SULLA DIMENSIONE DI PRODOTTI TENSORIALI INFINITI (*)

di WALTER SPANGHER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si determina la dimensione del prodotto tensoriale di famiglie infinite* $(E_i)_{i \in I}$ *di spazi vettoriali su un corpo* K.

SUMMARY. - *We determine the tensor product's dimension of all infinite families* $(E_i)_{i \in I}$ *of vector spaces over a field* K.

1. È ben noto cosa s'intenda per prodotto tensoriale di una famiglia arbitraria di moduli unitari su uno stesso anello commutativo con unità [1].

Il nostro interesse qui è rivolto al prodotto tensoriale di una famiglia infinita di spazi vettoriali $(E_i)_{i \in I}$ su uno stesso corpo K assegnato, ed in particolare alla sua dimensione, essendo tale prodotto tensoriale uno spazio vettoriale sul corpo K.

2. Sovente, invece di considerare il prodotto tensoriale $\bigotimes_{i \in I} E_i$, si utilizzano dei sottospazi di $\bigotimes_{i \in I} E_i$ definiti nella seguente maniera:

Dato per ogni $i \in I$ un elemento a_i di E_i, si considera il sottospazio generato dagli elementi $\bigotimes_{i \in I} x_i$ con $x_i = a_i$ per quasi ogni $i \in I$. Il sottospazio in questione verrà scritto con $\bigotimes_{i \in I}^{(a_i)} E_i$ ed ogni tensore decomponibile ad esso appartenente è del tipo innanzi detto.

(*) Pervenuto in Redazione il 10 ottobre 1972.

Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per le Strutture Algebriche e Geometriche e loro Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

Questo nuovo prodotto tensoriale può essere anche definito come limite induttivo di un sistema induttivo relativo all'insieme G delle parti finite di I, ordinate per inclusione.

Precisamente se $\mathcal{J}$ e $\mathcal{K}$ sono parti finite di I con $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{K}$ si può definire una applicazione lineare

$$f_{\mathcal{J},\mathcal{K}} : \bigotimes_{i \in \mathcal{J}} E_i \rightarrow \bigotimes_{i \in \mathcal{K}} E_i$$

ponendo :

$$f_{\mathcal{J},\mathcal{K}} (\bigotimes_{i \in \mathcal{J}} x_i) = (\bigotimes_{i \in \mathcal{J}} x_i) \otimes (\bigotimes_{i \in \mathcal{K} - \mathcal{J}} a_i).$$

Si verifica facilmente che $(\bigotimes_{i \in \mathcal{J}} E_i, f_{\mathcal{J},\mathcal{K}})$ formano un sistema induttivo; d'altronde si può definire un'applicazione lineare $f_{\mathcal{J}} : \bigotimes_{i \in \mathcal{J}} E_i \rightarrow \bigotimes_{i \in I}^{(a_i)} E_i$ ponendo :

$$f_{\mathcal{J}}(\bigotimes_{i \in \mathcal{J}} x_i) = (\bigotimes_{i \in \mathcal{J}} x_i) \otimes (\bigotimes_{i \in I - \mathcal{J}} a_i)$$

e le $f_{\mathcal{J}}$ formano un sistema induttivo di applicazioni lineari, da cui l'esistenza di una applicazione lineare di $\varinjlim (\bigotimes_{i \in \mathcal{J}} E_i)$ in $\bigotimes_{i \in I}^{(a_i)} E_i$, che si verifica essere un isomorfismo.

Se poi per ogni spazio E_i si fissa una base $B_i = \{ b_\lambda^i ; \lambda \in L_i \}$, posto $B = \prod_{i \in I} B_i$ si può considerare il sottospazio $\bigotimes_{i \in I}^B E_i$ dello spazio $\bigotimes_{i \in I} E_i$ generato dai tensori decomponibili $\bigotimes_{i \in I} x_i$ dove x_i è la proiezione i-ma di un elemento di B per quasi ogni $i \in I$.

Il nuovo spazio $\bigotimes_{i \in I}^B E_i$ è limite induttivo degli spazi $\bigotimes_{i \in I}^{(b_\lambda^i)} E_i$, ovvero può essere pensato come limite induttivo di un sistema induttivo relativo all'insieme $G \times (\prod_{i \in I} L_i)$.

