UN PROCESSO MARKOFFIANO DI PURO INGRESSO, A PARAMETRO CONTINUO, OTTENUTO COME ESTENSIONE DEL PROCESSO DISCRETO DELLA FREQUENZA DI SUCCESSO NEL MODELLO IPERGEOMETRICO (*)

di MARIO STRUDTHOFF (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si costruisce un processo stocastico di puro ingresso, markoffiano, a parametro continuo, di contagio negativo, mediante una estensione al caso continuo del processo discreto della frequenza di successo nel modello ipergeometrico.*

Si indica come tale processo possa essere ottenuto attraverso una approssimazione asintotica del processo ipergeometrico.

Si studia poi il processo omogeneo di puro ingresso che si ottiene da quello proposto attraverso un opportuno cambiamento del parametro operativo.

In proposito, si determina una proprietà caratteristica dei processi markoffiani di puro ingresso, con intervalli d'attesa scambiabili e con un numero finito di stati possibili, che siano " omogeneizzabili ".

SUMMARY. - *In this paper we construct a Markov pure birth continuous parameter stochastic process, with negative contagion, as an extension to the continuous case of the success frequency discrete parameter process in the hypergeometric model.*

We indicate the way to obtain this process with an asymptotical approximation of the hypergeometric process.

Then we study the homogeneous pure birth process obtained from the former by a suitable change of the operational parameter.

In this context we obtain a characteristic property of the Markov pure birth processes, with exchangeable inter-arrival times and with a finite number of possible states, which can be made homogeneous by a change of the operational parameter.

1. — In questo lavoro mi sono proposto di costruire un processo stocastico di puro ingresso, $\{X_t ; t \geq 0\}$, markoffiano, a parametro continuo, di contagio negativo — cioè con un numero finito di stati possibili — che possa essere considerato come una esten-

(*) Pervenuto in Redazione il 10 novembre 1972.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Finanziaria dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

sione al caso continuo del processo discreto della frequenza di successo nel modello ipergeometrico, al quale si perviene considerando le estrazioni senza reimbussolamento da un'urna di assegnata composizione.

Le proprietà del processo ipergeometrico dalle quali ho preso le mosse sono le seguenti: il processo ipergeometrico è un processo di contagio negativo, che si «esaurisce» in un numero finito di colpi; gli intervalli d'attesa tra successi contigui sono variabili aleatorie superiormente limitate, scambiabili.

Il paragrafo 2 contiene la costruzione detta e il calcolo di alcune caratteristiche sintetiche del processo a parametro continuo, X_t. Vi si può notare la stretta analogia tra i risultati ottenuti e quelli relativi alle grandezze corrispondenti del modello ipergeometrico.

Nel paragrafo 3 ho indicato come si possa pervenire al processo X_t attraverso una opportuna approssimazione asintotica del processo ipergeometrico.

Sono poi passato ad osservare che, con un opportuno cambiamento del parametro operativo, il processo studiato può essere reso omogeneo. Ne risulta un particolare processo di puro ingresso, omogeneo, di contagio negativo, in cui gli intervalli d'attesa tra successivi arrivi sono stocasticamente indipendenti ma non risultano più equidistribuiti e superiormente limitati.

In questo ordine di idee ho determinato, nel paragrafo 5, una proprietà caratteristica dei processi markoffiani di puro ingresso con intervalli d'attesa scambiabili e con un numero finito di stati possibili, che possono essere resi omogenei con un opportuno cambiamento del parametro operativo.

