UN RISULTATO RELATIVO ALLE FUNZIONI DI GRUNDY NELLA TEORIA DEI GRAFI (*)

di BRUNO D'AMORE (a Bologna) (**)

SOMMARIO. - *Si definisce il grafo commutato orientato G^{**} di un grafo orientato G. Nella teoria dei grafi, si prova poi che se l'1-grafo G ammette funzione di Grundy, allora anche G^{**} ammette tale funzione, di cui si costruisce un esempio. Si prova inoltre che se G ammette nucleo, anche G^{**} lo ammette.*

SUMMARY. - *We define the line digraph G^{**} of a digraph G. In the theory of digraph, we proof that if G has Grundy's function, then G^{**} too, and we build one of such a digraph. We proof also that if G has a kernel, then G^{**} too.*

1. Ricordiamo che, dato un grafo $G(X, \Gamma)$, si dice successivo dell'elemento x_i di X, ogni elemento x_j di X tale che esista in Γ l'arco (x_i, x_j) (orientato da x_i verso x_j) e si indica con $\Gamma^+(x_i)$ l'insieme dei successivi di x_i.

Viceversa, si indica con $\Gamma^-(x_i)$ l'insieme dei predecessori di x_i (con definizione analoga per il termine). Si pone, generalmente, $\Gamma(x_i) = \Gamma^+(x_i) \cup \Gamma^-(x_i)$. Ricordiamo ancora che $G(X, \Gamma)$ è detto p-grafo se per ogni i e j, interi positivi, il numero degli archi (x_i, x_j) é non maggiore di p. In questa nota, parleremo esclusivamente di 1-grafi.

Ricordiamo infine che si dice generalmente grafo commutato G^* di un grafo G un grafo i cui vertici sono gli spigoli di G e i cui spigoli congiungono coppie di spigoli se e solo se questi rappresentano spigoli incidenti in G.

(*) Pervenuto in Redazione il 20 giugno 1973.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Geometria dell'Università - Piazza di Porta S. Donato 5 - 40127 Bologna.

2. Chiameremo grafo commutato orientato G^{**} di un grafo orientato G il grafo orientato ottenuto orientando in maniera opportuna il grafo commutato del grafo non orientato associato a G. L'orientazione si fa nel modo seguente. Siano (x_i, x_j) e (x_j, x_k) due archi di G cui corrispondono in G^{**} due vertici che continueremo a denominare (x_i, x_j) e (x_j, x_k). Poiché la coppia $((x_i, x_j), (x_j, x_k))$ costituisce in G un cammino, allora in G^{**} l'arco $[(x_i, x_j), (x_j, x_k)]$ è orientato e più precisamente in modo tale che il vertice iniziale dell'arco sia il corrispondente dell'arco iniziale del cammino in G. Se i due archi non costituiscono un cammino, in G^{**} non esiste l'arco corrispondente. Sia Γ^* l'insieme degli archi di G^{**}.

3. PROPOSIZIONE 1: *Se l'1 grafo $G(X, \Gamma)$ ammette funzione di Grundy, allora il grafo commutato orientato $G^{**}(\Gamma, \Gamma^*)$ ammette pure funzione di Grundy.*

DIMOSTRAZIONE: Se G ammette una funzione di Grundy (1) $g: X \longrightarrow Z$ si ha, per definizione:

1) $(g(x_i) = k > 0 <\!\!\longrightarrow [$per ogni $h < k$, esiste un x_j di $\Gamma(x_i)$ tale che $g(x_j) = h]$,

2) $(g(x_i) = k) <\!\!\longrightarrow [$per ogni x_j di $\Gamma(x_i)$ si ha $g(x_j) \neq k]$.

Costruiamo la funzione di Graudy di $G^{**}(\Gamma, \Gamma^*)$, e sia f: $\Gamma(\subseteq X^2) \longrightarrow I$, tale che:

1′) $f(x_i, x_j) = \min[g(x_i), g(x_j)]$ se per ogni $(x_r, x_s) \in \Gamma^*(x_i, x_j)$ si ha che $f(x_r, x_s) \neq g(x_i)$ e $f(x_r, x_s) \neq g(x_j)$;

2′) $f(x_i, x_j) = \max[g(x_i), g(x_j)]$ se per ogni $(x_r, x_s) \in \Gamma^*(x_i, x_j)$ si ha che $f(x_r, x_s) = g(x_i)$ oppure $f(x_r, x_s) = g(x_j)$ (2).

Diremo che f è la funzione di Grundy di G^{**}, dedotta dalla funzione di Grundy g di G; naturalmente non è escluso ve ne siano altre possibili.

(1) V. [1], pp. 300-301.
(2) Dato che $g(x_i) \neq g(x_j)$, non si pone il caso dello studio di f quando $g(x_i) = g(x_j)$.

PROPOSIZIONE 2: *Le l'1-grafo* $G(X, \Gamma)$ *ammette un nucleo, allora il grafo commutato orientato* $G^{**}(\Gamma, \Gamma^*)$ *ammette pure nucleo.*

DIMOSTRAZIONE: Com'è noto (3), se un grafo ammette funzione di Grundy, allora ammette nucleo. Dunque, dalla PROPOSIZIONE 1 precedente si ha immediatamente la 2.

Ciò accade in particolare se G non possiede circuiti: in tal caso, infatti, anche G^{**} non ne ammette. Ma, per un noto teorema dovuto a Grundy stesso (4), in tal caso G ha funzione di Grundy, e questa è unica. Dunque, per la PROPOSIZIONE 1, anche G^{**} ha funzione di Grundy.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes,* Dunod, Paris, 1970.

(3) V. [1], p. 301.
(4) V. [1], p. 302.