SUI MULTIGRUPPI RISOLUBILI (*)

di FABIO ROSSI (a Trieste) (**)

SOMMARIO - *Si introduce la nozione di multigruppo risolubile e se ne studiano le proprietà.*

SUMMARY - *The notion of solvable multigroups is introduced and their properties are studied.*

Introduzione.

Scopo di questa nota è l'estensione di alcune definizioni e risultati della teoria dei gruppi risolubili alla teoria dei multigruppi (o « ipergruppi »).

Nel n. 1 si definisce il derivato (primo) di un qualunque multigruppo K e si assegnano delle condizioni affinché certe relazioni di equivalenza « compatibili » con la struttura di K forniscano quozienti abeliani; in particolare, rimangono caratterizzate le equivalenze fortemente regolari $\mathcal{R}$ di K (cfr. [2]), tali che il gruppo quoziente $K/\mathcal{R}$ sia abeliano.

Il legame esistente tra la struttura di multigruppo e quella di gruppo è evidenziato dal funtore Φ della categoria dei multigruppi in quella dei gruppi, definito in [2]. Servendosi di tale funtore, si stabiliscono (nn. 2,3) certe proprietà del derivato primo e dei derivati di ordine superiore di un multigruppo K, in relazione agli omomorfismi di K sia in un multigruppo qualunque, che, in particolare, in un gruppo.

(*) Pervenuto in Redazione il 9 marzo 1973.

Lavoro eseguito nel periodo di godimento di una borsa di studio del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 - 34100 Trieste.

I risultati ottenuti permettono di assegnare, per il tramite del funtore Φ, delle condizioni di risolubilità (n. 4) di un multigruppo K. Si giunge in particolare ad una caratterizzazione dei multigruppi « piatti » risolubili mediante l'esistenza di catene principali a quozienti tutti abeliani e si forniscono delle condizioni sufficienti per la risolubilità di certi sottomultigruppi e quozienti di un multigruppo risolubile.

Nella presente esposizione si presuppongono noti i risultati fondamentali di [2], e si fa costantemente uso della terminologia e delle notazioni di tale memoria.

1. Derivato di un multigruppo.

Sia K un multigruppo. Diremo *commutatore generalizzato* di due elementi x, y di K, la parte $[x, y]$ di K, definita da :

$$[x, y] = \{a \mid \exists z \in x \cdot y, \exists \bar{z} \in y \cdot x : z \in \bar{z} \cdot a\}.$$

Indichiamo con $\mathcal{D}$ l'insieme costituito dalla parte vuota $\emptyset$ e dalle parti complete e moltiplicativamente chiuse (cfr. [2]) di K. Si verifica senza difficoltà, che $\mathcal{D}$ è un sotto $\cap$-semi-reticolo completo del reticolo $\mathcal{P}(K)$ delle parti di K, onde, poiché $K \in \mathcal{D}$, esso è anche un reticolo completo (cfr. [1]).

Se $\mathcal{C}$ è la chiusura di Moore associata alla famiglia $\mathcal{D}$ (cfr. [1]), diremo *derivato primo* di K, la parte $K^{(1)} = \mathcal{C}(A)$, con $A = \bigcup_{x, y \in K} [x,y]$.

Siano ϱ_K la più fine equivalenza fortemente regolare di K, g_K il gruppo quoziente K/ϱ_K e φ_K l'omomorfismo canonico di K su g_K (cfr. [2]). Verifichiamo in primo luogo che :

1.1. $\varphi_K(K^{(1)}) = g_K^{(1)}$, *ove* $g_K^{(1)}$ *è il derivato primo di* g_K.