2. — In vista di costruire un processo markoffiano a parametro continuo, $\{X_t, t \geq 0\}$, atto a contare un numero di arrivi in $(0, t)$ che sia superiormente limitato da H (processo che rientrerebbe quindi nella classe dei cosiddetti «processi di contagio negativo»), prenderemo le mosse dal sistema (prospettivo) di equazioni differenziali di Kolmogorof per le probabilità subordinate di transizione $p_{ij}(t_1, t) = \text{Prob}\,\{X_t = j/X_{t_1} = i\}$:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_{jj}(t_1, t)}{\partial t} = -\lambda_j(t)\, p_{jj}(t_1, t) \qquad j = 0, 1, 2, \dots, H; \quad t > t_1 \geq 0 \\[2ex] \dfrac{\partial p_{ij}(t_1, t)}{\partial t} = -\lambda_j(t)\, p_{ij}(t_1, t) + \lambda_{j-1}(t)\, p_{i, j-1}(t_1, t) \\ \qquad i = 0, 1, 2, \dots, H-1; \; j = i+1, i+2, \dots, H; \; t > t_1 \geq 0 \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $p_{ij}(t_1, t_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$

Le intensità, $\lambda_j(t)$, di ingresso nello stato $j+1$ al tempo t verranno scelte in modo da far assumere al processo le particolarità che interessano e che sono, per noi, quelle di analogia col processo, a parametro discreto, ipergeometrico.

In proposito ricordiamo quanto segue.

Per processo, a parametro discreto, ipergeometrico intendiamo il processo delle frequenze di successo S_n (numero di bianche su n prove) nelle estrazioni senza reimbussolamento da un'urna contenente N palline, di cui H bianche.

Tale processo può essere inteso come un processo di contagio negativo, nel discreto, per il fatto essenziale che gli stati del processo (determinazioni possibili della frequenza di successo, S_n) sono in numero finito ed uguale a $\min(n, H)$. Il processo stesso è « esaurito » dopo N colpi.

Abbiamo già provato (cfr. [1]: § 2) che il processo, a parametro discreto, ipergeometrico gode della proprietà che gli intervalli di attesa, T_i, tra successi contigui sono variabili aleatorie scambiabili. Tali variabili — necessariamente in numero finito, e uguale precisamente ad H — sono, per la natura del problema, superiormente limitate da $N - H + 1$, numero di palline nere aumentato di uno.

Alla luce di queste considerazioni sceglieremo le intensità $\lambda_j(t)$ $(j = 0, 1, \dots, H)$ nella classe delle funzioni continue in modo che, per il processo descritto dalle (1), *gli H intervalli di attesa tra successivi arrivi siano variabili aleatorie scambiabili e superiormente limitate da un valore T* (che potrebbe essere assunto come unità di misura del parametro operativo t).

Per determinare le intensità $\lambda_j(t)$ faremo ricorso al risultato ottenuto da L. Daboni in un suo recente lavoro (cfr. [2]: § 2), secondo il quale i processi markoffiani di puro ingresso con intervalli d'attesa scambiabili sono tutti e soli quelli per i quali le intensità $\lambda_j(t)$ sono espresse dalle

$$(2) \qquad \lambda_j(t) = -\frac{l^{(j+1)}(t)}{l^{(j)}(t)} \; ; \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

ove $l(t) = \text{Prob}\{T_i > t\}$ è la funzione di sopravvivenza del generico intervallo d'attesa T_i $(i = 1, 2, \dots)$. La $l(t)$ è una funzione indefinitamente derivabile, con derivate di segno alterno in $0 \leq t < +\infty$; è poi $l(0) = 1$.

In definitiva i processi markoffiani di puro ingresso con intervalli d'attesa scambiabili sono caratterizzati assegnando una funzione $l(t)$ che goda dei requisiti detti.

In conformità a quanto esposto in precedenza sulle proprietà del processo che vogliamo costruire, imporremo alla $l(t)$ la ulteriore condizione di essere identicamente nulla per $t > T$, e alle intensità $\lambda_j(t)$ le condizioni:

$$\lambda_{H+h}(t) \equiv 0 \, ; \quad t \geq 0 \, ; \quad h = 1, 2, \ldots$$

che comportano, con riferimento alla $l(t)$, le

$$l^{(H+h)}(t) \equiv 0 \, ; \quad t \geq 0 \, ; \quad h = 1, 2, \ldots .$$

La funzione $l(t)$ deve essere dunque, per noi, tale che riesca:

$$l(0) = 1$$

$$l(t) \equiv 0 \quad \text{per} \quad t > T$$

$$l^{(H+h)}(t) \equiv 0 \quad \text{per} \quad h = 1, 2, \ldots ; \quad t \geq 0$$

e dotata, in $0 \leq t < T$, di derivate, fino alla H-ma, di segno alterno. Assumeremo (1)

$$l(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{T}\right)^H & 0 \leq t \leq T \\ 0 & t > T. \end{cases}$$

