RISOLUZIONE NUMERICA DI PROBLEMI DI FILTRAGGIO STATISTICO E PREDIZIONE (*)

di ANTONIO CRISCI (a Bari) (**)

SOMMARIO. - *Si risolvono numericamente esempi di problemi di filtraggio Statistico e Predizione, utilizzando una formula numerica per il calcolo delle trasformate di Hilbert* [4] *ottenuta sotto la condizione che la funzione da trasformare sia di quadrato integrabile. In un esempio la funzione scelta non verifica tale condizione. Si mostra che la formula numerica è ancora applicabile se la trasformata di Hilbert della funzione viene definita in maniera opportuna (cfr. p. e* [3], *cap. V). Partendo dalla citata definizione di trasformata di Hilbert, infatti, si ritrova la formula numerica e si mostra che essa bene approssima l'integrale.*

SUMMARY. - *Examples of numerical calculus of the frequency response of an optimum linear filter and an optimum predictor are performed by a numerical formula for Hilbert transform computation* [4] *obtained under the assumption that the function to transform is of square integrale.*

One example did not satisfy this last condition. By an appropriate definition of Hilbert transform (cfr. p. e. [3] *cap. V) of our function we show that the formula is still applicable.*

From the referred definition, indeed, we find the formula showing its good approximation to the integral.

Introduzione.

Nello schema semplice di sistema di comunicazione sorgente-canale-ricevitore, il canale molto spesso introduce un segnale non desiderato, di natura aleatoria, detto rumore. Il problema del Filtraggio Statistico consiste nella ricerca della risposta impulsiva di un filtro che elimini tale rumore.

(*) Pervenuto in Redazione il 2 luglio 1973.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Analisi Matematica dell'Università - 70100 Bari.

L'equazione integrale di Wiener-Hopf (cfr. p. e. [1], cap. 14) può fornire tale risposta impulsiva.

Tale equazione può fornire anche la risposta impulsiva di un filtro detto predittore ottimo che da in uscita lo stesso messaggio che arriva in entrata, ma con un anticipo prefissato α.

La soluzione esplicita dell'equazione integrale di Wiener-Hopf può essere espressa in termini di trasformate di Hilbert di opportune funzioni [4] e l'utilizzo di una formula numerica (cfr. [4] § 2) per il calcolo delle trasformate di Hilbert ottenuta sotto la condizione che la funzione da trasformare sia di quadrato integrabile, può condurre al calcolo numerico delle risposte in frequenza di un filtro o di un predittore ottimi.

In questa Nota sono trattati due esempi uno relativo al problema del Filtraggio (§ 1) l'altro relativo al problema della Pura Predizione (§ 3).

Nell'esempio relativo al problema di Filtraggio la funzione scelta e di quadrato integrabile ed il calcolo numerico della trasformata di Hilbert può essere effettuato mediante la formula numerica (1.9), sopra citata.

Nell'esempio relativo al problema di Pura Predizione la funzione presa in esame è $(1/2) \log (1 + x^2)$ che non è di quadrato integrabile. Si dimostra tuttavia (§§ 4, 5, 6) che con una appropriata definizione di trasformata di Hilbert (cfr. p. e. [3], cap. V), il Calcolo numerico della trasformata di tale funzione può ancora essere effettuato mediante la (1.9), purché la serie sia sommata secondo Cauchy. Tale formula viene, infatti, ritrovata (§ 5) partendo dalla citata definizione di trasformate di Hilbert e si dimostra (§ 6) che essa bene approssima l'integrale quando il passo di campionamento è abbastanza piccolo.

Un'estenzione alla classe di funzioni per le quali la formula numerica risulti ancora applicabile costituisce l'oggetto di un lavoro successivo.

1. Filtraggio.

Con $e(t)$ indichiamo l'entrata del filtro e con $d(t)$ il segnale che si vuole approssimare con l'uscita del filtro.

