ALCUNE OSSERVAZIONI SUL PRODOTTO DI DUE SPAZI TOPOLOGICI AVENTI UNA PROPRIETÀ DI LINDELÖF (*)

di GINO TIRONI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Viene dimostrato un teorema che lega il numero ereditario di Lindelöf del prodotto cartesiano di due spazi topologici, con quello dei fattori e con il loro peso. In particolare, se ne deduce che il prodotto di uno spazio metrizzabile a base numerabile per uno spazio ereditariamente di Lindelöf, è uno spazio ereditariamente di Lindelöf.*

SUMMARY. - *A theorem is given, which relates the hereditarily Lindelöf number (h. L. n.) of the cartesian product of two topological spaces to the h. L. n. of the factors and to their weight. In particular, it is found that the product of a metrizable 2. nd countable space by a hereditarily Lindelöf space, is a hereditarily Lindelöf space.*

0. Introduzione.

È noto, che il prodotto di due spazi topologici di Lindelöf non è necessariamente uno spazio di Lindelöf. Si conoscono in proposito ([1], pag. 46), per il prodotto di una famiglia di cardinalità qualsiasi di spazi topologici X_i, ognuno dotato di almeno due punti e con topologia non ridotta a $\{X_i, \emptyset\}$, disuguaglianze che legano il numero di Lindelöf ereditario del prodotto con quello dei singoli fattori. Se ne deduce, in particolare, che il prodotto di una famiglia più che numerabile di spazi ereditariamente di Lindelöf (e con le restrizioni sopra ricordate), non può essere ereditariamente di Lindelöf. Tuttavia, tali valutazioni non forniscono una risposta

(*) Pervenuto in Redazione il 25 settembre 1973.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa - 34100 Trieste.

pienamente soddisfacente nel caso del prodotto di due spazi topologici.

Per il prodotto di due spazi topologici si dà qui un teorema, che estende notevolmente un risultato recente di E. Tognoli Dalla Vedova [5], che lega il numero di Lindelöf del prodotto con quello dei fattori e con il loro peso. Nel seguito $\alpha, \beta, \tau, \ldots$ indicheranno numeri cardinali. La cardinalità di un insieme A verrà indicata con la comoda notazione $|A|$.

1. Definizioni e prime osservazioni.

Ci saranno utili le seguenti definizioni e proposizioni in parte, almeno, tradizionali.

DEFINIZIONE 1. Si dice *numero di Lindelöf* di uno spazio topologico X, e si indica con $l(X)$, il minimo tra quei numeri cardinali α dotati della proprietà che, da ogni ricoprimento aperto di X si possa estrarre un sottoricoprimento di cardinalità $\leq \alpha$.

DEFINIZIONE 2. Si dice *numero di Lindelöf ereditario* di uno spazio X, e si indica con $ll(X)$, l'estremo superiore dei numeri di Lindelöf dei sottospazi di X (1).

DEFINIZIONE 3. [2] Uno spazio topologico X si dice *α-Lindelöf* (ereditariamente) se è regolare e $l(X) = \alpha$ $(ll(X) = \alpha)$.

La seguente proposizione è ben nota.

PROPOSIZIONE 1. *In uno spazio X, $ll(X) \leq \alpha$* (quindi anche $l(X) \leq \alpha$) *se e solo se $l(A) \leq \alpha$, per ogni insieme aperto A di X.*

In altre parole uno spazio soddisfa ereditariamente una proprietà di Lindelöf, se e solo se la soddisfano i suoi insiemi aperti.

Vale inoltre la seguente

PROPOSIZIONE 2. *Sia X uno spazio topologico* e *Y un arbitrario sottospazio di X. Se da ogni ricoprimento di X (di Y) per mezzo di elementi di una base di X si può estrarre un sottoricoprimento di cardinalità $\leq \tau$, allora da ogni ricoprimento aperto di X (di Y) si può estrarre un sottoricoprimento di cardinalità $\leq \tau$.*