(1) La più generale funzione $l(t)$, che in $0 \leq t \leq T$ sia ovunque indefinitamente derivabile, che soddisfa le suddette condizioni, è definita al modo seguente:

$$l(t) = \sum_{i=1}^{H} a_i \left(1 - \frac{t}{T}\right)^i \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq T$$

con $a_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^{H} a_i = 1$.

Tale funzione è una combinazione lineare convessa di funzioni del tipo di quella scelta nel testo.

Ne risulta, in corrispondenza, un processo che è «mistura» di processi del tipo che viene qui studiato.

Esso è il più generale processo, markoffiano di puro ingresso, a parametro continuo con un numero finito, H, di stati possibili, che presenti intervalli d'attesa superiormente limitati (da T) e scambiabili.

La funzione da noi scelta è l'unica che ammette derivate di ordine qualun-

Conseguentemente le $\lambda_j(t)$ rimangono definite, per la (2), dalle

$$\lambda_j(t) = \frac{H-j}{T-t}\,; \quad 0 \leq t < T\,; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, H. \tag{3}$$

Assumeremo poi $\lambda_j(t) \equiv 0$ per $t > T$.

E' bene osservare subito esplicitamente che, come era da attendersi, le $\lambda_j(t)$ sono monotòne crescenti con t e divergono tutte a $+\infty$, al tendere di t a T da sinistra.

E' agevole ora procurarsi le probabilità subordinate di transizione, $p_{ij}(t_1, t)$, dal sistema (1) (2):

Si trovano le

$$p_{ij}(t_1, t) = \begin{cases} \dbinom{H-i}{j-i}(t-t_1)^{j-i}\dfrac{(T-t)^{H-j}}{(T-t_1)^{H-i}} \\ \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, H-1\,;\ j = i, i+1, \ldots, H\,; \\ \qquad 0 \leq t_1 < t \leq T, \\ 1 \qquad i = j = H \quad \text{oppure} \quad j = H \text{ e } t > T, \\ 0 \qquad j > H \qquad \text{oppure} \quad i \leq j < H \text{ e } t > T. \end{cases} \tag{4}$$

Si verifica subito che $\sum_{j=i}^{H} p_{ij}(t_1, t) \equiv 1$. E' infatti:

$$\sum_{j=i}^{H} p_{ij}(t_1, t) = \frac{1}{(T-t_1)^{H-i}} \sum_{j=i}^{H} \binom{H-i}{j-i}(t-t_1)^{j-i}(T-t)^{H-j}$$

e la sommatoria a secondo membro è lo sviluppo di Taylor, di punto iniziale t, del polinomio $(T-t_1)^{H-i}$.

E' interessante ora determinare alcune caratteristiche sintetiche

que continue per $t \geq 0$ (tranne, ovviamente, la derivata H-ma discontinua solo in $t = T$). Nel paragrafo 5 presentiamo una ulteriore giustificazione della opportunità della scelta, da noi fatta, della funzione $l(t)$: essa è l'unica possibile se si vuole ottenere un processo che possa essere reso omogeneo con un opportuno cambiamento del parametro operativo.

(2) Le espressioni delle $p_{ij}(t_1, t)$ possono essere ottenute, per $0 \leq t_1 < t \leq T$ e $i \leq j \leq H$, tramite la

$$p_{ij}(t_1, t) = (-1)^{j-i}\frac{(t-t_1)^{j-i}}{(j-i)!}\,\frac{l^{(j)}(t)}{l^{(i)}(t_1)}.$$

Vedi [2]: § 3.

del processo e verificarne la sostanziale analogia con quelle, corrispondenti, del modello ipergeometrico.

