ZUR TOPOLOGISIERUNG METRISCHER RÄUME, III (*)

von R. Z. DOMIATY (in Graz) (**)

SOMMARIO. - *Sia* (R, d) *uno spazio metrico. Diremo che una topologia* $\mathbf{T}$ *su* R *è compatibile con la metrica* d *se ogni sfera chiusa (nello spazio metrico* (R, d)*) è un insieme chiuso (nello spazio topologico* (R, T)*). In questa nota esaminiamo alcune consegnenze di questa definizione nel caso di uno spazio euclideo* (R^n, e)*, ove* e *indica l'usuale metrica euclidea in* R^n*. Se* $\mathbf{T}$ *è ora una topologia su* R^n*, compatibile con* e *e soddisfacente la restrizione* $\mathbf{T}_e^* \subseteq \mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}_e$ *(*$\mathbf{T}_e^*$ *essendo la meno fine topologia su* R^n *compatibile con* e*, e* T_e *l'ordinaria topologia euclidea su* R^n*). Mostreremo allora dapprima che la restrizione di* T *ad ogni sottoinsieme* Q $(\subseteq R^n)$ *limitato:* $\mathbf{T}/Q$ *è uguale alla restrizione di* T_e *a* Q*:* T_e/Q*, e poi che ogni «path» limitato in* $(R^n, \mathbf{T})$ *è un «path» limitato anche in* $(R^n, \mathbf{T}_e)$.

SUMMARY. - (R, d) *be a metric space. We call a topology* $\mathbf{T}$ *on* R *compatible with the metric* d*, if every closed ball (resp. the metric space* (R, d)*) is a closed set (resp. the topological space* $(R, \mathbf{T})$*). In this note we discuss some consequences of the application of this definition to case of the euclidean space* $(\mathbb{R}^n, e)$*;* e *is the usual euclidian metric in* $\mathbb{R}^n$*. Let* $\mathbf{T}$ *be now a topology on* $\mathbb{R}^n$*, which is compatible with* e *and satisfies the restriction* $\mathbf{T}_e^* \subseteq \mathbf{T} \subseteq \mathbf{T}_e$ *(*$\mathbf{T}_e^*$ *be the coarsest topology on* $\mathbb{R}^n$ *compatible with* e *and* $\mathbf{T}_e$ *is the ordinary euclidean topology on* $\mathbb{R}^n$*). Then we show, that first the restriction of* $\mathbf{T}$ *to any bounded subset* $Q \subseteq \mathbb{R}^n$*,* $\mathbf{T} \mid Q$*, is equal to* $\mathbf{T}_e \mid Q$*, the restriction of* $\mathbf{T}_e$ *to* Q*, and second, that every bounded path in* $(\mathbb{R}^n, \mathbf{T})$ *is also a bounded path in* $(\mathbb{R}^n, \mathbf{T}_e)$.

(*) Pervenuto in Redazione il 6 novembre 1972.

(**) Indirizzo dell'Autore: Lehrkanzel und Institut für Mathematik III — Technische Hochschule in Graz-A-8010 Graz, Kopernikusg. 24.

§ 1. Einleitung.

In [1], Definition 1, wurde folgende Verträglichkeitsbeziehung eingeführt. Es sei (R, d) ein metrischer Raum; genau dann soll eine Topologie $\mathbf{T}$ auf R mit der Metrik d *verträglich* heissen, wenn die abgeschlossenen Kugeln $B(p, r) := \{q \in R \mid d(p, q) \leq r\}$, $p \in R$ und $r \geq 0$, abgeschlossene Mengen bzgl. $\mathbf{T}$ sind. Die Menge aller derartigen Topologien bezeichnen wir mit $V(R, d)$. In dieser Note sollen einige Resultate, die sich bei Anwendung dieser Definition auf den gewöhnlichen euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ ergeben, abgeleitet und diskutiert werden. Zur Abkürzung wollen wir hier durchwegs mit e die übliche euklidische Metrik im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen. Bei allen Überlegungen schliessen wir eng an einige Teilresultate an, die in [1] und [2] für diesen Spezialfall gewonnen wurden.

§ 2. Teilräume.

