I PIANI DI PIERCE (*)

di FEDERICO BARTOLOZZI (a Palermo) (**)

SOMMARIO. - *Si introduce la nozione di* M-P-*piano e si caratterizzano gli* M-P-*piani in quanto piani ottenibili da piani affini ordinati desarguesiani mediante una costruzione di* "tipo Moulton".

SUMMARY. - *The notion of* M-P-*planes is investigated. The main result: they are characterized by the fact that they can be obtained from ordered affine desarguesian planes by means of a suitable construction of* "Moulton type".

Introduzione.

W. A. PIERCE, generalizzando i piani costruiti da F. R. MOULTON [5] (1), ha definito, in [7], una classe di piani affini sopra sistemi cartesiani, ciascuno dei quali si ottiene da un *campo semiordinato* e da una opportuna funzione f nel modo seguente: il gruppo additivo sostegno del sistema cartesiano coincide con il gruppo additivo sostegno del campo F, mentre la moltiplicazione «$\circ$» del sistema cartesiano è individuata dalla moltiplicazione del campo F ponendo $a \circ b = f(a)\, b$ se $b < 0$ e $a \circ b = ab$ se $0 \leq b$, quando $a, b \in F$.

In questa Nota caratterizziamo, algebricamente e geometricamente, i piani costruiti da W. A. PIERCE, se desunti da un *campo ordinato* F; più precisamente, generalizziamo la costruzione di PIERCE ad un corpo ordinato K e caratterizziamo la classe di piani affini

(*) Pervenuto in Redazione l'11 dicembre 1972.

Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: via Brigata Verona 13, 90144 Palermo.

(1) I numeri in [ ] rimandano alla bibliografia in fine.

che così si ottiene. A tal fine, appaiono essenziali, dal nostro punto di vista, il concetto di (P, r)-*semitransitività* di un piano affine ordinato [2], dovuto a J. ANDRÉ ([1] e [2]), e quello di *omologia relativa* a un insieme di rette di un piano affine, da noi introdotto in [3].

I risultati conseguiti si possono così riassumere: definita una classe $\{\pi\}$ di piani affini, costituita da tutti e soli i piani ordinati che hanno convenienti insiemi di omologie relative, dimostriamo che π appartiene a tale classe se e solo se possiede un sistema di coordinate che è un M-P-sistema (secondo la definizione 4 del n. 2). Inoltre, ispirandoci ai metodi introdotti da L. PROFERA [8], proviamo che tutti e soli gli M-P-sistemi si ottengono da corpi ordinati e da opportune funzioni mediante una costruzione analoga a quella definita da W. A. PIERCE a partire da campi semiordinati. In conclusione, la classe $\{\pi\}$ risulterà costituita da tutti e soli i piani che si desumono da un piano desarguesiano ordinato con una costruzione di «tipo Pierce»; anzi, un suo elemento risulterà duale di un piano di PIERCE se, e solo se, quel piano desarguesiano ordinato verifica la condizione di Pappo.

1. Richiami e notazioni.

Allo scopo di rendere autonoma la presente esposizione, e per fissare le notazioni di cui usufruiremo costantemente, ricordiamo alcuni risultati [3].

Sia $\pi = \pi(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ un piano affine, $\mathbb{P}$ l'insieme dei suoi punti e $\mathbb{R}$ l'insieme delle sue rette [4]. Se $P, Q \in \mathbb{P}$, $P \neq Q$, indichiamo con $P + Q$ la retta per P e per Q; inoltre, se $P \in \mathbb{P}$ e se D è una direzione di π, denotiamo con $P + D$ la retta di direzione D contenente P. Se $O, E \in \mathbb{P}$ e se U, V sono direzioni distinte di π tali che $E \notin O + U$, $E \notin O + V$, la quaterna (O, E, U, V) è un *riferimento* (affine) di π.

Siano r una retta, D una direzione, ϱ un sottoinsieme dell'insieme delle rette del piano π. Un'applicazione bigettiva $t: \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ è una ϱ-*omologia* (o *omologia relativa a* ϱ) di centro D e asse r se sono verificate le seguenti condizioni:

(2) P è un punto, r una retta del piano affine ordinato e $P \notin r$.

(3) Per ulteriori informazioni rimandiamo a G. PICKERT [6].

(4) Riguarderemo sempre le rette come insiemi di punti.

