SU DUE NOZIONI DI SINGOLARITÀ TRA MISURE (*)

di ALESSIO VOLČIČ (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si dimostra che le due nozioni di S-singolarità e di E-singolarità coincidono per la classe delle misure semifinite.*

SUMMARY. - *We prove that S-singularity and E-singularity are coextensive notions for the semifinite measures.*

Recentemente sono state introdotte alcune nuove nozioni di singolarità tra misure. La prima che noi considereremo, è dovuta a Johnson [3].

DEFINIZIONE 1. Una misura μ si dice *S-singolare rispetto ad una misura* ν, se per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$ (1) esiste un $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$, tale che $\nu(B) = 0$ e $\mu(B) = \mu(A)$. Se μ è S-singolare rispetto a ν, scriveremo $\mu \, S \, \nu$.

In un recente articolo Bruneau [1] ha introdotto il concetto che noi chiameremo di E-singolarità (2).

(*) Pervenuto in Redazione il 22 agosto 1973.

Lavoro eseguito col contributo del C. N. R., nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

(1) Indichiamo con $\mathcal{A}$ la σ-algebra degli insiemi che sono misurabili sia rispetto a μ che a ν.

(2) La definizione è stata data per le misure definite sui boreliani della retta reale, ma è ovvia la sua estensione a spazi misurabili qualunque. Per la nozione di quasi-singolarità e le sue relazioni con la singolarità e la S-singolarità, si veda [5].

DEFINIZIONE 2. Una misura μ si dice *E-singolare rispetto a* ν («étrangère au sens large» in [1]), se per ogni $A \in \mathcal{A}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $B \subset A$, $B \in \mathcal{A}$, tale che $\nu(B) \leq \varepsilon$ e $\mu(B) = \mu(A)$. Se μ è E-singolare rispetto a ν, scriveremo $\mu\, E\, \nu$.

Ovviamente, se è $\mu S \nu$, allora è anche $\mu E \nu$. Il nostro proposito è di dimostrare che vale anche l'implicazione inversa in ipotesi molto blande per la μ.

DEFINIZIONE 3. Una misura μ si dice *semifinita*, se risulta

$$\mu(A) = \sup \{\mu(B);\ B \in \mathcal{A},\ B \subset A,\ \mu(B) < +\infty\}.$$

TEOREMA 1. *Se μ è semifinita e se $\mu\, E\, \nu$, allora $\mu\, S\, \nu$.*

Sia $A \in \mathcal{A}$. Supponiamo dapprima che sia $\mu(A) < +\infty$. Allora esiste in corrispondenza a ciascun intero n un insieme misurabile B_n tale che $\nu(B_n) \leq \frac{1}{n}$ e $\mu(B_n) = \mu(A)$. Poniamo $C_n = \bigcap_1^n {}_k B_k$ e osserviamo che risulta $\nu(C_n) \leq \nu(B_n) \leq \frac{1}{n}$. È poi anche $\mu(C_n) = \mu(A)$, poiché $\mu(C_n) \leq \mu(A)$ ed inoltre essendo $A - C_n = \bigcup_1^n {}_k (A - B_k)$, si ha $\mu(A) - \mu(C_n) = \mu(A - C_n) \leq \sum_1^n {}_k \mu(A - B_k) = 0$. Poniamo ora $B = \bigcap_{\mathbb{N}} C_n$. Per una nota proprietà delle misure, essendo $C_{n+1} \subset C_n$ e $\mu(C_1) < +\infty$ risulta

$$\mu(B) = \lim_{n \to \infty} \mu(C_n) = \mu(A)$$

ed inoltre

$$\nu(B) \leq \nu(C_n) \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e perciò $\nu(B) = 0$.