Allo scopo ricordiamo che abbiamo già indicato con X_t il numero aleatorio di arrivi in $(0, t)$ nel processo a parametro continuo, analogo della frequenza, S_n, di successo in n colpi nel processo ipergeometrico a parametro discreto, e con T_i il generico intervallo di attesa nel discreto e nel continuo. Ancora, con riferimento al modello discreto, denoteremo con $p_j^{(n)}$ la probabilità subordinata di successo al colpo $n+1$ se sono stati j i successi nei primi n colpi; $p_j^{(n)}$ è l'analogo, nel discreto, dell'intensità $\lambda_j(t)$.

Nella tabella che segue riportiamo alcune grandezze relative al processo a parametro continuo testè proposto (colonna di sinistra) e quelle, analoghe, relative al processo ipergeometrico (colonna di destra).

Il confronto tra le espressioni che compaiono nelle due colonne conforta nei riguardi della appropriatezza della scelta del nostro modello come estensione al caso continuo del processo ipergeometrico.

Processo continuo	*Processo ipergeometrico*
$\lambda_j(t) = \dfrac{H-j}{T-t}; \quad 0 \leq j \leq H$	$p_j^{(n)} = \dfrac{H-j}{N-n}; \quad 0 \leq j \leq \min(H, n)$
$E(X_t) = \dfrac{H}{T} \cdot t$	$E(S_n) = \dfrac{H}{N} \cdot n$
$\operatorname{var}(X_t) = \dfrac{H}{T}\left(1-\dfrac{t}{T}\right) \cdot t$	$\operatorname{var}(S_n) = \dfrac{N-H}{N-1} \cdot \dfrac{H}{N}\left(1-\dfrac{n}{N}\right) \cdot n$
$[0 \leq t \leq T]$	$[1 \leq n \leq N]$
$E(T_i) = \dfrac{T}{H+1}$	$E(T_i) = \dfrac{N+1}{H+1}$
$\operatorname{var}(T_i) = \dfrac{H}{(H+1)^2(H+2)} T^2$	$\operatorname{var}(T_i) = \dfrac{H}{(H+1)^2(H+2)}(N+1)(N-H)$
$E(T_h \cdot T_k) = \dfrac{T^2}{(H+1)(H+2)}$	$E(T_h \cdot T_k) = \dfrac{(N+1)(N+2)}{(H+1)(H+2)}$
$\operatorname{cov}(T_h, T_k) = -\dfrac{T^2}{(H+1)^2(H+2)}$	$\operatorname{cov}(T_h, T_k) = -\dfrac{(N+1)(N-H)}{(H+1)^2(H+2)}$
$[0 \leq T_i \leq T; \; i = 1, 2, \ldots, H]$	$[1 \leq T_i \leq N-H+1; \; i = 1, 2, \ldots, H]$

I risultati della colonna di destra sono stati ottenuti nel nostro già ricordato lavoro (cfr. [1]: § 3).

Per quanto concerne le espressioni che figurano nella colonna a sinistra, basta ricordare le (4) e la definizione di $l(t)$, che forniscono — rispettivamente — le distribuzioni di X_t e di T_i. Risulta cioè per $0 \leq t \leq T$:

$$\text{(5)} \qquad \text{Prob}\,\{X_t = h\} = p_{0h}\,(0, t) = \binom{H}{h}\left(\frac{t}{T}\right)^h \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{H-h}$$

$$h = 0, 1, 2, \ldots, H$$

$$f_{T_i}(t) = -\,l'(t) = \begin{cases} \dfrac{H}{T}\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)^{H-1} & \text{per} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Il calcolo di $E(T_h \cdot T_k)$ è stato effettuato tenendo presente che la densità, $f(x, y)$, della distribuzione congiunta di due qualsivoglia intervalli d'attesa è data, in forza delle posizioni precedenti, dalla

$$f(x, y) = l''(x + y)$$

e che, per noi, è $l''(x + y) > 0$ per $0 \leq x + y \leq T$. E' quindi:

$$E(T_h \cdot T_k) = \int_0^T x dx \int_0^{T-x} y \cdot l''(x + y)\, dy.$$

A conclusione di questo paragrafo, riteniamo interessante segnalare una ulteriore proprietà del processo X_t.