(1) É noto ([1], pag. 12), che $ll(x)$ si identifica con un'altra funzione cardinale (precisamente quella detta altezza $h(x)$ da Juhász); tuttavia, per maggiore semplicità, abbiamo preferito dare di $ll(x)$ esplicita e particolare definizione.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Diciamo $\mathcal{B} = \{B_\beta\}_{\beta \in J}$ la famiglia di quegli elementi di una base di X, che sono contenuti in uno degli A_α. Evidentemente $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di X, e, per ogni B_β esiste un A_α tale che $B_\beta \subset A_\alpha$. Per ipotesi, esiste un sottoricoprimento $\mathcal{B}^* = \{B_\beta\}_{\beta \in J^*}$ con $|J^*| \leq \tau$. Ogni $B_{\bar\beta} \in \mathcal{B}^*$ è contenuto in almeno uno degli A_α: scegliamo per ognuno dei $B_{\bar\beta} \in \mathcal{B}^*$ uno, $A_{\bar\alpha}$, di tali insiemi. La cardinalità della famiglia $\mathcal{A}^*$ degli $A_{\bar\alpha}$ non supera $|J^*| \leq \tau$. Inoltre $\mathcal{A}^*$ è evidentemente un ricoprimento di X.

Nulla cambia nella dimostrazione, se Y è un arbitrario sottospazio di X e ci si riferisce ancora agli elementi di una base di X.

Diamo qui una semplice caratterizzazione degli spazi localmente compatti α-Lindelöf ereditariamente, che è simile ad altre caratterizzazioni note [1], [3], relative agli spazi compatti.

Analogamente alla definizione di insieme F_α (2) [1], [4], [2], diamo la seguente

DEFINIZIONE 4. Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice *di tipo* K_α se esso è riunione di una famiglia $\mathcal{K}$ di insiemi compatti in X, tale che $|\mathcal{K}| \leq \alpha$.

PROPOSIZIONE 3. *Uno spazio X di Hausdorff, localmente compatto è α-Lindelöf ereditariamente se e solo se ogni suo insieme aperto è un K_α. In particolare lo è X.*

DIMOSTRAZIONE. Se uno spazio X di Hausdorff è localmente compatto esso è regolare; se poi ogni suo aperto A è un K_α, allora, evidentemente, da ogni ricoprimento aperto di A si può estrarre un sottoricoprimento di cardinalità $\leq \alpha$.

X è dunque α-Lindelöf ereditariamente. Sia ora X localmente compatto e α-Lindelöf ereditariamente; esso è regolare, e ogni suo punto x ammette un intorno K_x (aperto) avente chiusura compatta.

Per ogni $x \in A$ si scelga un intorno V_x contenuto in A, e, per la regolarità di X, un intorno U_x tale che

$$x \in U_x \subset \bar{U}_x \subset V_x \subset A.$$

(2) In uno spazio topologico X un insieme si dice di tipo F_α se esso è riunione di una famiglia $\mathcal{F}$ di insiemi chiusi, con $|\mathcal{F}| \leq \alpha$.

Si ha allora:

$$x \in U_x \cap K_x \subset \overline{U}_x \cap \overline{K}_x \subset V_x \subset A.$$

$\overline{U}_x \cap \overline{K}_x$ è un intorno compatto di x. Poiché $\{U_x \cap K_x\}_{x \in A}$ è un ricoprimento aperto di A, dal momento che X è α-Lindelöf ereditariamente, si conclude che esiste un sottoricoprimento di A di cardinalità $\leq \alpha$. Perciò

$$A = \bigcup_{x \in A} (U_x \cap K_x) = \bigcup_{i \in I} (U_{x_i} \cap K_{x_i}) \subset \bigcup_{i \in I} (\overline{U}_{x_i} \cap \overline{K}_{x_i}) \subset \bigcup_{i \in I} V_{x_i} \subset A,$$

con $|I| \leq \alpha$. Dunque $A = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$, con $\Phi_i = \overline{U}_{x_i} \cap \overline{K}_{x_i}$, compatto in X.

In particolare, si deduce che uno spazio X localmente compatto è ereditariamente di Lindelöf se e solo se X è numerabile all'infinito e ogni suo aperto è un K_σ (3) ∎

2. Il teorema principale.

Ricordiamo la seguente

DEFINIZIONE 5. Si dice *peso* di uno spazio topologico X la minima cardinalità di una base di X. Si indica con $w(X)$.

Evidentemente è $ll(X) \leq w(X)$.

TEOREMA. *Siano X e Y due spazi topologici tali che $w(X) \leq w(Y)$. Allora, per il prodotto cartesiano $X \times Y$ si ha*

$$ll(X \times Y) \leq w(X) \cdot ll(Y).$$

DIMOSTRAZIONE. Per dimostrare che $ll(X \times Y) \leq w(X) \cdot ll(Y)$, ricordando le Proposizioni 1 e 2, basterà mostrare che in ogni aperto A di $X \times Y$, da ogni ricoprimento di A per mezzo di insiemi di una base di $X \times Y$, si può estrarre un sottoricoprimento di cardinalità $\leq w(X) \cdot ll(Y)$.