(a) $t(P) = P$ se P è un punto di r,

(b) $t(P) \in P + D$ se $P \in \mathbb{P}$,

(c) se $P, Q \in \mathbb{P}$, $P \neq Q$, $P + Q \in \varrho$, è $P + Q \parallel t(P) + t(Q)$ quando $P + Q \parallel r$, mentre se $P + Q \nparallel r$, detto X il punto comune alle rette $P + Q$ e r, si ha $X \in t(P) + t(Q)$ (5).

Ovviamente, le usuali omologie di centro D e asse r sono le $\mathbb{R}$-omologie di centro D e asse r.

Indicata, ancora, con D una direzione del piano affine π, si dice che π è un *C-piano* di direzione D se il gruppo T_D delle traslazioni di π di direzione D è transitivo sui punti di una (e, quindi, di ogni) retta di direzione D.

E' noto che i C-piani sono piani affini che hanno tra i loro sistemi di coordinate un sistema cartesiano [6]; per completezza, riassumiamo brevemente tale risultato. Sia $C(+, \circ)$ un sistema cartesiano (6) e si assuma $\mathbb{P} = C \times C$ come insieme dei punti, $\mathbb{R} = \{[m, b], [c] \mid m, b, c \in C\}$, ove $[m, b] = \{(x, y) \in \mathbb{P} \mid y = m \circ x + b\}$ e $[c] = \{(x, y) \in \mathbb{P} \mid x = c\}$, come insieme delle rette. Così si ottiene un piano affine che ha come sistema di coordinate $C(+, \circ)$ nel riferimento (affine) (O, E, U, V) con $O = (0, 0)$, $E = (1, 1)$, U è la direzione della retta $[0, 0]$ e V è la direzione della retta $[0]$. Tale piano è un C-piano di direzione V; in esso due rette sono parallele se e solo se risultano entrambi del tipo $[c]$ oppure sono del tipo $[m, b], [m', b']$ con $m = m'$. Viceversa, un C-piano di direzione D ha come sistema di coordinate in un riferimento affine (O, E, U, V) con $V = D$ un sistema cartesiano. Il gruppo T_V delle traslazioni di direzione V è costituito dalle applicazioni $h_c : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$, $c \in C$, ove $h_c(x, y) = (x, y + c)$ se $(x, y) \in \mathbb{P}$.

Un C-piano π è *ordinato* se e solo se è ordinato un (e, quindi, ogni) sistema cartesiano che lo coordinatizza (7) (cfr. G. PICKERT [6]; p. 221 e segg.).

(5) $\parallel$ si legge «parallela a». Se R è la direzione di r e se $r' = r \cup \{R\}$, le ϱ-omologie di centro D e asse r si ottengono restringendo a π le $\{D, r'; \varrho\}$-omologie del piano proiettivo ottenuto dal piano affine π (cfr. [3]).

(6) Un *sistema cartesiano* $C(+, \circ)$ è un insieme C con due operazioni binarie, addizione $+$ e moltiplicazione $\circ$, che verifica le seguenti condizioni: 1) C è un gruppo rispetto all'addizione (di elemento neutro 0), 2) $0 \circ a = a \circ 0 = 0$ se $a \in C$, 3) esiste $1 \in C$, $1 \neq 0$, tale che $1 \circ a = a \circ 1 = a$ se $a \in C$, 4) se $a, b, c \in C$ e $a \neq b$ esiste uno e un sol $x \in C$ ($y \in C$) tale che $-a \circ x + b \circ x = c$ ($y \circ a - y \circ b = c$).

(7) Il sistema cartesiano $C(+, \circ)$ si dice *ordinato* rispetto all'ordinamento $<$ del suo insieme sostegno C se: 1) $C(+)$ è un gruppo ordinato rispetto a $<$, 2) se $a, b, c, d \in C$ e $a < b$, $c < d$ risulta $a \circ d - a \circ c < b \circ d - b \circ c$.

Se il piano π è ordinato e se D è una sua direzione distinta dalla direzione di una retta r, il gruppo $L_{D,r}$ delle omologie di centro D e asse r è *semitransitivo sopra i punti di una* (e, quindi, di ogni) *retta s di direzione D*, o, in breve, *semitransitivo* se $L_{D,r}$ è transitivo sui punti, distinti dal punto P comune alle rette r ed s, di ciascuna delle due semirette in cui s è divisa da P (cfr. J. ANDRÉ, [1]; definizione 2.1).

