x) - f(-y+x)| \log y$$

$$(1.2) \qquad |f|_1(x) = \int_0^\infty |f'(y+x) + f'(-y+x)| \, dy$$

$$|f|_2(x) = \int_0^\infty |(f'(y+x) + f'(-y+x)) \log y| \, dy.$$

Si verifica facilmente che le (1.2) sono delle seminorme per ogni $x \in R$.

Diamo, ora, delle condizioni sufficienti per l'appartenenza alla classe **H**

PROPOSIZIONE 1. *Se $f(y)$ soddisfa le seguenti condizioni:*

(1.3₁) $f(y)$ *dotata di derivata prima limitata.*

(1.3₂) $(f(y) - f(-y)) \log y$ *converge per* $y \to +\infty$

(1.3₃) $f'(y) \log|y|$ *assolutamente integrabile su* $]-\infty, +\infty[$ *allora* $f(y) \in \mathbf{H}$

Per dimostrare che $f(y)$ verifica la $b)$ delle (1.1) poniamo:

$$(f(y+x) - f(-y+x)) \log y =$$

$$= \left(\int_y^{y+x} f'(t)\, dt - \int_{-y}^{-y+x} f'(t)\, dt \right) \log y + (f(y) - f(-y)) \log y$$

Supponiamo $y > 1 + |x|$. Se risulta $x > 0$, si ha:

$$\left| \int_y^{y+x} f'(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{\log y} \int_y^{y+x} |f'(t)| \log t\, dt$$

e

$$\left| \int_{-y}^{-y+x} f'(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{\log(y-x)} \int_{-y}^{-y+x} |f'(t)| \log(-t)\, dt\,;$$

Se risulta $x < 0$, si ha:

$$\left| \int_y^{y+x} f'(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{\log(y+x)} \int_y^{y+x} |f'(t)| \log t\, dt$$

e

$$\left| \int_{-y}^{-y+x} f'(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{\log y} \int_{-y}^{-y+x} |f'(t)| \log(-t)\, dt.$$

Invocando la (1.3₃) si ha:

$$\lim_{y \to +\infty} (f(y+x) - f(-y+x)) \log y = \lim_{y \to +\infty} (f(y) - f(-y)) \log y.$$

Per dimostrare che $f(y)$ verifica la $c)$ delle (1.1) basta notare:

$$f'(y+x) \log y = f'(y+x) \left(\log \frac{y}{|y+x|} + \log|y+x| \right)$$

e

$$f'(-y+x)\log y = f'(-y+x)\left(\log \frac{y}{|-y+x|} + \log|-y+x|\right),$$

ed invocare la (1.3_3).

Si provano, poi, facilmente le due proposizioni seguenti:

PROPOSIZIONE 2. *Se $f(y)$ verifica le seguenti condizioni:*

(1.4_1) *$f(y)$ dotata di derivata prima limitata.*

(1.4_2) *$f(y)$ funzione pari*

(1.4_3) *$f'(y)\log|y|$ assolutamente integrabile su $]-\infty, +\infty[$ allora $f(y) \in \mathbf{H}$.*

PROPOSIZIONE 3. *Se $f(y)$ verifica le seguenti condizioni:*

(1.5_1) *$f(y)$ dotata di derivata prima limitata*

(1.5_2) *$f(y)\log|y|$ converge per $y \to \infty$*

(1.5_3) *$f'(y)\log|y|$ assolutamente integrabile su $]-\infty, +\infty[$ allora $f(y) \in \mathbf{H}$.*

2. Definizione di trasformata di Hilbert nella classe H.

Premettiamo il seguente:

LEMMA 1. *Se $f(y) \in \mathbf{H}$ la funzione*

$$\frac{f(y+x) - f(-y+x)}{y}$$

è assolutmente integrabile su $[0, +\infty[$ qualunque sia il numero reale x.

DIMOSTRAZIONE: Osservando che risulta:

$$\int_0^p \frac{|f(y+x) - f(-y+x)|}{y}\,dy \leq$$

$$\leq |f(p+x) - f(-p+x)|\log p + \int_0^p |(f'(y+x) + f'(-y+x))\log y|\,dy$$

si ha $\forall\, x \in R$:

$$\int_0^\infty \frac{|f(y+x)-f(-y+x)|}{y}\,dy \leq |f|_0(x) + |f|_2(x)$$

c. d. d.

TEOREMA 1. *Se $f(y) \in \mathbf{H}$ resta definita su tutto l'asse reale la funzione:*

$$(2.1) \qquad g(x) = \frac{1}{\pi}\left\{ \lim_{M \to +\infty} \left(\int_{x-M-a}^{x-a} + \int_{x+a}^{x+M+a} \right) \frac{f(y)}{y-x}\,dy + \right.$$

$$\left. + \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{x-a}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{x+a} \right) \frac{f(y)}{y-x}\,dy \right\}$$

essendo a un nmero reale positivo fissato a piacere.