$V(R, d)$ enthält eine gröbste Topologie, die wir mit $\mathbf{T}_d^*$ bezeichnen. Hierbei stellen die abgeschlossenen Kugeln $\{B(p, r)\}$ eine Subbasis für die abgeschlossenen Mengen bzgl. $\mathbf{T}_d^*$ dar ([1], § 3: Anmerkung 3). Schliesslich sei $\mathbf{T}_d$ die, in der üblichen Weise von der Metrik d auf R erzeugte Topologie (« induzierte Topologie »). Im weiteren betrachten wir fast ausschliesslich solche Topologien auf R, die der Beziehung

$$\mathbf{T}_d^* \subseteq \mathbf{T} \subseteq T_d \tag{1}$$

genügen.

Nun sei

$$Q \subseteq R. \tag{2}$$

Setzt man $d \mid Q$ für die durch d auf Q induzierte Teilraummetrik und, falls $\mathbf{T}$ eine Topologie auf R ist, $\mathbf{T} \mid Q$ für die durch $\mathbf{T}$ auf Q induzierte Spurtopologie, so erhält man auf Q i. a. drei verschiedene ausgezeichnete Topologien, nämlich $\mathbf{T}_{d|Q}^*$, $\mathbf{T}_d^* \mid Q$ und $\mathbf{T}_{d|Q} = \mathbf{T}_d \mid Q$. Zwischen diesen Topologien besteht folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}_{d|Q} & = & \mathbf{T}_d \mid Q \\ \cup\!\shortmid & & \cup\!\shortmid \\ \mathbf{T}_{d|Q}^* & \subseteq & \mathbf{T}_d^* \mid Q \end{array} \tag{3}$$

([1], (5)). Nach [1], (12) gilt im Fall $(R, d) \equiv (\mathbb{R}^n, e)$ und (2)

$$\delta(Q) < \infty \Longrightarrow \mathbf{T}_{e|Q} = \mathbf{T}_e^* \mid Q \tag{4}$$

($\delta(Q)$ ist der Durchmesser von Q). Man kann in diesem Fall aber noch etwas mehr zeigen:

$$\delta(Q) < \infty \Longrightarrow \mathbf{T}_{e|Q} = \mathbf{T}_{e|Q}^* . \tag{5}$$

Beweis. Wegen (3) genügt der Nachweis von

$$\mathbf{T}_{e|Q} \subseteq \mathbf{T}_{e|Q}^* \tag{6}$$

Dazu verwenden wir [1], Lemma 8, das, auf den vorliegenden Fall übertragen, folgendes aussagt. Ist $\mathbf{S} \in V(Q, e \mid Q)$ und für alle $q \in Q$ und $r > 0$ die Q-abgeschlossene Kugel

$$B_Q(q, r) := Q \cap B(q, r)$$

eine abgeschlossene Umgebung von q bzgl. $\mathbf{S}$, so gilt

$$\mathbf{T}_{e|Q} \subseteq \mathbf{S}.$$

Zum Beweis von (6) halten wir nun ein solches $B_Q(q, r)$ fest. $\overline{Q}$ sei die abgeschlossene Hülle von Q bzgl. $\mathbf{T}_e$ in $\mathbb{R}^n$. Da $\overline{Q}$ nach unserer Voraussetzung kompakt bzgl. $\mathbf{T}_e$ ist, existiert sicher eine endliche Überdeckung

$$Q \subseteq \overline{Q} \subseteq \bigcup_{i \in N} B\left(q_i, \frac{r}{4}\right)$$

wobei für alle $i \in N := \{1, \dots, n\}$

$$q_i \in Q$$

ist. Setzt man

$$J := \left\{ j \in N \mid q \in B\left(q_j, \frac{r}{4}\right) \right\}$$

so erhält man schliesslich

$$q \in Q \cap \complement \left[\bigcup_{i \in N-J} B\left(q_i, \frac{r}{4}\right) \right] = Q - \bigcup_{i \in N-J} B_Q\left(q_i, \frac{r}{4}\right) \subseteq B_Q(q, r).$$

Weil die $B_Q\left(q_i, \frac{r}{4}\right)$ abgeschlossene Mengen bzgl. $\mathbf{T}_{e|Q}^*$ sind, ist $B_Q(q, r)$ eine abgeschlossene Umgebung von q bzgl. $\mathbf{T}_{e|Q}^*$ womit (6) gezeigt wurde.