2. Omologie strettamente relative. M-P piani e M-P sistemi.

Introdotti gli M-P-piani e gli M-P-sistemi, proveremo che gli M-P-piani sono tutti e soli i piani affini ordinati che ammettono come sistema di coordinate un M-P-sistema. A tale scopo, siano $\pi = \pi(\mathbb{P}, \mathbb{R})$ un piano affine, r una sua retta, D una sua direzione e ϱ un sottoinsieme di $\mathbb{R}$; con tali dati, nelle seguenti definizioni 1 e 2, specializziamo il concetto di omologia relativa a ϱ e quello di transitività dell'insieme delle ϱ-omologie di direzione D e asse r.

DEFINIZIONE 1. Se t è una ϱ-omologia di centro D e asse r, si dice che t è una *omologia strettamente relativa a ϱ*, con centro D e asse r, se t verifica la condizione:

$$\text{(d)} \qquad P, Q \in \mathbb{P},\ P \neq Q,\ P + Q \in \varrho \ \text{ implicano } t(P) + t(Q) \in \varrho.$$

Indicato con $L_{\varrho,D,r}$ l'insieme delle omologie strettamente relative a ϱ, con dato centro D e dato asse r, si verifica subito che $L_{\varrho,D,r}$ è un monoide con identità, rispetto al prodotto di trasformazioni: perciò, basta osservare che l'insieme $L_{\varrho,D,r}$ è chiuso rispetto al prodotto di trasformazioni, in quanto ogni suo elemento stabilizza ϱ, nel senso che porta rette di ϱ in rette ancora appartenenti a ϱ.

DEFINIZIONE 2. Se U, V sono direzioni distinte del piano π, se O è un punto di π, il monoide $L_{\varrho,V,O+V}$ si dice *U-ordinatamente transitivo* se, considerati due punti P, Q di π non appartenenti alla retta $O + V$, esiste $t \in L_{\varrho,V,O+V}$ tale che $t(P) = Q$, non appena $P \in Q + V$ e $P' + Q \in \varrho$ essendo $P' = (P + U) \cap (O + V)$.

Per il seguito, è opportuno fissare alcune notazioni che compendiamo nella seguente

Ipotesi (α): Siano U, V direzioni distinte di un piano affine ordinato $\pi = \pi(\mathbb{P}, \mathbb{R})$. I punti U e V del piano proiettivo ordinato desunto dal piano affine ordinato π individuano due segmenti proiettivi; fissato uno di essi, estremi inclusi, sia ϱ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito da tutte e sole le rette del piano affine π la cui direzione appartiene al segmento fissato. Inoltre, siano $O, E \in \mathbb{P}$ tali che (O, E, U, V) risulti un riferimento (affine) di π e si abbia $O + E \in \varrho$.

Con tali dati, poniamo le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 3. Nell'ipotesi (α), il piano affine ordinato π si dice un *M-P-piano* rispetto alla terna (O, U, V) se:

1) il gruppo T_V delle traslazioni di direzione V è transitivo,

2) il gruppo $L_{V, O+U}$ delle omologie aventi centro V e asse $O + U$ è semitransitivo,

3) il monoide $L_{\varrho, V, O+V}$ delle omologie strettamente relative a ϱ, di centro V e asse $O + V$, è U-ordinatamente transitivo.

Chiameremo M-P-piano un piano affine ordinato che risulti M-P-piano rispetto a qualche terna (O, U, V).

DEFINIZIONE 4. Un sistema cartesiano $C(+, \circ)$, ordinato rispetto a $<$, si dice un *M-P-sistema* se:

I) $a \circ (b + c) = a \circ b + a \circ c$, $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ se $a, b, c \in C$ e $0 \leq a$,

II) $(b + c) \circ a = b \circ a + c \circ a$ se $a, b, c \in C$ e $0 \leq b, c$.

LEMMA 1. *Se $C\ (+, \circ)$ è un M-P-sistema, risulta:*

(1) $a \circ (-b) = -(a \circ b)$ *se* $a,\ b \in C$ *e* $0 \leq a$;

(2) *il gruppo* $C(+)$ *è abeliano*;

(3) *l'insieme* $P = \{a \in C \mid 0 < a\}$ *è gruppo moltiplicativo* $P(\circ)$.