Sia dunque $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}, |I| = w(X)$, una base di X e $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$, una base di Y. La famiglia $\mathcal{A} = \{V_i \times U_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ è una base di $X \times Y$.

(3) Ricordiamo che uno spazio X localmente compatto si dice numerabile all'infinito se esso è riunione di un'infinità numerabile di insiemi compatti [3]. Un sottoinsieme di X si dirà K_σ se è riunione di una famiglia al più numerabile di compatti.

Sia $\mathcal{B}$ la famiglia degli insiemi di $\mathcal{A}$ contenuti in A; essa ricopre A, cioè

$$A = \cup \{V_i \times U_j \in \mathcal{B}\}.$$

Per ogni $i \in I$ si consideri la sottofamiglia di $\mathcal{U}$ (eventualmente vuota per qualche i):

$$\mathcal{U}^{(i, A)} = \{U_j : V_i \times U_j \subset A\}.$$

È evidente che $\{V_i \times U : U \in \mathcal{U}^{(i, A)}, i \in I\} = \mathcal{B}$; infatti se $(x, y) \in A$ esistono i e j tali che $(x, y) \in V_i \times U_j \subset A$.

Consideriamo ora, per ogni $i \in I$, il sottinsieme aperto di Y così definito:

$$A_i = \cup \{U_j : U_j \in \mathcal{U}^{(i, A)}\}.$$

Poiché A_i è un sottoinsieme aperto di Y, per definizione, esiste una sottofamiglia $\tilde{\mathcal{U}}^{(i, A)}$ di $\mathcal{U}^{(i, A)}$, di cardinalità $\leq ll(Y)$, tale che

$$A_i = \cup \{U_j : U_j \in \tilde{\mathcal{U}}^{(i, A)}\}.$$

La famiglia $\tilde{\mathcal{B}} = \{V_i \times U_j \in \mathcal{B} : U_j \in \tilde{\mathcal{U}}^{(i, A)}, i \in I\} \subset \mathcal{B}$, ha cardinalità che non supera $w(X) \cdot ll(Y)$. Inoltre essa è un ricoprimento di A. Infatti, se $(x, y) \in A$, come si è visto, esistono i, j tali che $(x, y) \in V_i \times U_j \subset A$; cioè $(x, y) \in V_i \times A_i \subset A$. Esiste quindi $\tilde{U}_j \in \tilde{\mathcal{U}}^{(i, A)}$ tale che $(x, y) \in V_i \times \tilde{U}_j \subset A$.

Evidentemente se $ll(X)$ e $ll(Y) \leq \tau$, ma $ll(X \times Y) > \tau$, allora si conclude che $w(X)$ e $w(Y) > \tau$. ∎

Come conseguenza si ottiene il seguente

COROLLARIO 1. *Se X è uno spazio topologico a base numerabile e se Y soddisfa ereditariamente la proprietà di Lindelöf, allora $X \times Y$ soddisfa ereditariamente la proprietà di Lindelöf.*

È noto [2], [3] che uno spazio topologico regolare, avente base numerabile è metrizzabile. Si ha allora

COROLLARIO 2. *Il prodotto cartesiano di uno spazio metrizzabile a base numerabile per uno spazio ereditariamente di Lindelöf, è ereditariamente di Lindelöf.*

In particolare, se X è metrico a base numerabile e se $\mathbb{R}$ è dotato della «topologia di Sorgenfrey», (ossia degli intorni sinistri), allora $X \times \mathbb{R}$ è ereditariamente di Lindelöf [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] I. JUHÁSZ, Cardinal functions in topology, Mathematical Centre Tracts, Amsterdam, 1971.

[2] R. ENGELKING, *Outline of general topology,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.

[3] BOURBAKI, *Topologie génerale,* Ch. 1 et 2, Quatrième édition, Hermann, Paris, 1965.

[4] A. V. ARHANGEL'SKIǏ, *External bases of sets lying in bicompacta,* Dokl. Akad. Nauk, 132, pp. 495-496 (1960) = Soviet Math. Dokl., 1, pp. 573-574 (1960).

[5] E. TOGNOLI DALLA VEDOVA, *Alcune osservazioni sugli spazi di Lindelöf,* Bollettino U. M. I., (4), 7, (1973), pagg. 260-266.