Il caso del filtraggio è specificato dalle seguenti relazioni:

$$e(t) = s(t) + r(t)$$

$$d(t) = s(t)$$

in cui $s(t)$ ed $r(t)$, segnale utile e rumore, sono funzioni aleatorie del tempo t, legate a processi stocastici stazionari. Indichiamo con $\Phi_{ee}(\omega)$ la trasformata di Fourier dell'autocorrelazione di $e(t)$ e con $\Phi_{ed}(\omega)$ la trasformata di Fourier della mutua correlazione di $e(t)$ con $d(t)$.

La risposta in frequenza $H_{opt}(\omega)$ del filtro ottimo è data dalla seguente formula (1):

$$H_{opt}(\omega) = \frac{1}{2\pi\, \Phi_{ee}^{+}(\omega)} \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi_{ed}(\omega)}{\Phi_{ee}^{-}(\omega)}\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{1.1}$$

La (1.1) può essere applicata nei casi in cui sia possibile trovare due funzioni complesse coniugate $\Phi_{ee}^{+}(\omega)$ e $\Phi_{ee}^{-}(\omega)$ che verifichino la relazione seguente:

$$\Phi_{ee}(\omega) = \Phi_{ee}^{+}(\omega)\, \Phi_{ee}^{-}(\omega) \tag{1.2}$$

e tali che prolungate sul piano complesso $z = \omega + jv$ risultino essere analitiche e prive di zeri la prima nel semipiano $v < 0$, la seconda nel semipiano $v > 0$. Condizione necessaria e sufficiente perché due siffatte funzioni esistano è che sia verificata la condizione (2):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\log \Phi_{ee}(\omega)|}{1+\omega^2}\, d\omega < \infty. \tag{1.3}$$

Abbiamo preso in considerazione il caso specificato come segue:

$$\Phi_{ee}(\omega) = \frac{2+\omega^2}{1+\omega^2}, \quad \Phi_{ed}(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2} \tag{1.4}$$

Applicando la (1.1) con facili calcoli si ottiene per via analitica la soluzione:

$$H_{opt}^{R}(\omega) = \frac{2-\sqrt{2}}{2+\omega^2}, \quad H_{opt}^{J}(\omega) = \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2+\omega^2}\right)\omega \tag{1.5}$$

(1) Ved. [1] e [5].
(2) Ved. [5], 1, 7.

Troveremo, ora, la soluzione del medesimo problema applicando speciali tecniche numeriche. Sia $\lambda(\omega)$ la trasformata di Hilbert della funzione:

$$l(\omega) = \frac{1}{2} \log \Phi_{ee}(\omega) \tag{1.6}$$

e poniamo:

$$\begin{aligned} f_1(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\Phi_{ee}(\omega)}} \{\Phi^R_{ed}(\omega) \cos \lambda(\omega) - \Phi^J_{ed}(\omega) \sin \lambda(\omega)\} \\ f_2(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\Phi_{ee}(\omega)}} \{\Phi^R_{ed}(\omega) \sin \lambda(\omega) + \Phi^J_{ed}(\omega) \cos \lambda(\omega)\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Se, allora, indichiamo con $g_1(\omega)$ e $g_2(\omega)$ le trasformate di Hilbert di $f_1(\omega)$ e $f_2(\omega)$ rispettivamente, si dimostra che la (1.1) può mettersi sotto la seguente forma (3):

$$\begin{aligned} Y^R(\omega) &= \frac{1}{2\sqrt{\Phi_{ee}(\omega)}} \left\{ \frac{\Phi^R_{ea}(\omega)}{\sqrt{\Phi_{ee}(\omega)}} + g_1(\omega) \operatorname{sen} \lambda(\omega) - g_2(\omega) \cos \lambda(\omega) \right\} \\ Y^J(\omega) &= \frac{1}{2\sqrt{\Phi_{ee}(\omega)}} \left\{ \frac{\Phi^J_{ed}(\omega)}{\sqrt{\Phi_{ee}(\omega)}} + g_1(\omega) \cos \lambda(\omega) + g_2(\omega) \operatorname{sen} \lambda(\omega) \right\} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Il calcolo di $Y^R(\omega)$ e $Y^J(\omega)$ è stato effettuato applicando la (1.8) ed utilizzando, per il calcolo approssimato delle trasformate di Hilbert, la seguente formula (4):

$$g(nT - T/2) = \frac{2}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{1}{2k+1} f([n+k]\,T) \tag{1.9}$$