Dimostrazione. Per provare (1) è sufficiente notare che se $a, b \in C$ e $0 \leq a$, si ha $0 = a \circ (b + (-b)) = a \circ b + a \circ (-b)$. Inoltre, risulta $(a + 1) \circ (b + 1) = (a + 1) \circ b + (a + 1) \circ 1 = a \circ b + b + a + 1$ e $(a + 1) \circ (b + 1) = a \circ (b + 1) + 1 \circ (b + 1) = a \circ b + a + b + 1$, ossia $a + b = b + a$; da ciò discende (2). La (3) è evidente.

I due lemmi che seguono, il primo dei quali è dovuto a J. ANDRÉ, ci consentiranno di caratterizzare gli M-P-piani come i piani affini ordinati un cui sistema di coordinate è un *M-P-sistema*.

LEMMA 2. *Siano π un C-piano di direzione D, $C(+, \circ)$ il sistema cartesiano delle sue coordinate nel riferimento (affine) (O, E, U, V) con $V = D$ e $L_{V, O+U}$ il gruppo delle sue omologie di centro V e* *asse* $O+U$. *Dati i punti* $(0,1)$ *e* $(0,c)$, $c \in C$ *e* $c \neq 0$, *l'omologia* h *di centro* V *e asse* $O+U$ *tale che* $h(0,1)=(0,c)$ *esiste se e solo se* $c\circ(a+b)=c\circ a+c\circ b$ *e* $c\circ(a\circ b)=(c\circ a)\circ b$ *quando* $a,b \in C$. *Ne deriva che se* π *è piano affine ordinato (quindi,* $C(+,\circ)$ *sistema cartesiano ordinato) il gruppo* $L_{V,O+U}$ *è semitransitivo se e solo se* $c\circ(a+b)=c\circ a+c\circ b$, $c\circ(a\circ b)=(c\circ a)\circ b$ *quando* $a,b,c \in C$ *e risulta* $0 \leq c$.

Dimostrazione. Cfr. J. ANDRÉ ([1], teorema 1.2).

LEMMA 3. *Nell'ipotesi* (α), *se* π *è un* C*-piano di direzione* V, *siano* $C(+,\circ)$ *il sistema cartesiano ordinato delle coordinate di* π *nel riferimento* (O,E,U,V) *e* $L_{\varrho,V,O+V}$ *il monoide delle omologie strettamente relative a* ϱ, *di centro* V *e asse* $O+V$. *Dati i punti* $(1,0)$ *e* $(1,c)$, $c \in C$, *esiste* $t \in L_{\varrho,V,O+V}$ *tale che* $t(1,0)=(1,c)$ *se e solo se risulta* $0 \leq c$ *e* $(c+b)\circ a=c\circ a+b\circ a$ *quando* $a,b \in C$ *e* $0 \leq b$. *Se* t *esiste, essa è unica e si ha* $t(x,y)=(x,c\circ x+y)$, $x,y \in C$. *Pertanto, il monoide* $L_{\varrho,V,O+V}$ *è* U*-ordinatamente transitivo se e solo se* $(b+c)\circ a=b\circ a+c\circ a$ *quando* $a,b,c \in C$ *e* $0 \leq b,c$.

Dimostrazione. Poiché $O+E=[1,0]$, $O+V=[0]$, $O+U=[0,0]$, risulta $\varrho=\{[m,b],[c] \mid m,b,c \in C \text{ e } 0 \leq m\}$. Osservato ciò, sia $t \in L_{\varrho,V,O+V}$ tale che $t(1,0)=(1,c)$. Per definizione, ogni punto della retta $O+V$ è fissato da t; quindi, deve essere $t(0,y)=(0,y)$ e $t(x,y)=(f(x,y),g(x,y))$ per ogni scelta di x e y in C, essendo $f,g: C\times C \to C\times C$ funzioni opportune. Poiché, sempre per definizione, $t(x,y) \in (x,y)+V$ si ha $f(x,y)=x$. Si consideri la retta $[0,y]$, $y \in C$, del piano π; i punti di tale retta si devono trasformare, mediante la t, nei punti di una retta che deve appartenere a ϱ e contenere il punto $(0,y)$ e che, quindi, deve essere del tipo $[h(y),y]$ con h definita da t e a valori nell'insieme degli elementi non negativi di C. Ne consegue, $g(x,y)=h(y)\circ x+y$ e, in definitiva, $t(x,y)=(x,h(y)\circ x+y)$ se $x,y \in C$. Essendo t applicazione bigettiva e poiché $[0,y]$, $[0,y']$ sono rette di ϱ (se $y,y' \in C$) deve essere $[h(y),y] \parallel [h(y'),y']$: ciò significa che h è funzione costante. In particolare, deve risultare $g(1,0)=h(0)\circ 1=c$, con c elemento non negativo di C poiché h è a valori non negativi; quindi, $g(x,y)= =c\circ x+y$ e, in definitiva, $t(x,y)=(x,c\circ x+y)$ se $x,y \in C$. Ma, ancora, $[m,b] \in \varrho$, ossia $0 \leq m$, e $(x,m\circ x+b) \in [m,b]$ se $x \in C$ comportano l'appartenenza dei punti $(x,c\circ x+m\circ x+b)$, $x \in C$, ad una retta di ϱ che deve essere del tipo $[m',b]$.