Consideriamo ora il caso $\mu(A) = +\infty$. Per la semifinitezza della μ, A contiene insiemi di misura finita arbitrariamente grande. In particolare, esiste $A_1 \in \mathcal{A}$, tale che $1 \leq \mu(A_1) < +\infty$. Poichè $\mu(A - A_1) = +\infty$, esiste $A_2 \subset A - A_1$, tale che $1 \leq \mu(A_2) < +\infty$. Il ragionamento si può ripetere ancora e costruire così una successione di insiemi $A_n \in \mathcal{A}$, tali che

$$1 \leq \mu(A_n) < +\infty \text{ e } A_n \cap A_m = \emptyset \text{ se } n \neq m.$$

Posto $A^* = \bigcup_{\mathbb{N}} A_n$, risulta $\mu(A^*) = +\infty$, $A^* \subset A$. Poiché è $\mu(A_n) < +\infty$, si può costruire con un ragionamento analogo a quello utilizzato nel capoverso precedente, un insieme $B_n \subset A_n$, $B_n \in \mathcal{A}$, tale che $\nu(B_n) = 0$ e $\mu(B_n) = \mu(A_n)$. Posto ora $B = \bigcup_n B_n$, risulta $\nu(B) = 0$ e $\mu(B) = \mu(A)$ e con ciò la tesi.

Facciamo ora vedere con un esempio che, in generale, $\mu E \nu$ non implica $\mu S \nu$.

ESEMPIO. Sia ν la misura di Lebesgue su $[0, 1]$, $\mu(E) = \lim_{k \to \infty} k \cdot \nu(E)$, per ogni $E \subset [0, 1]$ e misurabile secondo Lebesgue. Risulta $\mu E \nu$, infatti se A è tale che $\mu(A) = 0$, si pone $B = A$. Se $\mu(A) = +\infty$, allora $\nu(A) > 0$. Esiste allora, per una nota proprietà della misura di Lebesgue, in corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$, un insieme misurabile B contenuto in A e tale che $0 < \nu(B) \leq \varepsilon$, Per come è stata definita la μ, risulta $\mu(B) = +\infty = \mu(A)$.

OSSERVAZIONE. Nell'esempio precedente è anche $\mu << \nu$. Quindi una misura può essere E-singolare e contemporaneamente assolutamente continua rispetto ad un'altra misura, senza essere identicamente nulla. Ciò prova, indirettamente, che nell'esempio precedente non è $\mu S \nu$. È infatti noto che se la μ non è identicamente nulla, le due relazioni $\mu S \nu$ e $\mu << \nu$ non sono compatibili. La situazione ora messa in luce è caratteristica nel caso che sia $\mu E \nu$, ma non $\mu S \nu$. I teoremi 2 e 4 preciseranno meglio questa affermazione.

TEOREMA 2. *Se è $\mu E \nu$, ma non $\mu S \nu$, allora esiste un insieme $C \in \mathcal{A}$ avente misura μ infinita tale che, posto $\mu_C(A) = \mu(A \cap C)$ e $\nu_C(A) = \nu(A \cap C)$, per ogni $A \in \mathcal{A}$, risulta*

$$\mu_C << \nu_C,$$

$$\mu_C E \nu_C.$$

Essendo $\mu E \nu$, ma non $\mu S \nu$, esiste un insieme $D \in \mathcal{A}$, tale che per ogni $B \subset D$ per cui $\mu(B) = \mu(D)$, risulta $\nu(B) > 0$. È $\mu(D) = +\infty$, per quanto visto nella dimostrazione del teorema 1 (primo capoverso). Notiamo che

$$a = \sup \{\mu(F)\,;\, F \in \mathcal{A},\ F \subset D,\ \mu(F) < +\infty\} < +\infty \ (^3).$$

(3) Altrimenti potremmo costruire un insieme B tale che $\nu(B) = 0$ *e* $\mu(B) = +\infty$, seguendo la stessa tecnica usata nel teorema 1 (secondo capoverso).