Riportiamo in tabella i valori di $Y^R(\omega)$ e $Y^J(\omega)$ nei punti $n\Omega$ con $n = 0, 1, 2, \dots$. I simboli $N1$ ed $N2$ stanno ad indicare i valori dell'indice k a cui è stata troncata la sommatoria (1.9) per il calcolo dei valori approssimati della funzione $\lambda(\omega)$ e delle funzioni $g_1(\omega)$ e $g_2(\omega)$ rispettivamente.

(3) Ved. [4], 4.
(4) Ved. [4], 2.

FILTRAGGIO

$\Omega = 0.5$ $\qquad$ $N1 = 300$ $\qquad$ $N2 = 50$

ω	$Y^R(\omega)$	$Y^R(\omega) - H^R_{opt}(\omega)$	$Y^J(\omega)$	$Y^J(\omega) - H^J_{opt}(\omega)$
0.0	0.2928893	— 0.0000040	— 0.0000000	— 0.0000000
0.5	0.2603450	— 0.0000046	— 0.0920418	0.0000055
1.0	0.1952569	— 0.0000053	— 0.1380596	0.0000114
1.5	0.1378258	— 0.0000063	— 0.1461746	0.0000182
2.0	0.0976240	— 0.0000070	— 0.1380457	0.0000254

2. Calcolo dell'errore quadratico medio.

Sia m un minorante positivo della $\Phi_{ee}(\omega)$. Un maggiorante dell'errore quadratico medio è allora dato dalla seguente formula (5), ottenuta supponendo trascurabili gli errori da cui sono affetti i valori calcolati per le $\lambda(\omega)$:

$$E = \frac{\Omega}{4m} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{[f_1(k\Omega) - f_1^\Omega(k\Omega)]^2 + [f_2(k\Omega) - f_2^\Omega(k\Omega)]^2\} \tag{2.1}$$

Le funzioni $f_1^\Omega(\omega)$ ed $f_2^\Omega(\omega)$ sono così definite:

$$\begin{aligned} f_1^\Omega(\omega) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1\left(\frac{2n-1}{2}\Omega\right) S_\Omega\left(\omega - \frac{2n-1}{2}\Omega\right) \\ f_2^\Omega(\omega) &- \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_2\left(\frac{2n-1}{2}\Omega\right) S_\Omega\left(\omega - \frac{2n-1}{2}\Omega\right) \end{aligned} \tag{2.2}$$

con:

$$S_\Omega(\omega) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi\omega/\Omega)}{\pi\omega/\Omega} & \omega \neq 0 \\ 1 & \omega = 0 \end{cases}$$

La formula (2.1) fornisce il valore di E sfruttando valori di $f_1(\omega)$ ed $f_2(\omega)$ che già si hanno a disposizione in quanto già calco-

(5) Ved. [4], 4; formula (33).

lati per ottenere la $Y(\omega)$. Notiamo che la formula per il calcolo di E può essere applicata solo nei casi in cui la $\Phi_{ee}(\omega)$ ammetta un minorante positivo m e, pertanto, non potremo utilizzarla nei casi di predizione che verranno esaminati in seguito.

Riportiamo il valore di E calcolato mediante la (2.1), relativamente al caso $\Omega = .5$ dell'esempio preso in considerazione nel caso del filtraggio in cui risulta $m = 1$.

I simboli K MAX ed L indicano gli ordini delle ridotte che nei calcoli sono state sostituite alla serie (2.1) ed alla serie (2.2) rispettivamente.