Lo spazio $\bigotimes_{i \in I}^B E_i$ altro non è, come facilmente si può verificare, che il sottospazio di $\bigotimes_{i \in I} E_i$ generato dai tensori decomponibili $\bigotimes_{i \in I} b_\lambda^i$, e viene detto prodotto tensoriale debole degli spazi E_i relativo alle basi B_i.

Ricordando che il prodotto tensoriale debole è limite induttivo di un particolare sistema induttivo ed usando convenientemente le proposizioni 9,10 e corollari del § 6 di [2], si ottengono i seguenti risultati :

a) $\dim \bigotimes_{i \in I}^{B} E_i = \prod_{i \in I} \dim E_i$

b) $\bigotimes_{i \in I}^{B} E_i = \bigotimes_{i \in I} E_i$ *se e solo se accade uno dei seguenti fatti:*

1) *l'insieme degli indici I è finito*

2) *qualche E_i è lo spazio nullo*

3) *quasi tutti gli E_i hanno cardinalità due.*

e quindi in tal caso « il prodotto tensoriale delle basi » risulta essere una base del prodotto tensoriale $\bigotimes_{i \in I} E_i$ e non, come in generale, del solo prodotto tensoriale debole relativo ad esse.

I risultati a) e b) sopra esposti sono già noti [3], magari in forma « naïf » ; la traduzione di quelle dimostrazioni sotto forma di limiti induttivi è immediata.

3. A noi interessa, soprattutto, invece, dare una risposta definitiva al seguente quesito: Data una famiglia arbitraria $(E_i)_{i \in I}$ di spazi vettoriali, determinare la dimensione di $\bigotimes_{i \in I} E_i$.

Poiché la risposta nel caso che I sia finito è nota, non ci resta che indagare nel caso che I sia infinito e $\bigotimes_{i \in I}^{B} E_i \subsetneqq \bigotimes_{i \in I} E_i$.

4. Lemma I. *Se I è un insieme infinito e K un corpo non isomorfo a Z_2, si ha:*

$$\dim \bigotimes_{i \in I} K_i \geq \operatorname{card} N \quad (K_i = K \textit{ per ogni } i \in I).$$

Dim. Supposto per assurdo che $\bigotimes_{i \in I} K_i$ abbia dimensione finita, si può considerare una base finita formata da tensori decomponibili, cioè del tipo $\bigotimes_{i \in I} \varkappa_i (\varkappa_i \in K)$. Detti tensori decomponibili, però, essendo in numero finito, non riescono a generare neppure tutti i possibili tensori decomponibili, a meno che K sia isomorfo a Z_2 (nel qual caso si ha: $\dim \bigotimes_{i \in I} K_i = 1$ e $\operatorname{card} \bigotimes_{i \in I} K_i = 2$, $K_i = Z_2$ per ogni $i \in I$).

Teorema I. *Sotto le stesse ipotesi del lemma* I *si ha*: $\dim \bigotimes_{i \in I} K_i = \operatorname{card} \bigotimes_{i \in I} K_i$ ($K_i = K$ *per ogni* $i \in I$).

Dim. Innanzitutto, essendo per il lemma precedente $\dim \bigotimes_{i \in I} K_i \geq \operatorname{card} N$, basta dimostrare che $\operatorname{card} K \leq \dim \bigotimes_{i \in I} K_i$. Infatti i tensori decomponibili $\bigotimes_{i \in I} \alpha_i$, con $\alpha_i = \alpha \neq 0$ $(\alpha \in K)$ per ogni $i \in I$, sono tutti distinti, in numero di $(\operatorname{card} K) - 1$ e sono linearmente indipendenti. La disuguaglianza $\operatorname{card} K \leq \dim \bigotimes_{i \in I} K_i$ segue immediatamente dal lemma precedente.

TEOREMA II. *Sia I un insieme infinito e K un corpo non isomorfo a Z_2. Presa una famiglia $(E_i)_{i \in I}$ di spazi vettoriali non nulli su K, si ha:*

$$\dim \bigotimes_{i \in I} E_i = \operatorname{card} \bigotimes_{i \in I} E_i .$$

Dim. Sia $\mathfrak{a}_i = \dim E_i$ e $\varphi_i \colon E_i \to K^{(\mathfrak{a}_i)}$ un isomorfismo fra gli spazi E_i e $K^{(\mathfrak{a}_i)}$. Detta $\psi_i^{(j)}$ la restrizione a $K^{(\mathfrak{a}_i)}$ della proiezione j-ma: $pr_j \colon \prod_{j \in \mathfrak{a}_i} K_j \to K_j$ ($K_j = K$ per ogni $j \in \mathfrak{a}_i$) si ottiene una applicazione lineare suriettiva $f_i^{(j)} = \psi_i^{(j)} \cdot \varphi_i \colon E_i \to K$. Ne consegue l'esistenza di una applicazione lineare suriettiva $f = \bigotimes_{i \in I} f_i^{(j)}$: $\bigotimes_{i \in I} E_i \to \bigotimes_{i \in I} K_i$ ($K_i = K$ per ogni $i \in I$).