Dim : Sia a' il commutatore degli elementi x', y' di g_K. Esistono allora tre elementi a, x, y di K tali che $\varphi_K(a) = a'$, $\varphi_K(x) = x'$, $\varphi_K(y) = y'$. Poiché $x' \cdot y' = (y' \cdot x') \cdot a'$, risulta $\varphi_K(x \cdot y) = \varphi_K((y \cdot x) \cdot a)$; se $z \in x \cdot y$, $\bar{z} \in (y \cdot x) \cdot a$ sarà dunque $\varphi_K(z) = \varphi_K(x \cdot y) = \varphi_K((y \cdot x) \cdot a) = \varphi_K(\bar{z})$ cioè $z \,\varrho_K\, \bar{z}$. Indicando allora con $\theta_K(\bar{z})$ la chiusura completa di $\bar{z}$ (cfr. [2]), si ottiene $z \in \theta_K(\bar{z})$. Poiché $\bar{z} \in (y \cdot x) \cdot a$, esiste un $\tilde{z} \in y \cdot x$ tale che $\bar{z} \in \tilde{z} \cdot a$. Ma $\theta_K(\bar{z}) = \theta_K(\tilde{z} \cdot a) = \tilde{z} \cdot \theta_K(a)$ (cfr. [2]), onde $z \in \tilde{z} \cdot \theta_K(a)$. Esiste dunque un elemento $\tilde{a} \in \theta_K(a)$, tale che $z \in \tilde{z} \cdot \tilde{a}$. Per definizione è allora $\tilde{a} \in [x, y] \subseteq K^{(1)}$ e ricordando che anche $a \in \theta_K(\tilde{a})$ (cfr. [2]), si ottiene $a \in K^{(1)}$, e quindi $a' \in \varphi_K(K^{(1)})$; $\varphi_K(K^{(1)})$ contiene perciò l'insieme dei commutatori di g_K, ed essendo una parte stabile di g_K, si ha $\varphi_K(K^{(1)}) \supseteq g_K^{(1)}$. Per provare che, inversamente, $g_K^{(1)} \supseteq \varphi_K(K^{(1)})$, basta accertare che $\overset{-1}{\varphi}_K(g_K^{(1)}) \in \mathcal{D}$, e $\overset{-1}{\varphi}_K(g_K^{(1)}) \supseteq A$. E' immediato che $B = \overset{-1}{\varphi}_K(g_K^{(1)})$ è una parte moltiplicativamente chiusa in K; essa è poi completa essendo $\theta_K(B) = \overset{-1}{\varphi}_K(\varphi_K(B)) = B$ (cfr. [2]). Se poi $\bar{a} \in A$ esistono due elementi $\bar{x}$, $\bar{y}$ di K tali che $\bar{a} \in [\bar{x}, \bar{y}]$ e quindi possono trovarsi un elemento $\bar{z} \in \bar{x} \cdot \bar{y}$ ed un elemento $\tilde{\bar{z}} \in \bar{y} \cdot \bar{x}$, tali che $\bar{z} \in \tilde{\bar{z}} \cdot \bar{a}$. Pertanto $\varphi_K(\bar{z}) = \varphi_K(\bar{x} \cdot \bar{y}) = \varphi_K(\bar{x}) \cdot \varphi_K(\bar{y})$, $\varphi_K(\tilde{\bar{z}}) = \varphi_K(\bar{y} \cdot \bar{x}) = \varphi_K(\bar{y}) \cdot \varphi_K(\bar{x})$, $\varphi_K(\bar{z}) = \varphi_K(\tilde{\bar{z}} \cdot \bar{a}) = \varphi_K(\tilde{\bar{z}}) \cdot \varphi_K(\bar{a})$, cioè $\varphi_K(\bar{x}) \cdot \varphi_K(\bar{y}) = (\varphi_K(\bar{y}) \cdot \varphi_K(\bar{x})) \cdot \varphi_K(\bar{a})$. Essendo dunque $\varphi_K(\bar{a}) \in g_K^{(1)}$, ne consegue che $\bar{a} \in \overset{-1}{\varphi}_K(g_K^{(1)})$, onde $\overset{-1}{\varphi}_K(g_K^{(1)}) \supseteq A$. Ciò completa la dimostrazione della 1.1.