Ne deriva, $c\circ x+m\circ x+b=m'\circ x+b$ che, per $x=1$, fornisce $m'=c+m$ e, quindi, risulta $c\circ x+m\circ x=(c+m)\circ x$ se $m,x \in C$

e $0 \leq m$. Si è così provato che l'esistenza di $t \in L_{\varrho, V, O+V}$ per cui si abbia $t(1, 0) = (1, c)$ comporta che deve essere $0 \leq c$ e $(c + m) \circ x = c \circ x + m \circ x$ se $x, m \in c$ e $0 \leq m$; inoltre, se t esiste risulta unica, perché deve agire sui punti di π al seguente modo: $t(x, y) = (x, c \circ x + y)$, $x, y \in C$.

Una verifica diretta, permette, ormai, di provare che le condizioni necessarie (ossia: $0 \leq c$, $c \circ x + m \circ x = (c + m) \circ x$ se $m, x \in C$ e $0 \leq m$) che si sono stabilite per l'esistenza dell'omologia t, strettamente relativa a ϱ, avente centro V e asse $O + V$ e che trasforma il punto $(1, 0)$ nel punto $(1, c)$ risultano anche sufficienti.

Per dimostrare compiutamente il lemma, rimane da stabilire che il monoide $L_{\varrho, V, O+V}$ è U-ordinatamente transitivo se e solo se quelle condizioni sono soddisfatte per ogni scelta di c, $c \in C$ e $0 \leq c$. Perciò, siano $P = (a, b)$ e $Q = (a, b')$ $(a, b, b' \in C$ e $a \neq 0)$ due qualunque punti di π allineati con V e non appartenenti alla retta $O + V$. Si esiga, inoltre, che $P' + Q \in \varrho$ se $P' = (P + U) \cap (O + V)$: tale pretesa equivale ad assumere $P' = (0, b)$ e a richiedere che se $(a, b') \in [m, b]$ deve essere $0 \leq m$, ossia $b' = m \circ a + b$ deve comportare $0 \leq m$. Con ciò, possiamo concludere; infatti, ponendo $t(x, y) = (x, c \circ x + y)$ si ha un elemento di $L_{\varrho, V, O+V}$ se e solo se sono verificate le condizioni già messe in evidenza e se ciò accade per l'elemento t di $L_{\varrho, V, O+V}$ definito ponendo $t(x, y) = (x, m \circ x + y)$ risulta $t(P) = Q$ (m è soluzione dell'equazione $b' = m \circ a + b$, quindi $0 \leq m$).

Dai lemmi 2 e 3 discende il

TEOREMA 1. *Nell'ipotesi* (α), *se* π *è un* M-P-*piano rispetto alla terna* (O, U, V) *il sistema cartesiano ordinato che fornisce coordinate a* π *nel riferimento* (O, E, U, V) *è un* M-P-*sistema.*

Viceversa, il piano sopra un sistema cartesiano ordinato che sia un M-P-*sistema è un* M-P-*piano rispetto alla terna* (O, U, V), *ove si assuma* $O = (0, 0)$, U *direzione della retta* $[0, 0]$, V *direzione della retta* $[0]$.

In breve, gli M-P-*piani sono tutti e soli i piani affini ordinati che posseggono come sistema di coordinate un* M-P-*sistema.*

3. M-P-sistemi e corpi ordinati.

Iniziamo con l'osservare che se $C(+, \circ)$ è un sistema cartesiano esiste uno e un solo $x \in C$ tale che $-((-1) \circ x) + 0 \circ x = z$, per ogni z fissato in C. Pertanto, se si pone, per ogni $z \in C$, $g(z) = x$

quando $z = -((-1)\circ x)$, si definisce un' applicazione $g : C \to C$ che è bigettiva.