Fasst man (3), (4) und (5) zusammen, so erhält man

LEMMA 1. *Sei* $(R, d) \equiv (\mathbb{R}^n, e)$ *und* $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\delta(Q) < \infty$. *Dann gilt:*

1. *Im Diagramm* (3) *steht überall* « = ».
2. *Für jede Topologie* $\mathbf{T} \in V(\mathbb{R}^n, e)$, *die* (1) *erfüllt, ist*

$$\mathbf{T} \mid Q = \mathbf{T}_{d \mid Q}.$$

Dieses Resultat kann man so interpretieren. Beschränkt man sich im $(\mathbb{R}^n, e)$ auf jene Topologien, die (1) erfüllen, so wird auf keiner beschränkten Teilmenge $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ eine neue Spurtopologie erzeugt. Dass diese Aussage für nichtbeschränkte Teilmengen Q falsch ist, erkennt man unmittelbar daran, dass $\mathbf{T}^*_{e \mid Q}$ das HAUSDORFF'sche Trennungsaxiom nicht erfüllt ([1], Lemma 2).

§ 3. Beschränkte Kurven.

Wir verwenden jetzt Lemma 1 zum Nachweis, dass bzgl. jeder Topologie auf $\mathbb{R}^n$, die (1) erfüllt, dieselben beschränkten Kurven in $\mathbb{R}^n$ auftreten.

Voraus einige allgemeine Bemerkungen. Es sei (R, d) ein metrischer Raum, $\mathbf{T}$ eine (zunächst beliebige) Topologie auf R, $I := [0, 1]$ und $\mathbf{A} := \{f \mid f : I \to R\}$ die Menge aller (nicht notwendig stetigen!) Abbildungen von I in R. Mit $\mathbf{F}(\mathbf{T}) := \{f \in \mathbf{A} \mid \text{stetig ist } f \text{ bzgl. } \mathbf{T}\}$ bezeichnen wir die Menge aller *Kurven* aus $\mathbf{A}$ (bzgl. des topologischen Raumes $(R, \mathbf{T})$) und mit $\mathbf{B} := \{f \in \mathbf{A} \mid \delta[f(I)] < \infty\}$ bzw. $\mathbf{B}^* := \{f \in \mathbf{A} \mid L(f) < \infty\}$ die Menge aller *beschränkten* bzw. *rektifizierbaren Abbildungen* aus $\mathbf{A}$ (bzgl. des metrischen Raumes (R, d)); dabei ist

$$L(f) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} d[f(t_i), f(t_{i+1})] \right\}$$

(zu den hier verwendeten Bezeichnungen vgl. auch [1], § 5). Sinngemäss nennt man

$$\mathbf{F}^0(\mathbf{T}) := \mathbf{B} \cap \mathbf{F}(\mathbf{T})$$

bzw.

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{T}) := \mathbf{B}^* \cap \mathbf{F}(\mathbf{T})$$

die Menge der *beschränkten* bzw. *rektifizierbaren Kurven* des, mit der Topologie $\mathbf{T}$ versehenen, metrischen Raumes (R, d). Ist $\mathbf{T}' \subseteq \mathbf{T}''$, so erhält man sofort die Beziehungen $\mathbf{F}(\mathbf{T}') \supseteq \mathbf{F}(\mathbf{T}'')$, $\mathbf{F}^0(\mathbf{T}') \supseteq \mathbf{F}^0(\mathbf{T}'')$ und $\mathbf{F}^*(\mathbf{T}') \supseteq \mathbf{F}^*(\mathbf{T}'')$, wobei i.a. Ungleichheit vorliegen wird Z.B. kann man aus einem Beispiel, das in [2], § 3 für den $\mathbb{R}^1$ konstruiert wurde, leicht schliessen, dass schon im $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{F}(\mathbf{T}_e^*) \neq \mathbf{F}(\mathbf{T}_e) \tag{7}$$

besteht.

Dem gegenüber erhält man aber im $\mathbb{R}^n$

Lemma 2. *Sei* $(R, d) \equiv (\mathbb{R}^n, e)$ *und* $\mathbf{T}$ *eine Topologie auf* $\mathbb{R}^n$, *die* (1) *erfüllt. Dann gilt die Identität*

$$\mathbf{F}^0(\mathbf{T}) = \mathbf{F}^0(\mathbf{T}_e)$$

Beweis. Sei $f \in \mathbf{F}^0(\mathbf{T})$ und $C := f(I)$. Nach Lemma 1/2 gilt $\forall\, H \in \mathbf{T}_e \exists\, G \in \mathbf{T} : C \cap H = C \cap G$.