Come corollario della 1.1, otteniamo la:

1.2. *$K^{(1)}$ è un sottomultigruppo (completo) riflessivo (cioè invariante e quindi fortemente invariante) di K.*

Dim. Da $\overset{-1}{\varphi}_K(g_K^{(1)}) = K^{(1)}$ risulta immediatamente che $K^{(1)}$ è sottomultigruppo (completo) di K. Le altre asserzioni seguono immediatamente dalla proposizione 23 di [2] pag. 188.

Osserviamo in particolare che se K è un gruppo, $K^{(1)}$ coincide con il derivato primo del gruppo stesso.

Ci proponiamo ora di generalizzare una nota proprietà del derivato di un gruppo. A tale scopo premettiamo la seguente proposizione:

1.3. *a) Se A^* è un complesso moltiplicativamente chiuso di K contenente $K^{(1)}$, allora A^* è riflessivo.*

b) Siano A^* un complesso completo di K ed $x \in A^* \cdot y$ $(x \in y \cdot A^*)$. Se $x \in b \cdot y$ $(x \in y \cdot b)$ si ha $b \in A^*$.

Dim: *a*) Sia $(x \cdot y) \cap A^* \neq \emptyset$; esiste un $z \in x \cdot y$ tale che $z \in A^*$. Fissato un elemento $z' \in y \cdot x$ si consideri un elemento $h \in K$ tale che $z' \in z \cdot h$. Poiché $h \in [y, x]$ e quindi $h \in A^*$, ne consegue $z' \in A^*$.

b) Se $x \in A^* \cdot y$, esiste un $a \in A^*$ tale che $x \in a \cdot y$; risulta dunque $\varphi_K(x) = \varphi_K(a) \cdot \varphi_K(y)$. D'altra parte $\varphi_K(x) = \varphi_K(b) \cdot \varphi_K(y)$, da cui $\varphi_K(a) = \varphi_K(b)$. Ma ciò implica che $b \in \theta_K(a) \subseteq A^*$. Analogamente si procede nell'altro caso.

Osserviamo che a norma della 1.2 e della proposizione 15 di [2] pag. 181, è $\mathcal{S}_{K^{(1)}} = {}_{K^{(1)}}\mathcal{S}$. Inoltre $\mathcal{S}_{K^{(1)}}$ è una relazione di equivalenza fortemente regolare in K, onde $K/\mathcal{S}_{K^{(1)}}$ (che denoteremo anche con $K/K^{(1)}$) è un gruppo.

Sussiste allora la:

1.4. *a*) *Se $\mathcal{R}$ è una equivalenza fortemente regolare in K ed il gruppo $K/\mathcal{R}$ è abeliano, allora $\mathcal{R}$ è meno fine di $\mathcal{S}_{K^{(1)}}$ ($= {}_{K^{(1)}}\mathcal{S}$).*

b) *Se $\mathcal{R}$ è una equivalenza regolare a destra (sinistra), meno fine di $\mathcal{S}_{K^{(1)}}$, $\mathcal{R}$ è fortemente regolare ed il gruppo $K/\mathcal{R}$ è abeliano.*

c) *Se $\mathcal{R}$ è una congruenza meno fine di $\mathcal{S}_{K^{(1)}}$, $K/\mathcal{R}$ è un multigruppo abeliano.*

DIM: *a*) In forza alla proposizione 15 di [2], esiste un sottomultigruppo completo e riflessivo K' di K tale che $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{K'} = {}_{K'}\mathcal{S}$. Verifichiamo che per ogni $x, y \in K$ è $[x, y] \subseteq K'$. Sia $a \in [x, y]$. Esistono allora due elementi $z \in x \cdot y$ e $\bar{z} \in y \cdot x$ tali che $z \in \bar{z} \cdot a$. Poiché $K/\mathcal{R}$ è abeliano, risulta $x \cdot y \,\overline{\overline{\mathcal{R}}}\, y \cdot x$, da cui, ricordando che $\mathcal{R} = \mathcal{S}_{K'}$, si ha $z \in \bar{z} \cdot K'$. La 1.3 assicura poi che $a \in K'$, onde K' contiene il commutatore generalizzato di due elementi qualsiasi di K; pertanto $K' \supseteq K^{(1)}$. La *a*) è allora immediata.