Premesso ciò, siano $C(+,\circ)$ un $M\cdot P$-sistema e $g : C \to C$ l'applicazione bigettiva definita ponendo $g(y) = x$ se $y = -((-1)\circ x)$. Sia, infine, $C(+,\cdot)$ la struttura algebrica che si ottiene da $C(+,\circ)$ mediante g al seguente modo:

il gruppo additivo sostegno $C(+)$ di $C(+,\cdot)$ è il gruppo additivo sostegno $C(+)$ di $C(+,\circ)$,

la moltiplicazione di $C(+,\cdot)$ [8] è definita da

$$ab = \begin{cases} a\circ b & \text{se } 0 \leq a \\ a_\circ g(b) & \text{se } a < 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Sussiste il

TEOREMA 2. *La struttura algebrica $C(+,\cdot)$ ottenuta da un M-P-sistema $C(+,\circ)$ e dall'applicazione g, mediante* (3.1), *è un corpo; tale corpo risulta ordinato dall'ordinamento che compete al gruppo additivo sostegno del sistema cartesiano ordinato $C(+,\circ)$.*

Dimostrazione. Osserviamo subito che se $C(+,\cdot)$ è un corpo, poiché si ha $0 < a\circ b = ab$ se $0 < a, b$, esso è corpo ordinato rispetto all'ordinamento che compete al suo gruppo additivo in quanto coincidente con il gruppo additivo sostegno dello M-P-sistema $C(+,\circ)$. Notiamo anche che $0 < g(x)$ se e solo se $0 < x$, $x \in C$, e, quindi, $0 < ab$ se e solo se $0 < a, b$ oppure $a, b < 0$, se $a, b \in C$. Con tali premesse, stabiliremo la tesi del teorema mediante le seguenti verifiche (1) — (6):

(1) Se $a, b, c \in C$ e $0 \leq a$ risulta $(ab)c = a(bc)$. Infatti, se b, c sono entrambi negativi è $(ab)c = (ab)\circ g(c) = (a\circ b)\circ g(c) = a\circ(b\circ g(c)) = a\circ(bc) = a(bc)$; analogamente, se $b < 0$, $0 \leq c$ si ha $(ab)c = (a\circ b)c = (a\circ b)\circ g(c) = a\circ(b\circ g(c)) = a(b\circ g(c)) = a(bc)$. Se, infine, $0 \leq b$, qualunque sia c, è $(ab)c = (a\circ b)c = (a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c) = a(bc)$.

(2) Se $a, b \in C$ risulta $(-a)b = a(-b) = -ab$. Proviamo, anzitutto, che $(-a)b = -ab$. Tale uguaglianza è ovvia se $a = 0$ oppure $b = 0$. Se $0 \leq a$, per il lemma 1 e per (1), posto $g(b) = c$, ossia $b = -((-1)\circ c)$, risulta $(-a)b = (-a)\circ g(b) = (-a)\circ c = (a\circ(-1))\circ$

[8] Scriveremo ab in luogo di $a\cdot b$ se $a, b \in C$.

$\circ c = a \circ ((-1) \circ c) = -\{a \circ [-((-1) \circ c)]\} = -a \circ b = -ab$. Se $a < 0$, sempre per il lemma 1 e per (1), con la solita posizione $g(b) = c$, si ha $(-a) b = (-a) \circ b = (-a) \circ [-((-1) \circ c)] = -\{(-a) \circ (-1)] \circ c\}$ $= -(a \circ c) = -(a \circ g(b)) = -ab$. Pertanto, in ogni caso, si ha $(-a) b = -ab$. Per provare, infine, che $a(-b) = -ab$ si osservi, intanto, che tale uguaglianza, ovvia se $a = 0$ oppure $b = 0$, sussiste se $0 \leq a$ poiché, per il lemma 1, è in tal caso $-ab = -a \circ b = a \circ$ $\circ (-b) = a(-b)$. Sia, quindi, $a < 0$; per l'osservazione ora fatta e per quanto già provato risulta $a(-b) = -[(-a)(-b)] = (-a) b = -ab$ e ciò conclude la prova di (2).