Si ha quindi: $rg(f) = \dim \bigotimes_{i \in I} K_i \leq \dim \bigotimes_{i \in I} E_i$ da cui, essendo $\dim \bigotimes_{i \in I} E_i \geq \operatorname{card} N$ e $\operatorname{card} K \leq \dim \bigotimes_{i \in I} K_i$, consegue la tesi.

5. Resta ancora da vedere se è ancora valida la tesi del teorema II nel caso che K sia isomorfo a Z_2.

Innanzitutto, preso un insieme I qualsiasi si ha: $\bigotimes_{i \in I} Z_{2\,(i)} \simeq Z_2$ ($Z_{2\,(i)} = Z_2$ per ogni $i \in I$).

Fatta questa osservazione sia I un insieme qualsiasi ed $(E_i)_{i \in I}$ una famiglia di spazi vettoriali non nulli sul corpo Z_2. Si consideri, allora, la seguente partizione di I: $I = \mathcal{J} + H$, con

$$E_i \simeq Z_2 \text{ per } i \in \mathcal{J}, \qquad E_i \not\simeq Z_2 \text{ per } i \in H.$$

Si ha quindi:

$$\bigotimes_{i \in I} E_i \simeq \Big(\bigotimes_{i \in H} E_i\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{i \in \mathcal{J}} E_i\Big) \simeq \bigotimes_{i \in H} E_i .$$

Se l'insieme H è finito, il problema della ricerca della dimensione di $\bigotimes_{i \in I} E_i$ è di immediata soluzione.

Supponiamo che H sia infinito.

Rifacendo un analogo ragionamento del lemma I, si ottiene che la dimensione di $\bigotimes_{i \in H} Z^2_{2(i)}$ è infinita e ripetendo il procedimento del teorema II, non più su proiezioni ma su opportune applicazioni lineari suriettive, si ottiene:

$$\operatorname{card} \bigotimes_{i \in H} E_i = \dim \bigotimes_{i \in H} E_i .$$

In conclusione quindi si ha il seguente:

TEOREMA III. *Dato un corpo K isomorfo a Z_2 ed un insieme I e considerata una famiglia $(E_i)_{i \in I}$ di spazi vettoriali non nulli su K, tali che* $\dim E_i \geq 2$ *per un numero infinito di indici si ha*:

$$\operatorname{card} \bigotimes_{i \in I} E_i = \dim \bigotimes_{i \in I} E_i .$$

6. LEMMA II. *Se $(E_i)_{i \in I}$ è una famiglia infinita di spazi vettoriali su uno stesso corpo K tali che* $\operatorname{card} E_i \geq 3$ *(per ogni $i \in I$), si ha*:

$$\operatorname{card} \prod_{i \in I} E_i = \operatorname{card} \left(\prod_{i \in I} (E_i - \{0\}) \right).$$

LEMMA III. *Con le stesse notazioni del lemma* II *si ha*:

$$\operatorname{card} I \leq \operatorname{card} \bigotimes_{i \in I} E_i .$$

Dim. Essendo I infinito, esiste una partizione $(\mathcal{J}_\lambda)_{\lambda \in L}$ di I con $\operatorname{card} \mathcal{J}_\lambda = \operatorname{card} I = \operatorname{card} L$ per ogni $\lambda \in L$. Preso un elemento $(\alpha_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} (E_i - \{0\})$ si considerino i tensori decomponibili

$$\bigotimes_{\lambda \in L} \Big(\bigotimes_{i \in \mathcal{J}_\lambda} \varkappa_i \Big) \qquad \text{con } \varkappa_i = \alpha_i \quad \text{per } i \in \mathcal{J}_\lambda \text{ e } \varkappa_i \neq \begin{cases} \alpha_i \\ 0 \end{cases} \text{ per } i \notin \mathcal{J}_\lambda .$$

Detti elementi sono tutti distinti ed in numero di $\operatorname{card} I$; ne segue la tesi.