$\Omega = .5$

K max	L	E
20	50	.00108563

3. Predizione.

Il caso della predizione è specificato dalle seguenti relazioni:

$$e(t) = s(t)$$

$$d(t) = s(t + \alpha)$$

con α positivo.

Con ovvio significato dei simboli si ha:

$$\Phi_{ee}(\omega) = \Phi_{ss}(\omega), \quad \Phi_{ed}(\omega) = \Phi_{ss}(\omega)\, e^{j\alpha\omega} \tag{3.1}$$

La risposta in frequenza $H_{opt}(\omega)$ del predittore ottimo è data dalla seguente formula:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{1}{2\pi\, \Phi_{ss}^{+}(\omega)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ss}^{+}(\omega)\, e^{j\omega(\tau+\alpha)}\, d\omega \tag{3.2}$$

Il caso che abbiamo risolto numericamente è così specificato:

$$\Phi_{ss}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1+\omega^2)^2} \tag{3.3}$$

Applicando la (3.2) e tenendo conto della (3.3) si trova:

$$H_{opt}^{R}(\omega) = e^{-\alpha}(1+\alpha), \quad H_{opt}^{J}(\omega) = e^{-\alpha}\,\omega\alpha \tag{3.4}$$

La soluzione numerica è stata trovata mediante le seguenti formule [6]:

$$\begin{aligned} Y^{R}(\omega) &= \frac{1}{2\sqrt{\Phi_{ss}(\omega)}}\left\{\cos\alpha\omega\sqrt{\Phi_{ss}(\omega)} + g_1\,\omega\sin\lambda(\omega) - g_2(\omega)\cos\lambda(\omega)\right\} \\ Y^{J}(\omega) &= \frac{1}{2\sqrt{\Phi_{ss}(\omega)}}\left\{\sin\alpha\omega\sqrt{\Phi_{ss}(\omega)} + g_1(\omega)\cos\lambda(\omega) + g_2(\omega)\sin\lambda(\omega)\right\} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Si noti che l'applicabilità del metodo numerico è legata alla possibilità di calcolare, mediante la formula (1.9), la funzione $\lambda(\omega)$ trasformata di Hilbert della funzione $l(\omega)$ data dalla (1.6). Ricordiamo che la (1.9) è stata ottenuta in [4] sotto la condizione che la funzione da trasformare sia di quadrato integrabile e tale condizione non risulta verificata dalla funzione $l(\omega)$ in quanto la $\Phi_{ee}(\omega)$ da noi scelta è infinitesima all'infinito come subito si vede dalla (3.3). Ciononostante, come i risultati mostrano, le formule forniscono ancora risultati soddisfacenti purché per il calcolo della funzione $\lambda(\omega)$ si utilizzi la somma secondo Cauchy della serie e secondo membro della (1.9).

Si dimostrerà nei prossimi paragrafi che la trasformata di Hilbert di $l(\omega)$, può ancora essere definita e verrà ritrovata per altra via la formula numerica (1.9).

Il procedimento seguito per il calcolo numerico è con lievi modifiche, il medesimo di quello usato per il Filtraggio. In questo caso le funzioni $f_1(\omega)$ ed $f_2(\omega)$ hanno le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} f_1(\omega) &= \sqrt{\Phi_{ss}(\omega)}\cos(\lambda(\omega)+\alpha\,\omega) \\ f_2(\omega) &= \sqrt{\Phi_{ss}(\omega)}\,\mathrm{sen}\,(\lambda(\omega)+\alpha\,\omega) \end{aligned} \tag{3.6}$$

dove il simbolo α indica il tempo di predizione.

(6) Ved. [4], 4.

Sono state effettuate numerose prove al variare di α ed al variare di Ω ma riportiamo solo alcuni dei risultati ottenuti.

Il significato dei simboli $N1$ ed $N2$ è lo stesso di quello attribuito nel caso del Filtraggio. Si riporta anche una serie di valori relativi al valore $\alpha = 0$.

