SOLUZIONI FONDAMENTALI PRINCIPALI PER EQUAZIONI ELLITTICHE (*)

di RENATA SELVAGGI (a Bari) (**)

SOMMARIO. - *Seguendo il classico procedimento di Levi, si determina una soluzione fondamentale principale per equazioni ellittiche a coefficienti variabili del tipo* $\sum_{|p|\leq m} a_p(x) D^p u(x) + \lambda^m a_0 u(x) = 0$ *con* a_0 *costante diversa da zero,* λ *abbastanza grande e le* $a_p(x)$ *funzioni continue e limitate in* R^ν *i cui moduli di continuità verificano le condizioni del Dini.*

SUMMARY. - *In this paper, following the Levi's method, a principal fundamental solution has been determined for an elliptic equation with variable coefficients of the type* $\sum_{|p|\leq m} a_p(x) D^p u(x) + \lambda^m a_0 u(x) = 0$, *where* a_0 *is a non zero constant,* λ *is sufficiently large and* $a_p(x)$ *are functions bounded and continuous in all space, with modulus of continuity satisfying Dini's conditions.*

1. Introduzione.

Il problema della ricerca di una soluzione fondamentale principale per equazioni ellittiche a coefficienti variabili del tipo

$$\sum_{|p|\leq m} a_p(x) D^p u(x) + \lambda^m a_0 u(x) = 0 \tag{1.1}$$

(con $x \in R^\nu$, spazio reale euclideo a $\nu (\geq 2)$ dimensioni e $\lambda > 0$) i cui coefficienti siano funzioni reali o complesse, continue e limitate in

(*) Pervenuto in Redazione il 29 settembre 1972.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Analisi Matematica — Palazzo Ateneo — 70100 Bari.

R^ν, a_0 costante diversa da zero e λ abbastanza grande [1], è stato risolto da A. Avantaggiati in [1] facendo sul polinomio

$$P(x, \xi, \lambda) = \sum_{|p|=m} a_p(x)(i\xi)^p + a_0 \lambda^m \tag{1.2}$$

l'ipotesi che sia ellittico rispetto a $\xi_1, \dots, \xi_\nu, \lambda$, uniformemente al variare di x in R^ν, e sui coefficienti $a_p(x)$ per cui $|p| = m$ l'ipotesi di uniforme hölderianità in R^ν [2].

D'altra parte, Matiicuk e Eidel'mann in [2] provano l'esistenza «in piccolo» di una matrice fondamentale per sistemi uniformemente ellittici nel senso di Petrowskii i cui coefficienti hanno moduli di continuità che soddisfano le condizioni del Dini.

Mi è sembrato abbastanza naturale cercare di estendere il risultato di [1] sopra citato a equazioni del tipo (1.1) i cui coefficienti $a_p(x)$ verifichino le suddette condizioni del Dini, invece di essere hölderiane come è richiesto in [1].

Tale risultato è contenuto nel teorema (3.1). La dimostrazione di tale teorema si fonda, da un lato, su alcuni lemmi essenzialmente di natura algebrica ottenuti con lievi varianti da altri analoghi che si ritrovano nei n. 2 e n. 3 di [1]. Questi servono a stabilire opportune valutazioni asintotiche per la soluzione fondamentale dell'equazione a coefficienti costanti

$$\sum_{|p|=m} a_p D^p u(x) + \lambda^m a_0 u(x) = 0. \tag{1.3}$$

Dall'altro si fonda su alcuni lemmi, strettamente legati alla ipotesi che i coefficienti di (1.1) soddisfano le condizioni del Dini, e che costituiscono una adeguata estensione di altri utilizzati in [2].

Quello seguito, è il classico procedimento di Levi: si cerca la soluzione fondamentale principale $G(x, y, \lambda)$ della (1.1) sotto la forma:

$$G(x, y, \lambda) = F_1(y, x-y, \lambda) + \int_{R^\nu} F_1(z, x-z, \lambda)\, Z(z, y, \lambda)\, dz\,; \text{ [3]} \tag{1.4}$$

[1] Una soluzione fondamentale principale della (1.1) è una soluzione fondamentale della (1.1) definita in R^ν che con le sue derivate parziali di ordine $\leq m-1$ è infinitesima all'infinito di tipo esponenziale.

[2] In [1] è risolto il problema più in generale, cioè per sistemi ellittici a coefficienti variabili.

[3] Per il significato delle notazioni adoperate cfr. 2.

quindi, il problema della esistenza della $G(x, y, \lambda)$ è ricondotto a quello della convergenza della serie di Newmann relativa al nucleo K della equazione integrale, cui si traduce la condizione sulla $G(x, y, \lambda)$ di essere soluzione fondamentale della (1.1).

La verifica che la $G(x, y, \lambda)$, costruita mediante la (1.4), è soluzione fondamentale principale della (1.1) è essenzialmente basata su una proprietà (cfr. 3.A)) cui soddisfa la funzione $Z(x, y, \lambda)$, somma della serie di Newmann suddetta.

La dimostrazione di questa proprietà, nonché le maggiorazioni dei nuclei iterati K_m, costituiranno la parte più sostanziale del presente lavoro, (cfr. proposizione (3.1)).