TEOREMA IV. *Se $(E_i)_{i \in I}$ è una famiglia infinita di spazi vettoriali su uno stesso corpo K tali che* $\operatorname{card} E_i \geq 3$ *(per ogni $i \in I$), si ha*:

$$\operatorname{card} \prod_{i \in I} E_i = \operatorname{card} \bigotimes_{i \in I} E_i .$$

Dim. Sia $f: \prod_{i \in I} E_i \to \bigotimes_{i \in I} E_i$ l'applicazione multilineare canonica e si consideri l'insieme $F = f(\prod_{i \in I} E_i)$ dei tensori decomponibili di $\bigotimes_{i \in I} E_i$, equipotente a $\bigotimes_{i \in I} E_i$. Poiché l'uguaglianza: $\bigotimes_{i \in I} x_i = \bigotimes_{i \in I} y_i$ $(x_i, y_i \in E_i)$ implica $x_i = \lambda_i y_i$ $(\lambda_i \in K \dot{-} \{1\})$ per un numero finito di indici e $x_i = y_i$ per i rimanenti altri indici, ne viene che, preso un tensore decomponibile non nullo $\bigotimes_{i \in I} x_i$, si ha:

$$\operatorname{card}(f^{-1}(\bigotimes_{i \in I} x_i)) \leq \operatorname{card} K^{(I)} = \operatorname{card} K \cdot \operatorname{card} I \leq \operatorname{card} F = \operatorname{card}(F \dot{-} \{0\}).$$

Da tutto ciò, essendo f una applicazione su F e gli insiemi $F \dot{-} \{0\}$ e $\prod_{i \in I} (E_i \dot{-} \{0\})$ infiniti, si ha:

$$\operatorname{card}(F \dot{-} \{0\}) = \operatorname{card}(\prod_{i \in I} (E_i \dot{-} \{0\}))$$

ovvero:

$$\operatorname{card} F = \operatorname{card} \bigotimes_{i \in I} E_i = \operatorname{card} \prod_{i \in I} E_i.$$

TEOREMA V. *Data una famiglia infinita $(E_i)_{i \in I}$ di spazi vettoriali non nulli su uno stesso corpo K, si ha:*

$$\dim \prod_{i \in I} E_i = \operatorname{card} \prod_{i \in I} E_i = \prod_{i \in I} \operatorname{card} E_i = (\operatorname{card} K)^{\operatorname{card} I} \cdot \prod_{i \in I} \dim E_i.$$

Dim. La dimostrazione è una immediata conseguenza del teorema di Erdös-Kaplanski e delle disuguaglianze:

$$\operatorname{card} K \leq \operatorname{card} K^I \leq \dim \prod_{i \in I} E_i.$$

Riassumendo quindi i vari risultati trovati si ottiene la seguente:

PROPOSIZIONE. *Sia $(E_i)_{i \in I}$ una famiglia infinita di spazi vettoriali su un corpo K, non nulli.*

a) Se K non è isomorfo a Z_2 si ha:

$$\dim \bigotimes_{i \in I} E_i = \dim \prod_{i \in I} E_i = (\operatorname{card} K)^{\operatorname{card} I} \cdot \prod_{i \in I} \dim E_i.$$

b) Se K è isomorfo a Z_2, detto H il sottoinsieme di I tale che $E_i \not\simeq Z_2$ per ogni $i \in H$, si ha:

b′) se H è finito:

$$\dim \bigotimes_{i \in I} E_i = \prod_{i \in H} \dim E_i = \prod_{i \in I} \dim E_i .$$

b″) se H è infinito:

$$\dim \bigotimes_{i \in I} E_i = \dim \left(\prod_{i \in H} E_i \right) = 2^{\operatorname{card} H} \cdot \prod_{i \in I} \dim E_i .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] N. Bourbaki, *Algèbre,* Ch. III - Algèbre multilinéaire, Hermann, Paris (1958).

[2] N. Bourbaki, *Algèbre,* Ch. II - Algèbre linéaire, Hermann, Paris (1962).

[3] S. Holzer, *Sul prodotto tensoriale di una infinità di K-spazi vettoriali,* Rend. Ist. Mat. Trieste - Vol. III, Fasc. II (1971).