Questo caso pur non rientrando nè al caso del Filtraggio nè in quello della Predizione può essere utile quando un controllo dei risultati non è possibile, in quanto non si conosce il valore analitico della risposta in frequenza. Si ha che $Y(\omega)$ risulta essere sempre uguale ad uno, come passiamo a dimostrare qui di seguito.

Ponendo, infatti, $\alpha = 0$ nella (3.2) si ha:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{1}{2\pi\, \Phi_{ss}^{+}(\omega)} \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ss}^{+}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{3.7}$$

Introduciamo, allora, il simbolo $\varphi_{ss}^{+}(\tau)$ così definito:

$$\varphi_{ss}^{+}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{ss}^{+}(\omega)\, e^{j\omega\tau}\, d\omega$$

Per un noto teorema (7) risulta:

$$\varphi_{ss}^{+}(\tau) = 0 \text{ per } \tau < 0 \tag{3.8}$$

e pertanto la (3.7) così si modifica:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{1}{2\pi\, \Phi_{ss}^{+}(\omega)} \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, \varphi_{ss}^{+}(\tau)\, d\tau.$$

Tenendo conto della (3.8), si ha:

$$\Phi_{ss}^{+}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\infty} e^{-j\omega\tau}\, \varphi_{ss}^{+}(\tau)\, d\tau$$

ed infine si ottiene

$$H_{opt}(\omega) = 1.$$

(7) Ved. [3], 5, 6.

PURA PREDIZIONE

$\alpha = 0$ $\Omega = .4$ $N1 = 3000$

$N2 = 50$

ω	$Y^R(\omega)$	$Y^R(\omega) - H^R_{opt}(\omega)$	$Y^J(\omega)$	$Y^J(\omega) - H^J_{opt}(\omega)$
0.0	0.9999218	— 0.0000782	0.0000000	0.0000000
0.4	0.9999528	— 0.0000471	— 0.0000585	— 0.0000585
0.8	1.0000057	0.0000057	— 0.0001085	— 0.0001085
1.2	1.0000973	0.0000973	— 0.0001355	— 0.0001355
1.6	1.0002241	0.0002241	— 0.0001352	— 0.0001352
2.0	1.0003891	0.0003891	— 0.0000955	— 0.0000955

$\alpha = 2$

$N2 = 50$

ω	$Y^R(\omega)$	$Y^R(\omega) - H^R_{opt}(\omega)$	$Y^J(\omega)$	$Y^J(\omega) - H^J_{opt}(\omega)$
0.0	0.4054468	— 0.0005590	0.0000000	0.0000000
0.4	0.4055227	— 0.0004830	0.1078276	— 0.0004406
0.8	0.4057729	— 0.0002329	0.2156229	— 0.0009135
1.2	0.4062378	0.0002320	0.3233949	— 0.0014096
1.6	0.4069277	0.0009219	0.4311893	— 0.0018833
2.0	0.4077970	0.0017912	0.5390420	— 0.0022987

4. Definizione della trasformata di Hilbert della funzione $l(x) = (1/2) \log(1 + x^2)$.

Dimostreremo, ora, che:
Per ogni numero reale y si ha:

$$(4.1) \qquad \pi \operatorname{arctg}(y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{y-1/2}^{y-\varepsilon} + \int_{y+\varepsilon}^{y+1/2} \right) \frac{(1/2)\log(1+x^2)}{x-y}\, dx +$$

$$+ \lim_{M \to \infty} \left(\int_{y-M-1/2}^{y-1/2} + \int_{y+1/2}^{y+M+1/2} \right) \frac{(1/2)\log(1+x^2)}{x-y}\, dx.$$

Posto $z = x + it$ si consideri la funzione $\log(1 - iz)$ la quale risulta olomorfa in tutto il semipiano $\operatorname{Im} z > 0$. Si applichi il teorema di Cauchy al semicerchio Γ, con centro nel punto $x = y$ e raggio $M + 1/2$ comunque grande e giacente nel semipiano $\operatorname{Im} z > 0$. Allora qualunque sia z tale che:

$$\operatorname{Im} z > 0 \ \text{e} \ |z - y| < M + 1/2$$

Si ha:

$$(4.2) \qquad \log(1 - iz) = \frac{1}{2\pi i} \int_{F\Gamma} \frac{\log(1 - iw)}{w - z}\, dw$$