Per quel che concerne la verifica che la funzione $G(x, y, \lambda)$ così determinata è una soluzione fondamentale principale della (1.1), rinviamo ai procedimenti di [1] (teor. (5.1)) per quanto riguarda il suo comportamento all'infinito, mentre, per il comportamento di $G(x, y, \lambda)$ per $y \to x$, basta tenere presente la condizione A) per la funzione $Z(x, y, \lambda)$ e i procedimenti di [2].

2. **Ipotesi, notazioni, premesse.**

Siano: R^ν lo spazio reale euclideo a $\nu\,(\geq 2)$ dimensioni; $x = (x_1, \dots, x_\nu)$, $y = (y_1, \dots, y_\nu)$ punti generici di R^ν. Per ogni coppia di punti $x, y \in R^\nu$, poniamo $x - y = (x_1 - y_1, \dots, x_\nu - y_\nu)$, $x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_\nu y_\nu$ e $|x| = \sqrt{x \cdot x}$.

$\Gamma(x, r)$ con $r > 0$, denoterà l'insieme $\{y \in R^\nu \mid |y| < r\}$. Con $p = (p_1, \dots, p_\nu)$, $q = (q_1, \dots, q_\nu)$ indicheremo ν-ple di interi non negativi e porremo $|p| = p_1 + \dots + p_\nu$.

Fissate due ν-ple p e q, $p \leq q$ significherà che per ogni indice $l = 1, \dots, \nu$, $p_l \leq q_l$; sotto questa condizione si porrà $q - p = (q_1 - p_1, \dots, q_\nu - p_\nu)$.

Per ogni $x \in R^\nu$ e per ogni $p = (p_1, \dots, p_\nu)$ porremo $x^p = x_1^{p_1} \dots x_\nu^{p_\nu}$. Inoltre sarà $D_l = \dfrac{\partial}{\partial x_l}$, $\dfrac{\partial}{\partial x} = D_x = (D_1, \dots, D_\nu)$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^p = D_x^p = D_1^{p_1} \dots D_\nu^{p_\nu}$.

Ci proponiamo di stabilire alcune proprietà algebriche per polinomi a coefficienti costanti in x e λ, con $x \in R^\nu$ e $\lambda > 0$, del tipo $P(x, \lambda) = \sum_{|p| = m} a_p x^p + \lambda^m a_0$ tali che

$$H^{-1}(\lambda + |x|)^m \leq |P(x, \lambda)| \leq H(\lambda + |x|)^m. \tag{2.1}$$

Se $P(x, \lambda)$ verifica la (2.1) allora evidentemente:

$$\left| \frac{D_x^r P(x, \lambda)}{P(x, \lambda)} \right| \leq \frac{K}{(\lambda + |x|)^r}$$

per ogni $x \in R^\nu$, per ogni $\lambda > 0$, per ogni ν-pla $r = (r_1, \dots, r_\nu)$ tale che $|r| > 0$.

Con la stessa tecnica adoperata nel n. 2 di [1] si provano i seguenti lemmi:

LEMMA 2.1 *Se $P(x, \lambda)$ verifica la (2.1), per ogni ν-pla $q = (q_1, \dots, q_\nu)$ esiste una costante positiva K_q dipendente da q tale che*

$$\left| D_x^q \frac{D_x^p P(x, \lambda)}{P(x, \lambda)} \right| \leq \frac{K_q}{(\lambda + |x|)^{|q|+|p|}}$$

per ogni $x \in R^\nu$, per ogni $\lambda > 0$, per ogni $|p| > 0$.

Fissati due punti ξ ed η appartenenti alla frontiera di $\Gamma(0, 1)$ tali che $\xi \cdot \eta = 0$, fissato un numero reale $t \geq 0$ ed un polinomio $P(x, \lambda)$, poniamo

$$P_*(r, \lambda) = P(\xi r + \eta t, \lambda). \tag{2.2}$$

LEMMA 2.2. *Se $P(x, \lambda)$ verifica la (2.1) esiste un numero positivo μ_0 indipendente da λ, ξ, η, t tale che comunque si prenda un numero positivo $\mu < \mu_0$ è possibile determinare un numero positivo α tale che per ogni numero complesso $\sigma + i\tau$ e per ogni $\lambda > 0$ per cui $|\tau| \leq \mu\ (\lambda + t)$ si ha:*

$$|P_*(\sigma + i\tau, \lambda)| > |P_*(\sigma, \lambda)|\, \alpha.$$

qualunque sia il numero reale σ.

LEMMA 2.3. *Se $P(x, \lambda)$ verifica la (2.1), comunque si fissino ξ ed η appartenenti alla frontiera di $\Gamma(0, 1)$ e t reale positivo, per ogni λ e per ogni radice z della equazione $P_*(z, \lambda) = 0$ si ha:*

$$|\operatorname{Im} z| \geq \mu_0 (\lambda + t).$$

Consideriamo ora polinomi del tipo

$$P(y, x, \lambda) = \sum_{|p| = m} a_p(y)\, x^p + a_0 \lambda^m$$

verificanti le seguenti ipotesi:

$\{2, a\}$: I coefficienti $a_p(y)$ di $P(y, x, \lambda)$ sono funzioni continue e limitate in R^ν, a_0 è una costante diversa da zero.