Indichiamo con $N_h(t) = X(t + h) - X(t) \begin{pmatrix} 0 \leq t \leq T - h \\ 0 < h < T - t \end{pmatrix}$ il numero aleatorio di « arrivi » nell'intervallo $(t, t + h)$.

Ebbene: *gli incrementi, $N_h(t)$, relativi a intervalli disgiunti e di uguale ampiezza, h, sono v. a. scambiabili.*

Lo si prova agevolmente osservando che la distribuzione congiunta di quanti si vogliano incrementi, è simmetrica.

Nel caso, ad esempio, di due incrementi, tenendo presenti le (4) riesce, per $t_1 + h \leq t_2 \leq T - h$ e $0 < i + j < H$:

$$\text{Prob}\,\{N_h(t_1) = i \wedge N_h(t_2) = j\} =$$

$$= \sum_{l=0}^{H-(i+j)} \sum_{k=0}^{H-(l+i+j)} p_{0,l}(0, t_1)\, p_{l,l+i}(t_1, t_1+h)\, p_{l+i,l+i+k}(t_1+h, t_2)\cdot$$

$$\cdot p_{l+i+k,l+i+k+j}(t_2, t_2+h) = \sum_{l=0}^{H-(i+j)} \sum_{k=0}^{H-(l+i+j)} \frac{(l+i+k+j)!}{l!\,i!\,k!\,j!}\,\cdot$$

$$\cdot \binom{H}{l+i+k+j} t_1^l \cdot [t_2-(t_1+h)]^k \cdot h^{i+j} \cdot \frac{[T-(t_2+h)]^{H-(l+k+i+j)}}{T^H}$$

che è funzione simmetrica di i, j.

3. — Il confronto tra la probabilità subordinata di successo $p_j^{(n)}$ del modello discreto e la corrispondente intensità $\lambda_j(t)$ del processo a parametro continuo permette di pervenire al nostro risultato sulle intensità del processo a parametro continuo — e quindi alla intera costruzione dello stesso — attraverso un opportuno procedimento di approssimazione asintotica delle probabilità subordinate del modello discreto.

Osserviamo in proposito che la $P_j^{(n)}$ può essere posta nella forma

$$P_j^{(n)} = \frac{H-j}{N-n} = \frac{nP - j\,\dfrac{n}{N}}{1-\dfrac{n}{N}} \cdot \frac{1}{n}$$

ove $p = \dfrac{H}{N}$ è la probabilità di successo in ogni colpo. Il numero np è la speranza matematica della frequenza di successo in n colpi; essa è limitata superiormente da H.

Analogamente, nel nostro processo a parametro continuo, è $\dfrac{H}{T} t$ la speranza matematica del numero di arrivi in $(0, t)$; essa, per $t = T$, è uguale ad H.

Ciò suggerisce di porre, ove si pensi di far divergere a $+\infty$ il numero n di prove nel modello discreto:

$$\lim_{n\to+\infty} np = \frac{H}{T} t \qquad (0 < t < T)$$

Con ciò avremo le:

$$p_j^{(n)} \simeq \frac{\dfrac{H}{T} t - j\,\dfrac{t}{T}}{1-\dfrac{t}{T}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{H-j}{T-t} \cdot \frac{t}{n}$$

e di qui la conclusione:

$$p_{j,j+1}(t, t+\Delta t) \simeq \lambda_j(t)\cdot \Delta t \simeq \frac{H-j}{T-t}\cdot\frac{t}{n}.$$

È interessante, a questo punto, cogliere il legame tra il processo ipergeometrico, il processo a parametro continuo testè proposto e i processi bernoulliano e poissoniano.