Sia $\{F_n\}$ una successione di insiemi di $\mathscr{A}$, contenuti in D ed aventi misura μ finita, tali che $\lim\limits_{n \to \infty} \mu(F_n) = a$.

Possiamo sempre supporre che $F_{n+1} \supset F_n$. Posto allora $F^* = \bigcup\limits_n F_n$, si ha che $\mu(F^*) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(F_n) = a$. Consideriamo ora l'insieme $C = D - F^*$: risulta $\mu(C) = +\infty$, inoltre C non contiene alcun insieme di $\mathscr{A}$ avente misura finita e positiva (4). La misura μ_C assume dunque solo due valori: zero ed infinito.

Facciamo ora vedere che l'insieme C soddisfa alle richieste del teorema. Sia $\nu_C(A) = 0$. Se fosse $\mu_C(A) > 0$, allora $\mu(A \cap C) = +\infty$, contro l'ipotesi fatta sull'insieme D. È quindi $\mu_C \ll \nu_C$.

Sia $A \in \mathscr{A}$. Se $\mu_C(A) = 0$, basta porre $B = \emptyset$. Se $\mu_C(A) = +\infty$, allora $\mu(A \cap C) = +\infty$ ed esiste quindi, in corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$ un insieme $B \subset A \cap C$, tale che $\mu(B) = +\infty$ e $\nu(B) \leq \varepsilon$. Ma $\mu_C(B) = \mu(B)$ e $\nu_C(B) = \nu(B)$, da cui discende che $\mu_C \, E \, \nu_C$.

DEFINIZIONE 4. Una misura μ di dice *degenere*, se assume soltanto due valori: zero ed infinito (5).

N. Y. Luther [4] ha dimostrato che ogni misura μ si può decomporre in maniera unica nella somma di due misure μ_1 e μ_2 tali che μ_1 è semifinita, μ_2 è degenere, inoltre $\mu_1 \, S \, \mu_2$ e $\mu_2 \, S \, \mu_1$.

TEOREMA 3. *Se $\mu \, E \, \nu$ e se μ_1 e μ_2 sono le due misure della decomposizione di Luther, allora*

(i) $\mu_1 \, S \, \nu$

(ii) $\mu_2 \, E \, \nu$ (6).

La misura μ_1 viene definita nel seguente modo: si considera la collezione di insiemi $\mathcal{S} = \{M \in \mathscr{A}, \ \mu(M) < +\infty\}$ e si pone

$$\mu_1 = \sup \{\mu_M; \ M \in \mathcal{S}\}.$$

(4) Se ne contenesse uno, che indichiamo con F', allora l'insieme $F^* \cup F'$ contraddirebbe la definizione di a, infatti $\mu(F^* \cup F') = \mu(F^*) + \mu(F') = a + \mu(F') > a$, pur essendo $F^* \cup F' \subset D$, $\mu(F^* \cup F') < +\infty$.

(5) Una misura degenere è « esattamente il contrario » di una semifinita. La locuzione è tratta da [2], p. 127.

(6) Si noti che il teorema 3 estende il teorema 1 (utilizzandone i risultati) poiché se la μ è semifinita, la μ_2 è identicamente nulla e $\mu_1 = \mu$.

Osserviamo che $\mu_M S \nu$, per ogni $M \in \mathcal{S}$. Infatti sia $A \in \mathcal{A}$. Essendo $\mu_M(A) = \mu(A \cap M) < +\infty$, si può ripetere il ragionamento fatto nel teorema 1 (primo capoverso) costruendo un insieme $B \subset A \cap M$, tale che $\mu(A \cap M) = \mu(B)$ e $\nu(B) = 0$. È anche $\mu_M(B) = \mu_M(A)$, da cui si deduce che $\mu_M S \nu$.

Per il teorema 3.1 di [3], risulta allora anche $\mu_1 S \nu$ e con ciò la (i).