b) Poiché $\mathcal{R}$ è meno fine di $\mathcal{S}_{K^{(1)}}$, $\mathcal{R}$ è fortemente regolare a destra (la verifica è analoga a quella della proposizione 2 - (*b*) di [2] pag. 167); esiste allora un sottomultigruppo completo K' di K tale che $\mathcal{R} = {}_{K'}\mathcal{S}$ (cfr. proposizione 22 di [2] pag. 187); ma, come si verifica immediatamente, $K^{(1)}$ e K' sono due classi di equivalenza modulo $\mathcal{S}_{K^{(1)}}$ ($= {}_{K^{(1)}}\mathcal{S}$) ed ${}_{K'}\mathcal{S}$, rispettivamente, da cui, tenendo anche conto della 20 di [2], si trae $K^{(1)} \subseteq K'$. La proposizione 1.3 assicura allora che K' è riflessivo, il che comporta che $\mathcal{R} = {}_{K'}\mathcal{S} = \mathcal{S}_{K'}$ sia fortemente regolare in K. Verifichiamo infine che $x \cdot y \,\overline{\overline{\mathcal{R}}}\, y \cdot x$ per ogni $x, y \in K$; rimarrà allora stabilito che il gruppo $K/\mathcal{R}$ è abeliano. Infatti, se $z \in x \cdot y$ e $z' \in y \cdot x$, esiste un elemento $a \in K$ tale che $z \in z' \cdot a$; dunque $a \in [x, y] \subseteq K'$ e $z \mathcal{S}_{K'} z'$, da cui la tesi.

c) Immediata.

Come corollario di 1.4 otteniamo la:

1.5. *a) Se K' è un sottomultigruppo completo e riflessivo di K ed il gruppo K/K' è abeliano, allora $K' \supseteq K^{(1)}$.*

b) Se A^* è un complesso moltiplicativamente chiuso, reversibile a sinistra (destra) e tale che $A^* \supseteq K^{(1)}$, allora A^* è un sottomultigruppo completo e riflessivo e K/A^* è un gruppo abeliano.

DIM. *a*) Ovvia.

b) L'equivalenza ${}_{A^*}\mathcal{S}$ è regolare a destra (cfr. [2] pag. 170) e meno fine di ${}_{K^{(1)}}\mathcal{S} = \mathcal{S}_{K^{(1)}}$, onde ${}_{A^*}\mathcal{S}$ è fortemente regolare in K (cfr. 1.4.). Se f é l'omomorfismo canonico di K sul gruppo (abeliano) $K/_{A^*}\mathcal{S}$, si verifica facilmente che $\overset{-1}{f}(e) = A^*$, essendo e l'elemento neutro di $K/_{A^*}\mathcal{S}$. La proposizione 15 di [2] permette allora di concludere nel modo voluto.

Osserviamo che, in particolare, ogni sottomultigruppo completo K' di K, con $K' \supseteq K^{(1)}$, dà luogo ad un gruppo quoziente abeliano.

1.6. *a) Se K è abeliano si ha $K^{(1)} = U_K$* (1).

b) Se $K^{(1)} = U_K$ e, per ogni $x, y \in K$, $x \cdot y$ è una parte completa di K, allora K è abeliano.

DIM: *a*) Immediata.

b) Poiché $K^{(1)} = U_K$ si ha $x \cdot y \overset{=}{\varrho_K} y \cdot x$, ove ϱ_K è la più fine equivalenza fortemente regolare di K. Risulta allora $\theta_K(x \cdot y) = \theta_K(y \cdot x)$ da cui, per la supposta completezza di $x \cdot y$ ed $y \cdot x$, $x \cdot y = y \cdot x$.

2. Relazioni fra i derivati di due multigruppi K e K'.

Indichiamo con $\mathcal{M}$ la categoria dei multigruppi (cfr. [2]). È immediato verificare che gli epimorfismi di $\mathcal{M}$ coincidono con gli omomorfismi suriettivi di $\mathcal{M}$. Assegnamo in primo luogo una proprietà per gli epimorfismi quasi forti.