(3) Da (1) e (2) si deduce la legge associativa per la moltiplicazione ottenuta, con la (3.1), dalla moltiplicazione del sistema cartesiano $C(+, \circ)$: se $a, b, c \in C$ risulta $(ab) c = a(bc)$. Infatti, per (1) e (2), è sufficiente osservare che se $a < 0$ e, quindi, $0 < -a$ si ha $-((ab) c) = (-ab) c = ((-a) b) c = (-a)(bc) = -(a(bc))$ e passare agli opposti.

(4) Se $a \in C$ è $1a = a$, poiché $0 < 1$.

(5) Se $a \in C$ e $a \neq 0$ esiste $a' \in C$ tale che $a' a = 1$. Per provarlo, è sufficiente notare che se $0 < a$ esiste $a' \in C$, $0 < a'$, tale che $a' a = a' \circ a = 1$, mentre se $a < 0$ esiste $a' \in C$, $a' < 0$, tale che $a' a = a' \circ g(a) = 1$.

(6) Se $a, b, c \in C$ risulta $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c) a = ba + ca$. Se $0 \leq a$ la prima uguaglianza è evidente per definizione di M-P-sistema. Se $a < 0$, quindi $0 < -a$, per (2) e per la commutatività dell'addizione si ha $-(a(b + c)) = (-a)(b + c) = (-a) b +$ $+ (-a) c = -ab + (-ac) = -(ac + ab) = -(ab + ac)$ e passando agli opposti si prova la prima uguaglianza in ogni caso. Dimostriamo, ora, che $(b + c) a = ba + ca$, osservando subito che se $0 \leq b, c$ tale uguaglianza deriva immediatamente dalla definizione di M-P-sistema e dalla (3.1). Sia, quindi, $0 \leq b$, $c < 0$ e risulti, inoltre, $0 \leq b + c$. Per la (2) e per quanto or ora osservato si ha $ba = ((b + c) + (-c)) a = (b + c) a + (-c) a = (b + c) a - ca$, ossia l'asserto. Se, invece, $0 \leq b$, $c < 0$ e $b + c < 0$, ancora per (2) e per quanto già provato è $-ca = (-(b + c) + b) a = (-(b + c)) a + ba$, cioè $-((b + c) a) = -ca + (-ba) = -(ba + ca)$ e si conclude passando agli opposti. Se, infine, b e c sono entrambi negativi, risulta $-((b + c) a) = (-(b + c)) a = ((-b) + (-c)) a = (-b) a + (-c) a =$ $= -ba + (-ca) = -(ba + ca)$, e, passando agli opposti, la tesi.

Il teorema 2 è, così, dimostrato.

Si osservi che l'applicazione $f = g^{-1}$, inversa di g, associa ad ogni $x \in C$ l'elemento $f(x) = -((-1) \circ x)$ di C e risulta

$$x \circ y = \begin{cases} xf(y) & \text{se } x < 0 \\ xy & \text{se } 0 \leq x. \end{cases} \tag{3.2}$$

L'applicazione $f: C \to C$ è manifestamente bigettiva e risulta $f(0) = 0$, $f(1)=1$. Inoltre, se $x, y \in C$ e $x < y$ si ha $-((-1)\circ x) < +$ $-((-1)\circ y)$, pertanto f è crescente. Infine, se $a, b, c \in C$, $a < 0$, $0 \leq b$, esiste uno e un solo $x \in C$ tale che $-a \circ x + b \circ x = -c$, ossia $af(x) = bx + c$.

Viceversa, siano $K(+,\cdot)$ un corpo ordinato e $f: K \to K$ una funzione bigettiva, crescente, tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e che verifichi l'ulteriore condizione: se $a, b, c \in K$, $a < 0$, $0 \leq b$, esiste uno ed uno solo $x \in K$ tale che $af(x) = bx + c$. In tali ipotesi, come si verifica facilmente in maniera diretta, modificando la moltiplicazione di K mediante la (3.2) e conservando la sua addizione si ottiene un sistema cartesiano $K(+,\circ)$ che è ordinato dall'ordinamento che compete al suo gruppo additivo in quanto coincidente col gruppo additivo del corpo ordinato $K(+,\cdot)$; in più, il sistema cartesiano $K(+,\circ)$ è un M-P-sistema. Anzi, se si modifica la sua moltiplicazione mediante la (3.1), risulta $g = f^{-1}$ e si riottiene il corpo ordinato $K(+,\cdot)$. In conclusione, sussiste il