$\{2, b\}$: Esiste una costante K indipendente da y tale che

$$K^{-1}(\lambda + |x|)^m \leq |P(y, x, \lambda)| \leq K(\lambda + |x|)^m$$

per ogni $x \in R^\nu$, per ogni $\lambda > 0$, per ogni $y \in R^\nu$.

Dal lemma (2.3) discende immediatamente il

LEMMA 2.4. *Se $P(y, x, \lambda)$ verifica le ipotesi $\{2, a\}$ e $\{2, b\}$ è possibile determinare una costante μ_0 indipendente da ξ, η, t, λ, y, tale che per ogni radice z dell'equazione $P(y, \xi z + \eta t, \lambda) = 0$ sia verificata la*

$$\mu_0(\lambda + t) \leq |\operatorname{Im} z|.$$

Sia $f = f(x)$ una funzione continua e limitata in R^ν.

DEFINIZIONE 2.1. Si dice che *f è di classe $\mathcal{H}^1$ o che soddisfa alla condizione del Dini* se il suo modulo di continuità

$$\omega(h) = \sup_{|x-\xi| \leq h} |f(x) - f(\xi)|$$

ha la proprietà che per qualche valore positivo r l'integrale

$$F(r) = \int_0^r \frac{\omega(h)}{h}\, dh \tag{2.3}$$

converge.

DEFINIZIONE 2.2. Si dice che *f è di classe $\mathcal{H}^2$* in R^ν se è ivi di classe $\mathcal{H}^1$ e se

$$\Phi(a) = \int_0^a \frac{F(r)}{r}\, dr$$

è finita per qualche valore positivo di a.

Ricordiamo le seguenti proprietà, che utilizzeremo nel seguito, del modulo di continuità ω di una funzione $f = f(x)$ continua e limitata in R^ν:

P.1) ω è una funzione non negativa, non decrescente, semiadditiva e tale che

$$\frac{\omega(r)}{r} \leq 2\,\frac{\omega(h)}{h} \qquad (0 < h < r)$$

(cfr. [2] pag. 143).

P.2) Se f è di classe $\mathcal{H}^2$ si ha:

$$\lim_{h \to 0+} \omega(h) \log \frac{1}{h} = 0$$

(cfr. [2] pag. 165).

Consideriamo l'equazione differenziale (1.1) e supponiamo che per il polinomio $P(x, \xi, \lambda)$ dato da (1.2) siano verificate le ipotesi $\{2, a\}$ e $\{2, b\}$; supponiamo inoltre che i coefficienti $a_p(x)$ della (1.1) verifichino la seguente ipotesi:

$\{2, c\}$: I coefficienti $a_p(x)$ siano funzioni a valori reali o complessi definite in R^ν, continue e limitate; le funzioni $a_p(x)$ con $|p| = m$ siano di classe $\mathcal{H}^2$, le funzioni $a_p(x)$ con $|p| < m$ siano di classe $\mathcal{H}^1$.

Denoteremo nel seguito con $\omega = \omega(h)$ e $\omega_1 = \omega_1(h)$ rispettivamente il massimo modulo di continuità dei coefficienti $a_p(x)$ della (1.1) con $|p| = m$ e il massimo modulo di continuità dei coefficienti $a_p(x)$ con $|p| < m$.

Fissiamo un intero $N \geq 1$ tale che la funzione $(P(x, \xi, \lambda))^{-N}$, come funzione di ξ, sia sommabile in R^ν e consideriamo le funzioni

$$F(x, y, \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^\nu} \int_{R^\nu} \frac{e^{i\xi \cdot y}}{(P(x, \xi, \lambda))^N}\, d\xi$$

$$F_1(x, y, \lambda) = \left(P\left(x, \frac{\partial}{\partial y}, \lambda\right)\right)^{(N-1)} F(x, y, \lambda).$$

TEOREMA 2.1. *Esiste nn numero positivo μ_0 tale che per ogni $\mu \in]0, \mu_0[$ per ogni ν-pla $q = (q_1, \ldots, q_\nu)$, è possibile determinare una costante K tale che si abbia, per ogni $x \in R^\nu$, per λ abbastanza grande:*

$$|D_y^q F(x, y, \lambda)| \leq K e^{-\mu |y| \lambda} \frac{1}{\lambda^{N \cdot m - \nu - |q|}}$$

per $|y| \geq \dfrac{1}{\lambda}$.

Dim. Ragionando come per la dimostrazione del teorema (3.1) di [1] e fondandosi sui lemmi precedenti si trova:

$$|D_y^q F(x, y, \lambda)| \leq K' e^{-\mu|y|\lambda} \sum_{q' \leq q} \frac{I}{|y|^{r+|q|-|q'|}} \cdot$$

$$\cdot \int_{R^{\nu-1}} \frac{e^{-\mu|y|\zeta'}}{(\lambda + |\zeta'|)^{mN+r-|q'|-1}} d\zeta'$$

per $\lambda \geq 1$, dove: r è il più piccolo intero non negativo tale che $Nm + r - |q| > \nu$; μ è un elemento di $]0, \mu_0[$ dove μ_0 è la costante positiva che si determina in corrispondenza del polinomio $P(x, \xi, \lambda)$ applicando il lemma (2.4); K' è una costante dipendente da q. Per $|y| \geq \frac{1}{\lambda}$ si ha:

$$|D_y^q F(x, y, \lambda)| \leq K' e^{-\mu|y|\lambda} \sum_{q' \leq q} \frac{\lambda^{r+|q|-|q'|}}{\lambda^{Nm+r-|q'|-1}} \int_{R^{\nu-1}} e^{-\mu\frac{|\zeta'|}{\lambda}} d\zeta' =$$

$$= K \frac{e^{-\mu|y|\lambda}}{\lambda^{Nm-|q|-1}} \lambda^{\nu-1} = K \frac{e^{-\mu|y|\lambda}}{\lambda^{Nm-\nu-|q|}}$$

con K costante dipendente da q e da μ.

c.v.d..