(1) Indichiamo con U_K il complesso unitivo ([2]) di K.

2.1. *Se f è un epimorfismo quasi forte in $\mathcal{M}(K, K')$ e se $f(z) \in f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \ldots \cdot f(x_n)$ $(n \geq 2)$ allora esistono n elementi $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n \in K$ tali che $f(x_i) = f(\tilde{x}_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ e $z \in \tilde{x}_1 \cdot \tilde{x}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{x}_n$.*

DIM: Si procede per induzione su n.
Sia ora f un omomorfismo di K in K'. Verifichiamo la:

2.2. *a*) $f(K^{(1)}) \subseteq K'^{(1)}$.

b) *Se f è un epimorfismo, allora $f(K^{(1)}) = K'^{(1)}$ se e solo se $f(K^{(1)})$ è una parte completa di K'.*

c) *Se f è un buon epimorfismo quasi forte, allora $f(K^{(1)}) = K'^{(1)}$.*
DIM: *a*) Sia Φ il funtore della categoria $\mathcal{M}$ nella categoria $\mathcal{G}$ dei gruppi, definito in [2]. Con le stesse notazioni di [2], avremo che $\varphi_{K'}(f(K^{(1)})) = \Phi f(\varphi_K(K^{(1)}))$. Ma, poiché $\varphi_K(K^{(1)}) = g_K^{(1)}$ (cfr. prop. 1.1), ed essendo Φf un omomorfismo del gruppo $g_K = \Phi K$ nel gruppo $g_{K'} = \Phi K'$, risulta $\Phi f(\varphi_K(K^{(1)})) \subseteq g_{K'}^{(1)}$. Pertanto $\varphi_{K'}(f(K^{(1)})) \subseteq g_{K'}^{(1)}$. Ricordando poi che $\overset{-1}{\varphi}_{K'}(g_{K'}^{(1)}) = K'^{(1)}$ si ottiene la *a*).

b) Se f è un epimorfismo, tale è anche Φf (cfr. [2]). Ne segue $\varphi_{K'}(f(K^{(1)})) = g_{K'}^{(1)}$, e da qui si deduce la *b*).

c) Verifichiamo che $f(K^{(1)})$ è parte completa di K'. Se $(a'_1 \cdot a'_2 \cdot \ldots \cdot a'_n) \cap f(K^{(1)}) \neq \emptyset$, esiste un x' tale che $x' \in f(K^{(1)})$, $x' \in (a'_1 \cdot a'_2 \cdot \ldots \cdot a'_n)$. Si possono allora trovare degli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ ed $x \in K^{(1)}$ tali che $f(a_i) = a'_i$ per $1 \leq i \leq n$ ed $f(x) = x'$. Poichè $f(x) \in f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot \ldots \cdot f(a_n)$, esistono a norma di 2.1, degli elementi $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n \in K$, tali che $f(a_i) = f(\tilde{a}_i)$ per $1 \leq i \leq n$ e $x \in \tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_n$. Ne risulta, essendo $K^{(1)}$ completo, che $(\tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_n) \subseteq K^{(1)}$, da cui $a'_1 \cdot a'_2 \cdot \ldots \cdot a'_n = f(\tilde{a}_1) \cdot f(\tilde{a}_2) \cdot \ldots \cdot f(\tilde{a}_n) = f(\tilde{a}_1 \cdot \tilde{a}_2 \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_n) \subseteq f(K^{(1)})$.
Dalla proprietà testè dimostrata discende immediatamente la:

2.3. *$K^{(1)}$ è ammissibile per ogni endomorfismo di K.*

3. Derivati successivi di K.

Per ogni intero $n \geq 2$ definiamo, per ricorrenza, *derivato n mo* $K^{(n)}$ di K, il derivato di $K^{(n-1)}$.