TEOREMA 3. *Siano $K(+,\cdot)$ un corpo ordinato e $f: K \to K$ una funzione bigettiva, crescente, tale che $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, e che se $a, b, c \in K$, $a < 0$, $0 \leq b$, esista uno e un solo $x \in K$ per cui risulti $af(x) = bx + c$. La struttura algebrica $K(+,\circ)$ il cui gruppo additivo sostegno coincide con $K(+)$ come gruppo ordinato e la cui moltiplicazione è definita ponendo*

$$a \circ b = \begin{cases} af(b) & \text{se } a < 0 \\ ab & \text{se } 0 \leq a \end{cases}$$

è un M-P-sistema che, con la costruzione del teorema 2, fa ritrovare il corpo di partenza. In più, ogni M-P-sistema si ottiene nella maniera suddetta a partire da un opportuno corpo ordinato.

OSSERVAZIONE. W. A. PIERCE, in [7], ha costruito una classe di piani affini non desarguesiani, desumendoli da piani desarguesiani che hanno come sistema di coordinate un *campo semiordi-*

nato $F(+, \cdot)$. Ha mostrato, tra l'altro, che un sistema di coordinate di ciascuno di quei piani si ottiene da un opportuno campo semiordinato $F(+, \cdot)$ con la seguente costruzione: $F(+, \circ)$ è sistema di coordinate del tipo dovuto se $F(+)$ è il gruppo additivo sostegno del campo semiordinato $F(+, \cdot)$ e se risulta $x \circ y = xy$ quando $0 < y$ (9), $x \circ y = \varphi(x) y$ altrimenti, essendo $x, y \in F$ e $\varphi : F \rightarrow F$ una funzione bigettiva, che conserva il semiordinamento, per cui $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, e tale che se $a \in F$ e $0 \not< a$ l'applicazione $x \rightarrow \varphi(x) - ax$ da F a F risulta suriettiva. E' subito visto che il teorema 3, nel caso in cui $K(+, \cdot)$ sia *campo ordinato*, definisce un sistema cartesiano che risulta *inverso* rispetto a quello ottenuto dal campo ordinato $K(+, \cdot)$ e dalla funzione $\varphi = f$ mediante la costruzione di W. A. PIERCE. Poiché l'inversione (ossia, il passaggio alla struttura opposta) di un sistema cartesiano equivale a dualizzare il piano che ha quel sistema cartesiano come sistema di coordinate (cfr. L. LOMBARDO RADICE, [4]) denominiamo «costruzione di Pierce» la costruzione illustrata dal teorema 3.

Con il linguaggio adottato nella precedente osservazione, in virtù dei teoremi 1 e 3, l'aspetto geometrico dei risultati che abbiamo ottenuti si sintetizza nel seguente

TEOREMA 4. *Un piano affine ordinato è un M-P-piano se e solo se è isomorfo ad un piano ottenuto con la «costruzione di Pierce» a partire da un piano affine ordinato desarguesiano.*

(9) $0 < y$ significa che y appartiene al sottogruppo moltiplicativo di $(F - \{0\})$, avente indice due, che dota F del semiordinamento.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. ANDRÉ: *Über verallgemeinerte Moulton-Ebenen*, Arch. Math. (Basel) **13**, 290-301 (1962).

[2] J. ANDRÉ: *Bemerkung zu meiner Arbeit « Über verallgemeinerte Moulton-Ebenen »*, Arch. Math. (Basel) **14**, 359-360 (1963).

[3] F. BARTOLOZZI: *Piani di Moulton generalizzati*, Ricerche Mat. **21**, 252-269 1972.

[4] L. LOMBARDO RADICE: *L'inversione come dualità nei piani su sistemi cartesiani*, Ricerche Mat. **3**, 31-34 (1954).

[5] F. R. MOULTON: *A simple non-desarguesian plane geometry*, Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 192-195 (1902).

[6] G. PICKERT: *Projektive Ebenen*, Springer, Berlin-Gottingen-Heidelberg (1955).

[7] W. A. PIERCE: *Moulton planes*, Can. Jour. Math. **13**, 427-436 (1961).

[8] L. PROFERA: *I piani di rifrazione generalizzati*, Ricerche Mat. (in corso di stampa).