Posto $F\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, dove Γ_1 e Γ_2 sono rispettivamente il diametro e la semicirconferenza del semicerchio Γ su definito, si ottiene:

$$(4.3) \qquad \log(1 - iz) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\Gamma_1} \frac{\log(1 - iw)}{w - z}\, dw + \int_{\Gamma_2} \frac{\log(1 - iw)}{w - z}\, dw \right\}$$

Risultando poi $w = x$ per $w \in \Gamma_1$ e $w = y + (M + 1/2)\, e^{i\sigma}$ con $0 \leq \sigma \leq \pi$ per $w \in \Gamma_2$ si ha:

$$(4.4) \qquad \log(1 - iz) = \frac{1}{2\pi i} \int_{y-M-1/2}^{y+M+1/2} \frac{\log(1 - ix)}{x - z}\, dx +$$

$$+ \frac{(M + 1/2)}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{e^{i\sigma} \log(1 - i[y + (M + 1/2)\, e^{i\sigma}])}{(y - z) + (M + 1/2)\, e^{i\sigma}}\, d\sigma.$$

Ricordando la formula di Plemelij (8) e tenendo conto della continuità del logaritmo su $F\Gamma$:

(8) Ved. p. v. [2].

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \overset{\circ}{\Gamma}}} \frac{1}{2\pi i} \int_{F\Gamma} \frac{\log(1 - iw)}{w - z} \, dw =$$

$$= \frac{1}{2} \log(1 - iz_0) + \frac{1}{2\pi i} (VP) \int_{F\Gamma} \frac{\log(1 - iw)}{w - z_0} \, dw$$

posto $z_0 = y$ e scelta per il logaritmo la determinazione principale la (4.4) così si trasforma:

$$\text{(4.5)} \qquad \log|1 - iy| + i \operatorname{Arg}(1 - iy) = \frac{1}{2} \{\log|1 - iy| +$$

$$+ i \operatorname{Arg}(1 - iy)\} + \frac{1}{2\pi i} (VP) \int_{y-M-1/2}^{y+M+1/2} \frac{(1/2)\log(1+x^2) + i \operatorname{Arg}(1 - ix)}{x - y} \, dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{\log|1 - i(y + [M + 1/2]e^{i\sigma})| + i \operatorname{Arg}(1 - i[y + (M + 1/2)e^{i\sigma}])\} \, d\sigma$$

Uguagliando le parti immaginarie dei due membri con facili calcoli si ottiene:

$$\text{(4.6)} \qquad \operatorname{arctg} y = \frac{1}{\pi} (VP) \int_{y-M-1/2}^{y+M+1/2} \frac{(1/2)\log(1 + x^2)}{x - y} \, dx +$$

$$- \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{Arg}(1 - i[y + (M + 1/2)e^{i\sigma}]) \, d\sigma.$$

Se risulta

$$\text{(4.7)} \qquad \lim_{M \to \infty} \int_0^{\pi} \operatorname{Arg}(1 - i[y + (M + 1/2)e^{i\sigma}]) \, d\sigma = 0$$

Si ha

$$\text{(4.8)} \qquad \operatorname{arctg} y = \frac{1}{\pi} \lim_{M \to \infty} (VP) \int_{y-M-1/2}^{y+M+1/2} \frac{(1/2)\log(1 + x^2)}{x - y} \, dx$$

che è equivalente alla (4.1).

Dimostriamo che è valida la (4.7). Poiché risulta:

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y+M\cos\sigma}{1+M\operatorname{sen}\sigma}\,d\sigma=\int_0^{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}\,d\sigma$$

Si stabilisce la (4.7) osservando che:

$$\operatorname{arctg}\frac{\cos\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}=\frac{\pi}{2}-\sigma\quad\forall\ \sigma\in[0,\pi/2]$$

c. d. d.