TEOREMA 2.2. *Per ogni ν-pla $p = (p_1, \dots, p_\nu)$ è possibile determinare una costante H_p tale che per $0 < |y| < \frac{1}{\lambda}$ si abbia:*

$$(2.4) \qquad |D_y^p F_1(x, y, \lambda)| \leq \begin{cases} H_p & \text{se } |p| < m - \nu \\ H_p\left(\log \frac{1}{|y|} + 1\right) & \text{se } |p| = m - \nu \\ H_p |y|^{m-\nu-|p|} & \text{se } |p| > m - \nu. \end{cases}$$

Dim. Tenendo presente la definizione della funzione $F_1(x, y, \lambda)$, è facile verificare che

$$F_1(x, y, \lambda) = \lambda^{\nu-m} F_1(x, y\lambda, 1).$$

Dal teorema (3.3) di [1] segue allora che esiste una costante C_p (indipendente da x e λ) tale che per $0 < |y| < \frac{1}{\lambda}$ e per λ abbastanza grande:

$$|D_y^p F_1(x,y,\lambda)| \leq \begin{cases} C_p & \text{se } |p| < m-\nu \\ C_p\left(\log\frac{2}{|y|}\right)^2 & \text{se } |p| = m-\nu \\ C_p\,|y|^{m-\nu-|p|}\log\frac{2}{|y|} & \text{se } |p| > m-\nu \end{cases}$$

Inoltre per il teorema (5.1) di [1], per ogni fissato $x \in R^\nu$, in ogni $y \neq 0$ si ha:

$$\sum_{|p|=m} a_p(x)\, D_y^p F_1(x,y,\lambda) + \lambda^m a_0 F_1(x,y,\lambda) = 0. \tag{2.5}$$

Fissato $x \in R^\nu$, $F_1(x,y,\lambda)$ come funzione di y, è di classe C^∞ in $R^\nu - \{0\}$ ed è inoltre tale che per ogni ν-pla $p = (p_1, \dots, p_\nu)$ con $|p| = m-1$

$$\lim_{y\to 0} |y|^\nu D_y^p F_1(x,y,\lambda) = 0$$

uniformemente rispetto a $x \in R^\nu$.

Per il lemma a pag. 57 di [3] segue che

$$F_1(x,y,\lambda) = H(x,y,\lambda) + w(x,y,\lambda) \tag{2.6}$$

dove $w(x,y,\lambda)$ è una soluzione dell'equazione

$$\sum_{|p|=m} a_p(x)\, D_y^p u(y) + a_0 \lambda^m u(y) = 0 \tag{2.7}$$

regolare ed analitica per $y = 0$ la cui espressione esplicita viene data in [3] pag. 61; $H(x; y-t, \lambda)$ è la soluzione fondamentale della (2.7) costruita in [3] (pag. 65).

Tenendo presenti i teoremi di struttura per la soluzione fondamentale $H(x; y-t, \lambda)$ stabiliti in [3] pag. 61, è facile verificare che:

$$H(x,y,\lambda) = H_1(x,y) + H_2(x,y,\lambda) \tag{2 8}$$

dove $H_1(x, y-t)$ è la soluzione fondamentale dell'equazione $\sum_{|p|=m} a_p(x)\, D_y^p u(y) = 0$

$$H_2(x, y-t, \lambda) = 0\,(\,|y-t|^{m+1-\nu}).$$

Dall'ipotesi $\{2,b\}$ segue l'asserto.

c.v.d..

3. Teorema di esistenza della soluzione fondamentale principale.

TEOREMA 3.1. *Nelle ipotesi* $\{2, b\}$ *e* $\{2, c\}$ *esiste un numero reale positivo* λ_0 *tale che per ogni* $\lambda \geq \lambda_0$ *l'equazione* (1.1) *ha una soluzione fondamentale principale* $G(x, y, \lambda)$.

Dim. Cercheremo la soluzione fondamentale principale $G(x, y, \lambda)$ della (1.1) sotto la forma:

$$G(x, y, \lambda) = F_1(y, x - y, \lambda) + \int_{R^\nu} F_1(z, x - z, \lambda) Z(z, y, \lambda)\, dz \tag{3.1}$$

nell'ipotesi che la funzione $Z(x, y, \lambda)$ verifichi la seguente condizione

A): $Z(x, y, \lambda)$ è una funzione continua separatamente rispetto a x e y purchè sia $y \neq x$, inoltre per ogni $\mu < \mu_0$ esistono C e C' in modo che

$$|Z(x, y, \lambda)| \leq C e^{-\mu \frac{\lambda}{2} |x-y|} \frac{\omega(|x - y|)}{|x - y|^\nu} \tag{3.2}$$

e localmente (4):

$$|\Delta_h Z(x, y, \lambda)| = |Z(x + h, y, \lambda) - Z(x, y, \lambda)| \leq \tag{3.3}$$

$$\leq C' (e^{-\mu \frac{\lambda}{4} |x+h-y|} + e^{-\mu \frac{\lambda}{4} |x-y|}) (\omega_1(|h|) +$$

$$+ F(|h|)) \left(\frac{1}{|x - y|^\nu} + \frac{1}{|x + h - y|^\nu} \right)$$

dove μ_0 è il numero reale positivo del teorema (2.1).