Convenendo di indicare con $K^{(0)}$ il multigruppo K stesso, si ottiene immediatamente la seguente 3.1:

3.1. *a) Per* $n \geq 1$, $K^{(n)}$ *è un sottomultigruppo di* K, *completo ed invariante in* $K^{(n-1)}$; *inoltre* $K^{(n-1)}/K^{(n)}$ *è un gruppo abeliano*;

b) $K^{(n)}$ *è ammissibile per ogni endomorfismo di* K.

Proviamo ora la:

3.2. *a) Per ogni* n *si ha* $\varphi_K(K^{(n)}) = g_K^{(n)}$ *ove* $g_K^{(n)}$ *è il derivato di ordine* n *di* g_K.

b) Se K *è piatto* (2), *si ha* $\overset{-1}{\varphi_K}(g_K^{(n)}) = K^{(n)}$, *per* $n \geq 1$.

DIM *a)* Per $n = 0$ la proprietà è vera. Sia dunque $n > 0$ e procediamo per induzione su n. Per ipotesi induttiva, la restrizione $\tilde{\varphi}_K$ di φ_K a $K^{(n-1)}$ è un epimorfismo di $K^{(n-1)}$ su $g_K^{(n-1)}$. Il funtore Φ di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{G}$ muta allora $\tilde{\varphi}_K$ nell'epimorfismo $\Phi\tilde{\varphi}_K$ di $g_{K^{(n-1)}} = \Phi K^{(n-1)}$ su $g_K^{(n-1)} = \Phi g_K^{(n-1)}$; inoltre $\tilde{\varphi}_K = \Phi\tilde{\varphi}_K \circ \varphi_{K^{(n-1)}}$ (3) Ma, per la 1.1, risulta $\varphi_{K^{(n-1)}}(K^{(n)}) = g^{(1)}_{K^{(n-1)}}$, poiché $K^{(n)}$ è il derivato primo di $K^{(n-1)}$. Essendo $\Phi\tilde{\varphi}_K$ un epimorfismo sarà dunque $\Phi\tilde{\varphi}_K(g^{(1)}_{K^{(n-1)}}) = g_K^{(n)}$, onde la *a)*.

b) Basta dimostrare che, per ogni n, $K^{(n)}$ è un complesso completo in K. Allo scopo osserviamo che $U_{K^{(n)}} = U_K$: tale relazione è senz'altro vera per $n = 1$, essendo $K^{(1)}$ completo in K e K piatto (cfr. prop. 20 di [2] pag. 187); procedendo per induzione su n e ricordando la 3.1, si passa al caso generale. Dalla relazione dimostrata e dalla proposizione 20 di [2], segue l'asserto.

4. Multigruppi risolubili.

Diremo che un multigruppo K è *risolubile*, se esiste un intero $n \geq 0$ tale $K^{(n)} = U_K$.

4.1. *a) Se* K *è risolubile,* g_K *è risolubile*;

b) Se K *è piatto,* K *è risolubile se e solo se è tale* g_K.

(2) Cfr. [2].

(3) Ove, al solito, $g_{K^{(n-1)}}$ è il gruppo quoziente di $K^{(n-1)}$ rispetto alla più fine equivalenza fortemente regolare di $K^{(n-1)}$ e $\varphi_{K^{(n-1)}}$ è l'omomorfismo canonico di $K^{(n-1)}$ su $g_{K^{(n-1)}}$.

DIM: Immediata ricordando la definizione di U_K e la 3.2.

Diremo *catena principale* di K, ogni sua catena $K = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \ldots \ldots \supseteq K_n = U_K$ (4) tale che K_i sia invariante in K.

4.2. *a) Se K è risolubile, esiste una catena principale di K a quozienti tutti abeliani* (4).

b) Se K è piatto, K è risolubile se e solo se esiste una catena principale di K a quozienti tutti abeliani.

DIM: *a*) Se n è il minimo intero ≥ 0 per cui $K^{(n)} = U_K$, i sottomultigruppi $K^{(i)}$, con $0 \leq i \leq n$, sono completi anche in K (cfr. prop. 20 di [2]). Le proposizioni 3.1, 3.2, e 23 di [2], portano allora immediatamente alla tesi.

b) Esista in K una catena principale a quozienti abeliani. A norma della proposizione 23 di [2] e del lemma di [2] pag. 190, ad ogni tale catena si può associare una catena principale di g_K pure a quozienti abeliani, onde g_K è risolubile. Dalla 4.1, si trae allora la risolubilità di K.