Quanto ora dimostrato rende lecita la seguente definizione di trasformata di Hilbert della funzione $(1/2)\log(1+x^2)$:

$$(4.9)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1/2)\log(1+x^2)}{x-y}\,dx=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{y-1/2}^{y-\varepsilon}+\int_{y+\varepsilon}^{y+1/2}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{(1/2)\log(1+x^2)}{x-y}\,dx+\frac{1}{\pi}\lim_{M\to\infty}\left(\int_{y-M-1/2}^{y-1/2}+\int_{y+1/2}^{y+M+1/2}\right)\frac{(1/2)\log(1+x^2)}{x-y}\,dx$$

in cui l'integrale a primo membro viene inteso, evidentemente, in valor principale sia per $x=y$ sia all'infinito.

Segue in maniera ovvia dalla (4.8) la seguente:

$$(4.10)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1/2)\log(1+x^2)}{x-y}\,dx=\operatorname{arctg}y\,.$$

Poiché la (4.10) è valida per ogni numero reale y è lecito porre in essa $y=nT-T/2$ con T numero reale qualsiasi ed n numero intero relativo qualsiasi.

Intendendo l'integrale (4.10) nel senso espresso dalla (4.9) con facili sostituzioni si può provare la seguente formula, che ci sarà utile più avanti:

$$(4.11)\ \operatorname{arctg}(nT-T/2)=\frac{1}{\pi}\left\{\lim_{M\to\infty}\int_0^M\frac{1}{2x+T}\log\frac{1+(nT+x)^2}{1+(nT-x-T)^2}\,dx+\right.$$

$$\left.+\int_{-T}^{0}\frac{1}{2x+T}\log\frac{1+(nT+x)^2}{1+(nT-T/2)^2}\,dx\right\}.$$

5. Calcolo numerico della trasformata di Hilbert della funzione $(1/2)\log(1+x^2)$.

E' ovvio che, una volta definita la trasformata di Hilbert della funzione $(1/2)\log(1+x^2)$ mediante la (4.10), si potrebbe utilizzare una qualunque procedura di calcolo per l'arcotangente; ma qui si vuole porre in risalto il fatto che, pur non essendo la funzione da trasformare di quadrato integrabile, la formula (1.9), utilizzata nei paragrafi precedenti, è ancora valida purché la serie a secondo membro sia sommata in modo opportuno.

Si noti ora che il secondo integrale a secondo membro della (4.11) risulta trascurabile ed il primo integrabile si esprime come somma di integrali del tipo:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} \frac{1}{2x+T} \log \frac{1+(nT+x)^2}{1+(nT-x-T)^2}\, dx$$

la serie:

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{K=0}^{M} \frac{1}{2k+1} \log \frac{1+T^2(n+k)^2}{1+T^2(n-k-1)^2} \tag{5.1}$$

approssima l'integrale:

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{k=0}^{M} \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{1}{2x+T} \log \frac{1+(nT+x)^2}{1+(nT-x-T)^2}\, dx\,. \tag{5.2}$$

Con un errore:

$$E = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2k+1} \log \frac{1+T^2(n+k)^2}{1+T^2(n-k-1)^2} - \right. \tag{5.3}$$

$$\left. - \int_{kT}^{(k+1)T} \frac{1}{2x+T} \log \frac{1+(nT+x)^2}{1+(nT-x-T)^2}\, dx \right\}$$

Facciamo notare che la (5.1) non è altro che la serie (1.9) sommata secondo Cauchy quando la funzione in questione è $(1/2)\log(1+x^2)$.