Imponiamo alla funzione $G(x, y, \lambda)$ data da (3.1) di essere soluzione della (1.1) per $x \neq y$: tenendo presente il teorema (2.2) e le (3.2) (3.3), applicando i soliti metodi della teoria del potenziale (vedi [2] pag. 149) si ha:

$$K(x, y, \lambda) + \int_{R^\nu} K(x, z, \lambda) Z(z, y, \lambda)\, dz = Z(x, y, \lambda) \tag{3.4}$$

(4) Ovvero per x e y variabili in un insieme limitato di R^ν.

dove

(3.5) $$K(x,y,\lambda)=-\sum_{|p|\leq m} a_p(x)D_x^p F_1(y,x-y,\lambda)-\lambda^m a_0 F_1(y,x-y,\lambda).$$

Costruiamo la serie di Newmann relativa al nucleo K: proveremo la seguente

Proposizione 3.1. *Esiste un numero reale positivo λ_0 tale che per ogni $\lambda\geq\lambda_0$ risulta:*

I) *La serie di Newmann relativa al nucleo K converge;*

II) *La funzione $Z(x,y,\lambda)$, somma della serie di Newmann relativa al nucleo K, verifica la condizione A).*

Premettiamo i seguenti lemmi.

Lemma 3.1. *Per ogni $\mu\in]0,\mu_0[$ (5) esiste una costante $C>0$ tale che per λ abbastanza grande si abbia*

$$|K(x,y,\lambda)|\leq C\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}e^{-\mu\lambda|x-y|}.$$

Dim. Per la definizione stessa di K, dalla (2.5), si ha:

$$|K(x,y,\lambda)|=\Big|\sum_{|p|=m}(a_p(y)-a_p(x))D_x^pF_1(y,x-y,\lambda)+$$

$$-\sum_{|p|<m}a_p(x)D_x^pF_1(y,x-y,\lambda)\Big|.$$

Tenendo presente il teorema (2.2) si ha, per $|x-y|\leq\frac{1}{\lambda}<1$:

$$|K(x,y,\lambda)|\leq C_1\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}+0(|x-y|^{1-\nu});$$

quindi, per λ abbastanza grande e per $|x-y|\leq\frac{1}{\lambda}$ si ha

$$|K(x,y,\lambda)|\leq C_1\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}\leq C\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}e^{-\mu\lambda|x-y|}.$$

(5) μ_0 è la costante positiva determinata nel teorema (2.1).

Fissiamo $\mu, \mu' \in]0, \mu_0[$, con $\mu < \mu'$. Per il teorema (2.1) in corrispondenza di μ' è possibile determinare una costante C_1 tale che per $|x - y| > \frac{1}{\lambda}$ si abbia:

$$| K(x, y, \lambda) | \leq C_1 [\lambda^\nu e^{-\mu' \lambda |x-y|} \omega(|x - y|) +$$

$$+ \sum_{|p| < m} \lambda^{|p| + \nu - m} e^{-\mu' \lambda |x-y|}].$$

Quindi per λ abbastanza grande, per $|x - y| \geq \frac{1}{\lambda}$:

$$| K(x, y, \lambda) | \leq C_1 [\omega(|x - y|) \lambda^\nu e^{-\mu' \lambda |x-y|} + \lambda^{\nu-1} e^{-\mu' \lambda |x-y|}].$$

Osserviamo ancora che, per λ abbastanza grande, per $|x-y| \geq \frac{1}{\lambda}$, il secondo addendo può essere maggiorato col primo. Infatti, per la P.1) del modulo di continuità, risulta che, se la funzione di cui ω è modulo di continuità non è una funzione costante, $\lim'_{h \to 0^+} \frac{\omega(h)}{h} > 0$. Esiste quindi una costante C_2 tale che per λ abbastanza grande si abbia:

$$1 < C_2 \, \omega\left(\frac{1}{\lambda}\right) \lambda \leq C_2 \, \omega(|x - y|) \lambda \qquad \left(|x - y| \geq \frac{1}{\lambda}\right).$$

D'altra parte, per $|x - y| \geq \frac{1}{\lambda}$, posto $C' = \max_{t \geq 1} (t^\nu e^{-(\mu' - \mu) t})$ si ha:

$$\omega(|x - y|) \lambda^\nu e^{-\mu' \lambda |x-y|} = \frac{\omega(|x - y|)}{|x - y|^\nu} (|x - y|^\nu \lambda^\nu e^{-(\mu' - \mu) \lambda |x-y|}).$$

$$\cdot e^{-\mu \lambda |x-y|} \leq C' \frac{\omega(|x - y|)}{|x - y|^\nu} e^{-\mu \lambda |x-y|}.$$

Quindi, anche per $|x - y| \geq \frac{1}{\lambda}$, per λ abbastanza grande si ha:

$$| K(x, y, \lambda) | \leq C \frac{\omega(|x - y|)}{|x - y|^\nu} e^{-\mu \lambda |x-y|}.$$

c.v.d..