La misura μ_2 viene definita nella maniera seguente: considerata la collezione di insiemi $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{A}, \mu_1(N) = 0\}$, si pone:

$$\mu_2 = \sup \{\mu_N ;\ N \in \mathcal{N}\}.$$

Sia $A \in \mathcal{A}$. Se $\mu_2(A) = 0$, si ponga $B = \emptyset$. Se invece $\mu_2(A) = +\infty$, allora esiste una successione di insiemi $\{N_k\}$, tali che $N_{k+1} \supset N_k$, $N_k \in \mathcal{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{k \to \infty} \mu_{N_k}(A) = +\infty$. Posto $N^* = \bigcup\limits_k N_k$, risulta $\mu_1(N^*) = 0$. Essendo $\mu(N^*) = +\infty$, esiste, per ogni $\varepsilon > 0$, un $B \subset N^*$, tale che $\mu(B) = +\infty$, $\nu(B) \leq \varepsilon$. Ma $\mu_1(B) = 0$, perciò $\mu_2(B) = +\infty$, da cui si deduce la (ii).

Utilizziamo il risultato del teorema precedente, per precisare meglio l'osservazione che precede il teorema 2.

TEOREMA 4. *La misura μ_2 del teorema 3 si può decomporre nella somma di due misure μ_2' e μ_2'', tali che*

(*a*) $\mu_2' S \nu$,

(b_1) $\mu_2'' E \nu$,

(b_2) $\mu_2'' << \nu$.

Si ponga $\mathcal{P} = \{P : P \in \mathcal{A},\ \nu(P) = 0\}$ e

$$\mu_2'(E) = \sup \{\mu_2(E \cap P) ;\ P \in \mathcal{P}\},$$

Risulta $\mu_2 S \nu$ ([3], teorema 2.1). Posto allora $\mathcal{R} = \{R :\ R \in \mathcal{A},\ \mu_2'(R) = 0\}$ e

$$\mu_2''(E) = \sup \{\mu_2(E \cap R) ;\ R \in \mathcal{R}\},$$

risulta $\mu_2 = \mu_2' + \mu_2''$ e $\mu_2'' << \nu$ ([3], teorema 2.1). Resta da dimostrare che $\mu_2'' E \nu$. Se $\mu_2''(A) = 0$, si ponga $B = \emptyset$. Se $\mu_2''(A) = +\infty$, allora esiste $R \in \mathcal{R}$, tale che $\mu_2(A \cap R) = +\infty$. Poiché $\mu_2 E \nu$, esiste in corrispondenza ad ogni $\varepsilon > 0$ un insieme $B \in \mathcal{A}$, $B \subset A \cap R$, tale che $\mu_2(B) = +\infty$, $\nu(B) \leq \varepsilon$. Essendo $\mu_2'(B) = 0$, è $\mu_2''(B) = +\infty$, da cui si deduce la (b_2).

I due teoremi precedenti mostrano che se è $\mu E \nu$, allora la μ si può decomporre nella somma di due misure (di cui la seconda è degenere):

$$\bar{\mu}_1 = \mu_1 + \mu_2', \quad \bar{\mu}_2 = \mu_2'',$$

tali che

$$\bar{\mu}_1 S \nu, \quad \bar{\mu}_2 E \nu \text{ e } \bar{\mu}_2 << \nu.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Bruneau, M. M., *Measures positives sur la droit réelle; une généralisation du théorème de decomposition de Lebesgue.* C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274 (1972) 1102-1105.

[2] Hewitt, E. e Stromberg, K., *Real and abstract analysis,* Springer 1965.

[3] Johnson, R. A., *On the Lebesgue decomposition theorem.* Proc. Amer.Math. Soc. 18 (1967) 628-632.

[4] Luther, N. Y., *A decomposition of measures.* Can. Jour. of Math. XX (1968) 953-959.

[5] Volčič, A., *Teoremi di decomposizione per misure localizzabili.* Rend. di Mat. Roma (2) Vol. 6, Serie VI (1973) 307-336.