6. Calcolo dell'errore.

Con facili calcoli si vede che il termine generale della serie a secondo membro della (5.3) si maggiora con la quantità

$$\frac{T^4\,|\,2n-1\,|\,(3+2\,|\,n-k\,|\,)}{(1+T^2\,[n-k-1]^2)\,(1+T^2\,[n-k-2]^2)} \tag{6.1}$$

Per semplificare la valutazione di un maggiorante di E si è supposto n negativo il che non da fastidio in quanto il calcolo per valori positivi di n si ottiene semplicemente notando che la funzione arctg x è una funzione dispari.

Se nella (6.1) si sostituisce $-n$ ad n si ottiene

$$\frac{T^4\,(2n+1)\,(3+2\,(n+k))}{(2+T^2\,[n+k+1]^2)\,(1+T^2\,[n+k+2]^2)} \tag{6.1'}$$

La quantità (6.1′) si maggiora, allora, con:

$$\frac{4T^2\,(n+1)}{(n+k+2)\,(1+T^2\,[n+k+1]^2)} \tag{6.2}$$

e notando che:

$$\frac{1}{1+T^2\,(n+k+1)^2} \leq \frac{1}{(n+k+1)\,T}$$

la quantità (6.2) si maggiora con:

$$\frac{4T\,(n+1)}{(n+k+1)^2}$$

Tenendo presente che:

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k+1)^2} < \frac{1}{n+1}$$

Si trova infine:

$$E \leq 8\,T \tag{6.3}$$

Valutiamo ora l'errore che si commette trascurando il secondo integrale a secondo membro della (4.11).

Poniamo:

$$(6.4)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{0}\frac{1}{2x+T}\log\frac{1+(nT+x)^2}{1+(nT-T/2)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{0}\frac{1}{2x+T}\log\left(1+\frac{(2nT+x-T/2)\,(x+T/2)}{1+T^2\,(n-1/2)^2}\right)dx$$

per calcolre l'integrale (6.4) faremo alcune considerazioni:

Per ogni $0<z\leq h$ con $h<1$ esiste $\bar{z}$ tale che:

$$\log(1+z)=z/(1+\bar{z})\leq z/(1-h)$$

Sia

$$(6.5)\qquad R(z)=\log(1+z)-z$$

se si pone:

$$(6.6)\qquad R_1(z)=R(z)/z$$

Si ottiene:

$$(6.7)\qquad R_1(z)\leq h/(1-h)$$

Si osservi ora che se si sostituisce $-n$ ad n, per $-T\leq x\leq 0$ si ha:

$$\frac{(x+T/2)\,(2nT-T/2+x)}{1+T^2\,(n-1/2)^2}\leq\frac{1}{(n+1/2)}.$$

Se si tien conto delle (6.5) e (6.6) con

$$z=\frac{(x+T/2)\,(2nT+T/2-x)}{1+T^2\,(n+1/2)^2}$$

l'integrale (6.4) si valuta nel modo seguente:

$$I=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{0}\frac{1}{2x+T}\log\frac{1+(nT+x)^2}{1+T^2\,(n-1/2)^2}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{0}\frac{1}{2x+T}\,z\,\{1+R_1(z)\}\,dx$$

Posto poi:

$$h = 1/(n + 1/2)$$

e tenendo conto della (6.7) si trova:

$$I \leq \frac{2}{\pi} \frac{(2n+1)\, T^2}{4 + T^2 (2n+1)^2}$$

osservando, poi, che risulta:

$$\frac{1}{4 + T^2 (2n + 1)^2} \leq \frac{1}{2T(2n+1)}$$

si ha, infine:

$$I \leq \frac{T}{\pi}.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] Y. W. LEE, *Statistical Theory of Communication.* J. Wiley & Sons, 1966.

[2] N. I. MUSKELISVILIJ, *Singular integral equations.*

[3] E. C TITCHMARSH, *Theory of Fourier Integrals.* Oxford, 1948.

[4] R. VINCIGUERRA, *Calcolo numerico delle trasformate di Hilbert ed applicazioni.* Calcolo, Vol. 4, fasc. 3, 453 (1967).

[5] N. WIENER, *Extrapolation Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series.*