DIMOSTRAZIONE: Con semplici sostituzioni si trova che:

$$\lim_{M\to\infty} \left(\int_{x-M-a}^{x-a} + \int_{x+a}^{x+M+a} \right) \frac{f(y)}{y-x}\,dy = \lim_{M\to\infty} \int_a^{M+a} \frac{f(y+x)-f(-y+x)}{y}\,dy$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{x-a}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{x+a} \right) \frac{f(y)}{y-x}\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^{a} \frac{f(y+x)-f(-y+x)}{y}\,dy$$

Invocando il Lemma 1 segue l'asserto. c. d. d.

Noi porremo, pertanto:

$$(2.2) \qquad g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(y+x)-f(-y+x)}{y}\,dy \qquad \forall x \in R$$

ed assumeremo la (2.2) come definizione di trasformata di Hilbert per funzioni della classe $\mathbf{H}$. Facciamo notare che la (2.2) viene già utilizzata nella letteratura (c. f. r. p. e. [2] cap. V), come definizione di trasformata di Hilbert per funzioni di L^p.

Facciamo, ancora, notare che la (22) continua a valere per funzioni che verificano la *a*) e la *b*) delle (1.1) e per le quali nella *c*) si richieda soltanto l'integrabilità invece della assoluta integrabilità.

3. Calcolo numerico della trasformata di Hilbert nella classe H.

L'integrale a secondo membro della (2.2) si può scrivere nella maniera seguente:

$$\int_0^\infty \frac{f(y+x)-f(-y+x)}{y}\,dy = \sum_{k=0}^\infty \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{f(y+x)-f(-y+x)}{y}\,dy \tag{3.1}$$

essendo T un numero reale positivo qualsiasi.

Se gli integrali a secondo membro della (3.1) vengono approssimati nel seguente modo:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{f(y+x)-f(-y+x)}{y}\,dy \simeq \frac{f(x+(k+1/2)T)-f(x-(k+1/2)T)}{k+1/2} \tag{3.2}$$

nell'ipotesi che, qualunque sia il numero reale x, la serie:

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{f(x+(k+1/2)\,T)-f(x-(k+1/2)\,T)}{2k+1} \tag{3.3}$$

converge, porremo:

$$\int_0^\infty \frac{f(y+x)-f(-y+x)}{y}\,dy = \tag{3.4}$$

$$= 2\sum_{k=0}^\infty \frac{f(x+(k+1/2)\,T)-f(x-(k+1/2)\,T)}{2k+1} + E_x$$

Ai fini delle applicazioni viene utilizzata la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{f(c+nT+(k+1/2)\,T)-f(c+nT-(k+1/2)\,T)}{2k+1} \tag{3.5}$$

che si ottiene dalla (3.3) ove si sostituisca $c+nT$ ad x.

La (3.5) si ottiene dalle serie:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{f(c+(n+k)\,T)}{2k+1} \tag{3.6}$$

quando quest'ultima viene sommata secondo Cauchy.

È stato dimostrato da altro autore [3] che la (3.6) può essere utilmente impiegata per il calcolo numerico della trasformata di Hilbert di funzioni f che risultino di quadrato integrabile.

Noi ci proponiamo di dimostrare che la (3.5), somma secondo Cauchy della (3.6), può essere utilmente impiegata per il calcolo numerico della trasformata di Hilbert di funzioni che non risultino di quadrato integrabile ma appartengono alla classe $\mathbf{H}$ definita mediante le(1.1).

Posto:

$$h_x(y)=f(y+x)-f(-y+x) \qquad \forall y \in R \tag{3.7}$$

dimostriamo il seguente:

TEOREMA 2. *Se $f(y)\in\mathbf{H}$, comunque si scelga la successione $(y_k)_{k\in N}$ di numeri reali positivi crescenti e divergente positivamente, risulta convergente la serie*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_x(y_k)}{y_k}(y_k - y_{k-1}). \tag{3.8}$$

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo gli intervalli semiaperti a destra

$$[0,y_0[,[y_0,y_1[,\dots,[y_k,y_{k+1}[,\dots$$

con

$$0<y_0<y_1<\dots<y_k<y_{k+1}<\dots$$

Indichiamo con $\mu(y)$ la funzione definita su $[0,+\infty[$ che assume il valore zero sull'intervallo $[0,y_0[$ ed il valore costante y_k sull'intervallo $[y_k,y_{k+1}[$ per $k=0,1,2,\dots$.