È noto che il processo bernoulliano si può ottenere come limite di un processo ipergeometrico al divergere di N, fisso rimanendo il rapporto $\frac{H}{N}$ (basta pensare in termini di estrazioni dall'urna).

Poiché, come è noto, il processo di Poisson si può interpretare come estensione al caso continuo del processo bernoulliano, è da attendersi che il processo di Poisson possa essere ottenuto come processo limite del nostro processo a parametro continuo.

E ciò si realizza, infatti, appena che il numero massimo, H, di stati e — contemporaneamente — l'estremo superiore, T, dei valori possibili degli intervalli d'attesa, T_i, divergano a $+\infty$ in modo che risulti

$$\lim_{\substack{H\to+\infty\\ T\to+\infty}} \frac{H}{T} = \vartheta.$$

Convergono allora a ϑ le intensità $\lambda_j(t)$ e la funzione $l(t) = \left[\left(1-\frac{t}{T}\right)^T\right]^{\frac{H}{T}}$ tende alla $l^*(t) = e^{-\vartheta t}$, funzione di sopravvivenza del generico intervallo d'attesa di un processo di Poisson con intensità ϑ.

Possiamo osservare ancora che, particolarizzando i parametri caratteristici H e T del nostro processo e precisamente assumendo $H = T$, si trova il particolare processo a contagio negativo di Pólya con intensità date dalle $\lambda_j(t) = \frac{1+\varrho j}{1+\varrho t}$, con $\varrho = -\frac{1}{T}$.

4. — Ci è sembrato che potesse riuscire utile aggiungere alcune considerazioni sulla possibilità di rendere omogeneo nel « tempo » il nostro processo.

Ciò di fatto è possibile per la particolare natura delle intensità $\lambda_j(t)$. Il risultato che indicheremo ci dirà come il nostro processo possa essere trasformato, mediante un « cambiamento di orologio », in un particolare processo a parametro continuo, omogeneo, di contagio negativo.

È noto che un processo markoffiano di puro ingresso può essere reso omogeneo con un cambiamento di variabile nel parametro operativo t, allora e allora soltanto che le intensità $\lambda_j(t)$ sono del tipo

$$\lambda_j(t) = \lambda_j \cdot \gamma(t)$$

essendo $\gamma(t)$ una arbitraria funzione non negativa del parametro t, e λ_j costanti positive.

La citata trasformazione si realizza mediante la

$$\tau = \varphi(t) = \int_0^t \gamma(s)\, ds$$

e, rispetto al «nuovo» parametro operativo τ, il processo risulta omogeneo con intensità λ_j (cfr. [3]. pag. 49-51).

Nel nostro caso, pertanto, il cambiamento di variabile è fornito dalla

$$\tau = \varphi(t) = \int_0^t \frac{1}{T-s}\, ds = -\ln\left(1 - \frac{t}{T}\right). \tag{6}$$

e le intensità (indipendenti da τ) del processo reso omogeneo sono date dalle

$$\lambda_j = H - j\,; \qquad j = 0,1,2,\ldots, H$$

Per le probabilità subordinate di transizione si stabiliscono le

$$p_{ij}(\tau, \tau + h) = p_{ij}(h) = \begin{cases} \binom{H-i}{j-i} e^{-(H-j)h}(1-e^{-h})^{j-i}; & 0 \leq i \leq j \leq H \\ 0 & j > H \end{cases}$$

Con la posizione $1 - e^{-h} = \pi$ si perviene alle

$$p_{ij}(h) = \binom{H-i}{j-i} \pi^{j-i}(1-\pi)^{H-j};\ 0 \leq i \leq j \leq H$$

e in particolare alle

$$p_{0j}(h) = \binom{H}{j}\pi^j(1-\pi)^{H-j}\,;\; j = 0,1,2,\ldots, H$$

e trattasi di distribuzioni binomiali (si vedano anche le (5)).