Il viceversa è vero in virtù della *a*).

Sia ora f un epimorfismo del multigruppo K sul multigruppo K'. Sussiste la:

4.3. *a) Se K è risolubile e K' è piatto, anche K' è risolubile.*
b) Se K è risolubile ed f è buono e quasi forte, K' è risolubile.

DIM: *a*) Immediata, applicando il funtore Φ di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{G}$ e ricordando la 4.1.

b) Sia $K^{(n)} = U_K$. Per $0 \leq i \leq n$, $K^{(i)}$ è dunque completo in K, onde, ragionando come in 2.2-*c*), si riconosce che $f(K^{(i)})$ è un complesso completo in K'. Applicando allora reiteratamente la 2.2-*b*), si verifica facilmente che $f(K^{(i)}) = K'^{(i)}$ per $0 \leq i \leq n$. Poichè $f(U_K) = U_{K'}$, essendo $f(U_K)$ un complesso completo in K', si conclude che $K'^{(n)} = U_{K'}$, onde la tesi.

Sia ora $\mathcal{R}$ una congruenza di K del tipo ${}_{K'}\mathcal{S}$ ove K' è un complesso di K verificante le condizioni di cui alla proposizione 6 di [2] pag. 171 (in particolare K' può essere un sottomultigruppo reversibile a sinistra tale che $x \cdot K' \subseteq K' \cdot x$ per ogni $x \in K$). Sussiste allora la:

(4) Cfr. [2] pag. 189. Se $K = K_0 = U_K$, converremo naturalmente di considerare $\mathcal{C} = \{K_0\}$ come catena invariante, principale e ad unico quoziente K/K.

4.4. *Se K è risolubile, anche il multigruppo $K/_{K'}\mathcal{S}$ è risolubile.*

DIM: Immediata, tenendo conto di 4.3 e della proposizione 6 di [2] pag. 171.

Circa la risolubilità di un sottomultigruppo K' di un multigruppo risolubile K, sussiste la seguente proposizione:

4.5. *Se K è piatto e K' è unitario, allora K' è risolubile.*

DIM: Siano φ_K l'omomorfismo canonico di K su g_K e $\tilde{\varphi}_K$ la restrizione di φ_K a K'. A norma della proposizione 17 di [2] pag. 183, si verifica facilmente che il funtore Φ muta $\tilde{\varphi}_K$ in un monomorfismo, $\Phi\tilde{\varphi}_K$, di $\Phi K' = g_{K'}$ in $\Phi g_K = g_K$. Ma, poichè K è risolubile, anche g_K è risolubile (cfr. 4.1); ciò implica la risolubilità di $g_{K'}$, ed osservando che pure K' è piatto, si giunge al risultato voluto.

Assegnamo infine una proposizione sulla risolubilità dei multigruppi finiti.

4.6. *a) Se K è finito e risolubile, esiste una catena invariante massimale di K i cui quozienti sono gruppi ciclici di ordine primo;*

b) Se K è piatto, finito e dotato di una catena invariante massimale i cui quozienti sono gruppi ciclici di ordine primo, allora K è risolubile.

DIM: *a*) g_K è finito e risolubile; esiste pertanto una catena di g_K del tipo predetto. Si verifica allora che, posto $K_i = \overset{-1}{\varphi}_K(g_i)$ con g_i elemento generico della catena di g_K, si ottiene una catena invariante di K. Il lemma in [2] pag. 190, permette allora di concludere.

b) Immediata, per quanto fin qui ottenuto.

BIBLIOGRAFIA

[1] DUBREIL PAUL - *Algèbre.* Troisième édition. Gauthier - Villars. Paris 1963.

[2] KOSKAS MAURICE - *Grupoïdes, demi-hypergroupes et hypergroupes.* J. Math. pures et appl., 49 - 1970.