Se definiamo l'integrale di Stieltjes della funzione $h_x(y)/y$ rispetto a $\mu(y)$ si ha:

$$\int_0^a \frac{h_x(y)}{y}\,d\mu(y)=h_x(y_0)+\sum_{k=1}^{m}\frac{h_x(y_k)}{y_k}(y_k-y_{k-1}) \quad \text{per } y_m<a<y_{m+1} \tag{3.9}$$

Integrando per parti l'integrale a primo membro della (3.9) si ottiene:

$$\int_0^a \frac{h_x(y)}{y}\,d\mu(y)=\left[\frac{h_x(y)}{y}\,\mu(y)\right]_0^a + \tag{3.10}$$
$$-\int_0^a \frac{h_x'(y)}{y}\,\mu(y)\,dy+\int_0^a \frac{h_x(y)}{y^2}\,\mu(y)\,dy.$$

Notando, poi, che risulta:

$$\frac{\mu(y)}{y} \leq 1 \qquad \forall y > 0 \tag{3.11}$$

ed invocando il Lemma 1 segue immediatamente che esiste finito il limite:

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a \frac{h_x(y)}{y} \, d\mu(y) \tag{3.12}$$

Dalla (3.9) si deduce, perciò, l'asserto. c. d. d.

Corollario. *Se $f(y) \in \mathbf{H}$ la serie*:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(x + (k + 1/2)T) - f(x - (k + 1/2)T)}{2k + 1} \tag{3.13}$$

converge per ogni fissato x.

Dimostrazione: Basta porre:

$$\forall T > 0 \quad y_k = (k + 1/2)\, T \qquad \text{per } k = 0, 1, 2, \ldots$$

ed invocare il Teorema 2. c. d. d.

Facciamo notare che le serie (3.8) e (3.13) convergono anche assolutamente.

4. Valutazione di un maggiorante dell'errore.

Ci proponiamo, in questo paragrafo, di valutare un maggiorante dell'errore E_x che compare a secondo membro della (3.4). A tal fine proviamo il seguente:

Teorema 3. *Se $f \in \mathbf{H}$, per ogni T maggiore di zero e per ogni x appartenente ad R si ha*:

$$|E_x| \leq K_x T \left(1 + 3 \log \frac{2}{T}\right) + T(|f|_0(x) + |f_1|(x) + |f|_2(x)) \tag{4.1}$$

essendo:

$$K_x = \sup_{y \in [0,1]} |h_x'(y)|$$

Dimostrazione: Dalle (3.4) e (3.7), con facili calcoli si ha:

$$|E_x| \leq \left| \int_0^{T/2} \frac{h_x(y)}{y} \, dy \right| + \left| \int_{T/2}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} \frac{h_x(y)}{y} \right) (y - \mu(y)) \, dy \right| + |h_x(T/2)| \tag{4.2}$$

Posto poi, per $T/2 \leq 1$:

$$\left| \int_{T/2}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} \frac{h_x(y)}{y} \right) (y - \mu(y))\, dy \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{T/2}^{1} \left(\frac{d}{dy} \frac{h_x(y)}{y} \right) (y - \mu(y))\, dy \right| + \left| \int_{1}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} \frac{h_x(y)}{y} \right) (y - \mu(y))\, dy \right|$$

si ha:

$$\left| \int_{1}^{\infty} \left(\frac{d}{dy} \frac{h_x(y)}{y} \right) (y - \mu(y))\, dy \right| < T(|f|_0(x) + |f|_1(x) + |f|_2(x)) \tag{4.3}$$

Si verifica, facilmente, che:

$$\left| \int_{T/2}^{1} \left(\frac{d}{dy} \frac{h_x(y)}{y} \right) (y - \mu(y))\, dy \right| \leq T \left(\int_{T/2}^{1} \frac{|h'_x(y)|}{y}\, dy + \int_{T/2}^{1} \frac{|h_x(y)|}{y^2}\, dy \right)$$

e osservando che:

$$\forall\, y > 0 \quad |h_x(y)| \leq K_x\, y$$

segue:

$$\left| \int_{T/2}^{1} \left(\frac{d}{dy} \frac{h_x(y)}{y} \right) (y - \mu(y))\, dy \right| \leq 2T\, K_x \log \frac{2}{T} \tag{4.4}$$

Per il primo integrale a secondo membro della (4.2), risulta:

$$\left| \int_{0}^{T/2} \frac{h_x(y)}{y}\, dy \right| \leq |h_x(T/2)| \log \frac{2}{T} + \int_{0}^{T/2} |h'_x(y)|\, |\log y|\, dy$$

e, perciò:

$$\left| \int_{0}^{T/2} \frac{h_x(y)}{y}\, dy \right| \leq K_x\, T \log \frac{2}{T} + \frac{K_x\, T}{2} \tag{4.5}$$

Dalle (4.3), (4.4) e (4.5) si deduce la (4.1). c. d. d.

L'errore è, pertanto, infinitesimo con T per ogni x fissato.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Crisci, *Risoluzione numerica di problemi di Filtraggio Statistico e Predizione,* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, Vol. V, fasc. 2, 145-160 (1973).

[2] E. C. Titchmarsh, *Theory of Fourer Integrals,* Oxford 1948.

[3] R. Vinciguerra, *Calcolo numerico delle trasformate di Hilbert ed applicazioni,* Calcolo, Vol. 4, fasc. 3, 453-484 (1967).