Si noti che il processo omogeneo ora ottenuto presenta, naturalmente, ancora un numero finito, H, di stati ma — a differenza del processo non omogeneo precedente — lo stato assorbente H potrebbe essere raggiunto in un tempo non finito.

Conviene, in proposito, indicare ancora la distribuzione degli intervalli di attesa nel processo omogeneo.

Come è noto, in un processo markoffiano di puro ingresso, omogeneo, la distribuzione del tempo di attesa T_j si può ottenere dalla

$$\text{Prob}\,\{T_j > \tau\} = e^{-\lambda_{j-1}\tau}\,;$$

ne scendono, nel nostro caso, le

$$F_{T_j}(\tau) = 1 - e^{-(H-j+1)\tau}.$$

Per effetto del cambiamento di variabile ottenuto con la (6), che trasforma l'intervallo $(0, T)$, dominio del parametro t, nell'intervallo $(0, +\infty)$ dominio del parametro τ, gli intervalli di attesa (e quindi il tempo globale per l'assorbimento), limitati nel processo originario, non sono più tali nel processo reso omogeneo.

Inoltre gli intervalli di attesa, scambiabili nel processo originario, sono stocasticamente indipendenti in quello omogeneo (proprietà tipica dei processi di ingresso omogenei) e non più ugualmente distribuiti.

Ci soffermiamo per un'ultima considerazione sul tempo medio per l'assorbimento nello stato H, ovvero sulla durata media del processo omogeneo.

È immediato stabilire che nel processo omogeneo risulta $E(T_j) = (H - j + 1)^{-1}$.

Posto quindi $W_H = T_1 + T_2 + \ldots + T_H$, si ricava che la ricercata durata media del processo omogeneo è data da

$$E(W_H) = 1/H + 1/(H-1) + \ldots + 1/2 + 1 \simeq 1 + \ln H.$$

Nel caso non omogeneo si trova invece

$$E(W_H) = H \cdot E(T_j) = \frac{H}{H+1} \cdot T.$$

5. — Riteniamo opportuno chiudere questa nota soffermandoci ancora sulla opportunità della scelta, fatta nel § 2, per la funzione, $l(t)$, di sopravvivenza del generico intervallo di attesa.

Proveremo che quella scelta è l'unica possibile qualora si voglia costruire un processo di puro ingresso con intervalli d'attesa scambiabili e con un numero finito di stati possibili, che sia omogeneizzabile attraverso un « cambiamento di orologio ».

Ci rifaremo, allo scopo, ad un recente lavoro di L. Crisma (cfr. [4]), nel quale si stabilisce che tutti e soli i processi markoffiani di puro ingresso con intervalli d'attesa scambiabili e numero non finito di stati possibili, per i quali si possa introdurre un parametro operativo che li renda omogenei, sono i processi di Pòlya a contagio non negativo.

Riportiamo, in sintesi, le linee essenziali del lavoro di L. Crisma; vi apporteremo poi le modifiche necessarie al nostro caso.

Prendendo l'avvio della condizione

$$\lambda_j(t) = -\frac{l^{(j+1)}(t)}{l^{(j)}(t)}\,; \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

che caratterizza i processi di puro ingresso con intervalli d'attesa scambiabili e dalla particolare struttura, espressa dalla

$$\lambda_j(t) = \lambda_j \cdot \gamma(t) \qquad \lambda_j > 0 \qquad \gamma(t) \geq 0, \ t \geq 0\,;$$

che devono possedere le intensità del processo affinché esso sia omogeneizzabile, L. Crisma stabilisce che deve essere soddisfatta la condizione

$$(\lambda_j - \lambda_{j+1})\, \gamma^2(t) = \gamma'(t)$$

il che comporta che la successione $\{\lambda_j\}$ deve essere aritmetica, cioè che

(7) $$\lambda_j = \lambda + \varrho j\,; \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

con $\lambda > 0$ e $\varrho \geq 0$. La funzione $\gamma(t)$ deve quindi soddisfare l'equazione differenziale

(8) $$\gamma'(t) = -\varrho \cdot \gamma^2(t)$$

con la condizione iniziale $\gamma(0) = 1$.