Daher ist für jedes $H \in \mathbf{T}_e$

$$f^{-1}(H) = f^{-1}(C \cap H) = f^{-1}(C \cap G) = f^{-1}(G),$$

d.h. für jedes $H \in \mathbf{T}_e$ ist $f^{-1}(H)$ eine offene Menge in I, also $f \in \mathbf{F}^0(\mathbf{T}_e)$. Daraus folgt unsere Behauptung.

Unter den Voraussetzungen von Lemma 2 erhalten wir wegen $\mathbf{F}^*(\mathbf{T}) = \mathbf{B}^* \cap \mathbf{F}^0(\mathbf{T})$ sofort

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{T}) = \mathbf{F}^*(\mathbf{T}_e). \tag{8}$$

Damit lässt sich die Aussage [1] Lemma 7 im Falle des $\mathbb{R}^n$ verschärfen. Setzt man, wie dort, für den *inneren Abstand*

$$g_{\mathbf{T}}(p, q) := \inf_f L(f), \qquad (p, q \in R),$$

wobei $f \in \mathbf{F}(\mathbf{T})$ sämtliche Kurven durchläuft, für die $f(0) = p$ und $f(1) = q$ ist, so erhält man unter den Voraussetzungen von Lemm 2 wegen (8)

$$\forall\, p, q \in \mathbb{R}^n : g_{\mathbf{T}}(p, q) = e(p, q). \tag{9}$$

Dieses Resultat besagt, dass jede Topologie $\mathbf{T} \in V(\mathbb{R}^n, e)$, die (1) erfüllt, stets denselben inneren Abstand $g_{\mathbf{T}} = e$ erzeugt.

§ 4. Schlussbemerkungen.

Die in § 1 zitierte Verträglichkeitsdefinition wurde erstmals in [3] verwendet, um metrische Räume mit einer Elementarlänge topologischen Untersuchungen zugänglich zu machen. (R, Δ) heisst ein metrischer Raum mit einer Elementarlänge, wenn die Metrik Δ nur ganzzahlige Werte annimmt. Für einen solchen Raum entartet $\mathbf{T}_\Delta$ in die diskrete Topologie. Daran anschliessend ergab sich das Problem, eine Vereinbarung zu treffen, nach der einem metrischen Raum (R, d) auch *gröbere* Topologien als $\mathbf{T}_d$ zugeordnet werden können. Natürlich sollte die Vereinbarung so beschaffen sein, dass ein gewisser, möglichst enger Zusammenhang mit der gegebenen Metrik d besteht. Dieser wird in unserem Fall über die Familie der abgeschlossenen Kugeln hergestellt.

Diese Fragestellung motiviert auch etwas die Einschränkung (1), die wir hier durchwegs verwendet haben. Jede einzelne Topologie dieser Familie besitzt sicher nicht weniger Kurven als $\mathbf{T}_d$ und scheint daher für verschiedene Fragen, die auf dem Kurvenbegriff aufbauen, interessant.

In dieser Arbeit wurde die Auswirkung der Verträglichkeitsdefinition (die ursprünglich nur zur Anwendung auf metrische Räume mit einer Elementarlänge gedacht war), auf zwei elementare Begriffe im $\mathbb{R}^n$ untersucht. Es hat sich gezeigt, dass die betrachteten Topologien vom lokalen bzw. innergeometrischen Standpunkt aus im $\mathbb{R}^n$ nichts verändern — und damit auch keine Verschlechterung bringen.

LITERATUR

[1] R. Z. Domiaty, *Zur Topologisierung metrischer Räume* I. J. reine u. angew. Math. 258 (1973) 126-132.

[2] R. Z. Domiaty, *Zur Topologisierung metrischer Räume* II. (Proc. Confer. Topology, Keszthely, 1972 (im Druck).

[3] R. Z. Domiaty, *Metrische Räume mit einer Elementarlänge.* Monatsh. f. Math., 76 (1972) 1-20.