Ne consegue che le intensità $\lambda_j(t)$ e la funzione, $l(t)$, di sopravvivenza del generico intervallo d'attesa sono date, rispettivamente, dalle

$$(9)\qquad \begin{aligned} \lambda_j(t) &= \frac{\lambda + \varrho j}{1 + \varrho t}; \quad j = 0, 1, 2, \ldots \\ l(t) &= (1 + \varrho t)^{-\frac{\lambda}{\varrho}}; \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

corrispondenti, appunto, a processi di Pòlya.

La condizione $\varrho \geq 0$, che comporta che la successione aritmetica $\{\lambda_j\}$ definita dalle (7) sia non decrescente, è imposta dalla necessità che — qualora si considerino processi con un numero non finito di stati possibili — le λ_j siano tutte positive.

Poiché a noi interessa il caso in cui il numero di stati possibili è finito, possiamo rimuovere la condizione di non negatività per ϱ, ed anzi studiare lo stesso problema impostato da L. Crisma, con riferimento, ora, al caso $\varrho < 0$, cui corrisponde una successione aritmetica $\{\lambda_j\}$ decrescente.

Assumeremo

$$\lambda_j = \begin{cases} \lambda + \varrho j; & j = 0, 1, 2, \ldots, m; \quad \lambda > 0; \quad \varrho < 0 \\ 0 & j < m \end{cases}$$

ove con m intendiamo la parte intera del numero, positivo, $-\dfrac{\lambda}{\varrho}$.

Sono dunque m gli stati possibili: lo stato m è assorbente.

L'ipotesi $\varrho < 0$ comporta poi che l'insieme di variabilità del parametro t sia superiormente limitato. Ciò segue immediatamente dal fatto che la funzione $\gamma(t)$, non negativa, deve essere soluzione della (8). Si ottiene allora, per la $l(t)$, la espressione

$$l(t) = \begin{cases} (1 + \varrho t)^{-\frac{\lambda}{\varrho}}; & 0 \leq t \leq -\dfrac{1}{\varrho} \\ 0 & t > -\dfrac{1}{\varrho} \end{cases}$$

la quale con le posizioni $-\dfrac{1}{\varrho} = \mathcal{T}$ e $-\dfrac{\lambda}{\varrho} = \alpha$, si può scrivere come segue:

$$(10)\qquad l(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{\mathcal{T}}\right)^{\alpha} & 0 \leq t \leq \mathcal{T} \\ 0 & t > \mathcal{T}. \end{cases}$$

Concludendo: *tutti e soli i processi markoffiani di puro ingresso con intervalli d'attesa scambiabili e con un numero finito di stati possibili che siano omogeneizzabili, sono individuati da funzioni* $l(t)$ *espresse dalla* (10).

Nel caso che α sia intero ed uguale ad H, ritroviamo la funzione $l(t)$ scelta nel § 2 per la costruzione del processo X_t. Quanto ora esposto costituisce, quindi, una ulteriore giustificazione di quella scelta.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. STRUDTHOFF: *Intervalli d'attesa tra successi contigui in condizioni di scambiabilità.* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, vol. II, fasc. 2 (1970).

[2] L. DABONI: *Processi markoffiani di puro ingresso con intervalli d'attesa scambiabili.* Studi e ricerche, VI-1969, Univ. Parma.

[3] H. BÜHLMANN: *Mathematical Methods in Risk Theory.* « Springer-Verlag » (1970).

[4] L. CRISMA: *Una proprietà caratteristica dei processi di Pòlya.* Studi e ricerche, VII-1970, Univ. Parma.