Nel seguito supporremo fissata la costante $\mu \in]0, \mu_0[$ e di conseguenza la costante C del lemma precedente.

LEMMA 3.2. *Per l'integrale*

$$L = \int_{R^\nu} \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^\nu} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^\nu} e^{-\mu\lambda \frac{|x-\xi|}{2^2}} d\xi$$

sussiste la seguente limitazione:

$$|L| \leq \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu} \left[H_1 F\left(\frac{2}{\lambda}\right) + H_2 \omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]$$

dove H_1 e H_2 sono due costanti indipendenti da x, y, λ e $F = F(r)$ è la funzione definita dalla (2.3).

Dim. Considerato l'iperpiano passante per il punto medio del segmento congiungente x e y, perpendicolare al segmento stesso, denotiamo con $R^\nu(x)$ e $R^\nu(y)$ rispettivamente i semispazi contenenti il punto x e il punto y. Allora:

$$L = \int_{R^\nu} \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^\nu} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^\nu} e^{-\mu \frac{\lambda}{2^2}|x-\xi|} d\xi = \int_{R^\nu(x)} \dots d\xi + \int_{R^\nu(y)} \dots d\xi =$$
$$= L_1 + L_2 .$$

Poichè in $R^\nu(x)$ è $|y-\xi| \geq \frac{1}{2}|x-y|$, dalla P.1) del modulo di continuità segue che:

$$|L_1| \leq 2^\nu \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu} \int_{R^\nu(x)} \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^\nu} e^{-\mu \frac{\lambda}{2^2}|x-\xi|} d\xi \leq$$

$$\leq 2^\nu \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu} \left[\int_{|x-\xi| \leq \frac{1}{\lambda}} \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^\nu} e^{-\mu \frac{\lambda}{2^2}|x-\xi|} d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_{|x-\xi| > \frac{1}{\lambda}} \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^\nu} e^{-\mu \frac{\lambda}{2^2}|x-\xi|} d\xi \right] \leq$$

$$\leq 2^\nu \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}\left[\int\limits_{|x-\xi|\leq\frac{1}{\lambda}} \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^\nu} d\xi + \right.$$

$$\left. + 2^\nu \omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda^\nu \int\limits_{R^\nu} e^{-\mu\frac{\lambda}{2^2}|x-\xi|} d\xi\right] =$$

$$= 2^\nu \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}\left[S_\nu F\left(\frac{2}{\lambda}\right) + 2^\nu \omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda^\nu S_\nu \int_0^{+\infty} e^{-\mu\frac{\lambda}{2^2}t} t^{\nu-1} dt\right] =$$

$$= 2^\nu \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}\left[S_\nu F\left(\frac{2}{\lambda}\right) + 2^\nu \omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda^\nu S_\nu \frac{M}{\lambda^\nu}\right]$$

dove S_ν è l'area della superficie della sfera unitaria di R^ν. La stessa maggiorazione sussiste per L_2.

Ponendo $H_1 = 2^{\nu+1} S_\nu$, $H_2 = 2^{2\nu+1} S_\nu M$, segue l'asserto.

c. v. d..

LEMMA 3.3. *Posto*

$$K_0(x, y, \lambda) = K(x, y, \lambda)$$

$$\forall\, n \in N: K_n(x, y, \lambda) = \int\limits_{R^\nu} K(x, \xi, \lambda) K_{n-1}(\xi, y, \lambda)\, d\xi$$

si ha che:

$$|K_n(x, y, \lambda)| \leq C^{n+1}\left[H_1 F\left(\frac{2}{\lambda}\right) + H_2 \omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]^n \cdot$$

$$\cdot e^{-\mu\frac{\lambda}{2}|x-y|} e^{-\mu\frac{\lambda}{2^{n+1}}|x-y|} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu} \qquad \forall\, n \in N$$

DIM. L'asserto è vero per $n = 0$ in virtù del lemma (3.1). Supposto vero l'asserto per $n - 1$, proviamo che è vero per n. Per il lemma (3.1) e per l'ipotesi di induzione si ha:

$$|K_n(x, y, \lambda)| \leq C^{n+1}\left[H_1 F\left(\frac{2}{\lambda}\right) + H_2 \omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{R^\nu} \frac{\omega(|x-\xi|)}{|x-\xi|^\nu} \frac{\omega(|y-\xi|)}{|y-\xi|^\nu} e^{-\mu\lambda|x-\xi|} e^{-\mu\frac{\lambda}{2}|y-\xi|} e^{-\mu\frac{\lambda}{2^n}|y-\xi|} d\xi \leq$$

$$\leq C^{n+1}\left[H_1 F\left(\frac{2}{\lambda}\right)+H_2\,\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]^{n-1} e^{-\mu\frac{\lambda}{2}|x-y|}\, e^{-\mu\frac{\lambda}{2^{n+1}}|x-y|} L.$$

Dal lemma (3.2) segue l'asserto.

c.v.d..

Proviamo, ora, *la proposizione* (3.1).

Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} K_n(x, y, \lambda)$ e osserviamo che, per il lemma (3.3) è maggiorata dalla serie di termine generale

$$C\left[CH_1 F\left(\frac{2}{\lambda}\right)+CH_2\,\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]^n e^{-\mu\frac{\lambda}{2}|x-y|}\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}.$$

Esiste λ_0 tale che per $\lambda \geq \lambda_0$ si ha che:

$$CH_1 F\left(\frac{2}{\lambda}\right)+CH_2\,\omega\left(\frac{1}{\lambda}\right)\leq \varrho < 1.$$

La funzione $Z(x, y, \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} K_n(x, y, \lambda)$ è per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ continua per $x \neq y$ ed è soluzione dell'equazione integrale (3.4). Resta così provata la I).

Proviamo la II). Intanto, è immediato verificare che

$$|Z(x, y, \lambda)| \leq C e^{-\mu\frac{\lambda}{2}|x-y|}\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}$$

cioè che $Z(x, y, \lambda)$ verifica la (3.2). Dimostriamo che verifica la (3.3).

Per $|x-y| \leq 4|h|$ la richiesta limitazione segue immediatamente dalla (3.2) e dalla P.1) del modulo di continuità.

Supponiamo $|x-y|>4|h|$. Dalla (3.5) si ha che

$$|\Delta_h K(x, y, \lambda)| = |K(x+h, y, \lambda)-K(x, y, \lambda)| =$$

$$=\Big|\sum_{|p|\leq m}(\Delta_h a_p(x))\, D_x^p F_1(y, x-y+h, \lambda)+$$

$$+\sum_{|p|<m} a_p(x)\,\Delta_h D_x^p F_1(y, x-y, \lambda)+\sum_{|p|=m} a_p(x)\,\Delta_h D_x^p F_1(y, x-y, \lambda)+$$

$$+\lambda^m a_0\,\Delta_h F_1(y, x-y, \lambda)\Big|.$$

Sottraendo la quantità

$$\sum_{|p|=m} a_p(y)\, \Delta_h D_x^p F_1(y, x-y, \lambda) + \lambda^m a_0 \Delta_h F_1(y, x-y, \lambda)$$

che è nulla per la (2.5), si ha:

$$|\Delta_h K(x, y, \lambda)| = \Big| \sum_{|p|\leq m} (\Delta_h a_p(x))\, D_x^p F_1(y, x+h-y, \lambda) +$$

$$+ \sum_{|p|<m} a_p(x)\, \Delta_h D_x^p F_1(y, x-y, \lambda) + \sum_{|p|=m} (a_p(x) - a_p(y))\cdot$$

$$\cdot \Delta_h D_x^p F_1(y, x-y, \lambda) \Big| .$$

Tenendo presente il teorema (2.1) ed il teorema (2.2), ragionando come nel lemma (3.1), è facile verificare che esiste una costante positiva H indipendente da x, y, h, λ tale che per $|p| = m$ si abbia:

$$|D_x^p F_1(y, x+h-y, \lambda)| \leq H e^{-\mu\lambda |x+h-y|} \frac{1}{|x+h-y|^\nu} .$$

Allora:

$$\Big| \sum_{|p|=m} \Delta_h a_p(x)\, D_x^p F_1(y, x+h-y, \lambda) \Big| \leq H\, \omega(|h|) \frac{e^{-\mu\lambda |x+h-y|}}{|x+h-y|^\nu} .$$

In maniera analoga e applicando il teorema del valor medio si trova:

$$\Big| \sum_{|p|=m} (a_p(x) - a_p(y))\, \Delta_h D_x^p F_1(y, x-y, \lambda) \Big| \leq$$

$$\leq H\, \omega(|x-y|)\, e^{-\mu\lambda |x+Qh-y|} \frac{|h|}{|x+Qh-y|^{\nu+1}}$$

dove $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu)$ con $Q_s \in]0, 1[\ \forall s \in \{1, \ldots, \nu\}$.

Sempre per il teorema (2.1) e per il teorema (2.2) si ha che per λ abbastanza grande e per $|p| < m$:

$$|D_x^p F_1(y, x+h-y, \lambda)| \leq \begin{cases} H e^{-\mu'\lambda |x+h-y|}\, \lambda^{\nu-1} & \text{se } \ |x+h-y| \geq \dfrac{1}{\lambda} \\ H \dfrac{1}{|x+h-y|^{\nu-1}} & \text{se } \ |x+h-y| < \dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

con $\mu' \in]0, \mu_0[$.

Ragionando quindi come nel lemma (3.1) si trova che i termini del tipo $| \Delta_h a_p(x) D_x^p F_1(y, x+h-y, \lambda) |$ $(|p| < m)$ possono essere maggiorati da

$$H \omega_1(|h|) e^{-\mu\lambda |x+h-y|} \frac{1}{|x+h-y|^{\nu-1}} .$$

In maniera analoga e applicando il teorema del valore medio si vede che i termini del tipo $| a_p(x) \Delta_h D_x^p F_1(y, x-y, \lambda) |$ $(|p| < m)$ possono essere maggiorati da

$$H |h| e^{-\mu\lambda |x+Qh-y|} \frac{1}{|x+Qh-y|^{\nu}} .$$

In definitiva si ha:

$$| \Delta_h K(x, y, \lambda) | \leq H \left[\omega(|h|) \frac{e^{-\mu\lambda |x+h-y|}}{|x+h-y|^{\nu}} + \right.$$

$$+ \omega(|x-y|) \frac{e^{-\mu\lambda |x+Qh-y|}}{|x+Qh-y|^{\nu+1}} |h| + \omega_1(|h|) \frac{e^{-\mu\lambda |x+h-y|}}{|x+h-y|^{\nu-1}} +$$

$$\left. + |h| \frac{e^{-\mu\lambda |x+Qh-y|}}{|x+Qh-y|^{\nu}} \right] .$$

Essendo $|x-y| > 4|h|$ si ha:

$$|x+Qh-y| > \frac{3}{4} |x-y| ; \quad |x+h-y| > \frac{3}{4} |x-y| .$$

Quindi per $|h|$ abbastanza piccolo:

$$| \Delta_h K(x, y, \lambda) | \leq H e^{-\mu\lambda \frac{3}{4} |x-y|} \left[\frac{\omega(|h|)}{|x-y|^{\nu}} + \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|} \frac{|h|}{|x-y|^{\nu}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_1(|h|)}{|x-y|^{\nu-1}} + \frac{|h|}{|x-y|^{\nu}} \right] .$$

Quindi

(3.6) $$| \Delta_h K(x, y, \lambda) | \leq H' e^{-\mu \frac{\lambda}{4} |x-y|} \left[\frac{\omega(|h|)}{|x-y|^{\nu}} + \frac{\omega_1(|h|)}{|x-y|^{\nu-1}} \right] .$$

Ci proponiamo ora di trovare una analoga maggiorazione per

$$\left| \Delta_h \int_{R^\nu} K(x, z, \lambda)\, Z(z, y, \lambda)\, dz \right| .$$

Essendo $|x - y| > 4|h|$, sarà $\Gamma(x, 2|h|) \subset R^\nu(x)$. Allora:

$$\int_{R^\nu} \Delta_h K(x, z, \lambda)\, Z(z, y, \lambda)\, dz = \int_{\Gamma(x, 2|h|)} \ldots dz + \int_{R^\nu(x) - \Gamma(x, 2|h|)} \ldots dz + \tag{3.7}$$

$$+ \int_{R^\nu(y)} \ldots dz = I_1 + I_2 + I_3 .$$

Per il lemma (3.1) e per la (3.2) si ha che:

$$|I_1| \leq \int_{\Gamma(x, 2|h|)} (|K(x+h, z, \lambda)| + |K(x, z, \lambda)|)\, |Z(z, y, \lambda)|\, dz \leq$$

$$\leq C^2 \int_{\Gamma(x, 2|h|)} e^{-\mu \frac{\lambda}{2} |z-y|} \frac{\omega(|z-y|)}{|z-y|^\nu} \left(\frac{\omega(|x+h-z|)}{|x+h-z|^\nu} e^{-\mu\lambda|x+h-z|} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega(|x-z|)}{|x-z|^\nu} e^{-\mu\lambda|x-z|} \right) dz.$$

Ma se $|x - z| \leq 2|h|$, allora $|z - y| \geq \dfrac{|x-y|}{2}$, quindi:

$$|I_1| \leq C^2 e^{-\mu \frac{\lambda}{4} |x-y|}\, 2^\nu \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu} \left[\int_{\Gamma(x, 2|h|)} e^{-\mu\lambda|x+h-z|} \frac{\omega(|x+h-z|)}{|x+h-z|^\nu}\, dz + \right.$$

$$\left. + \int_{\Gamma(x, 2|h|)} e^{-\mu\lambda|x-z|} \frac{\omega(|x-z|)}{|x-z|^\nu}\, dz \right] = [J_1 + J_2]\, C^2\, 2^\nu e^{-\mu \frac{\lambda}{4} |x-y|} \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}$$

con ovvio significato di J_1 e J_2.

$$J_1 = \int\limits_{\Gamma(x,\, 2\,|\,h\,|)} e^{-\mu\lambda\,|\,x+h-z\,|}\, \frac{\omega(|\,x+h-z\,|)}{|\,x+h-z\,|^{\nu}}\, dz = \int\limits_{\substack{|\,x-z\,| \leq 2\,|\,h\,| \\ |\,x+h-z\,| < 2\,|\,h\,|}} \dots dz \, +$$

$$+ \int\limits_{|\,x-z\,| \leq 2\,|\,h\,| \leq |\,x+h-z\,|} \dots dz \leq \int\limits_{|\,x+h-z\,| \leq 2\,|\,h\,|} e^{-\mu\lambda\,|\,x+h-z\,|}\, \frac{\omega(|\,x+h-z\,|)}{|\,x+h-z\,|^{\nu}}\, dz \, +$$

$$+ \int\limits_{|\,x-z\,| \leq 2\,|\,h\,| \leq |\,x+h-z\,|} e^{-\mu\lambda\,|\,x-z\,|}\, 2^{\nu}\, \frac{\omega(|\,x-z\,|)}{|\,x-z\,|^{\nu}}\, dz \leq$$

$$\leq \int\limits_{|\,x-z\,| \leq 2\,|\,h\,|} e^{-\mu\lambda\,|\,x-z\,|}\, \frac{\omega(|\,x-z\,|)}{|\,x-z\,|^{\nu}}\, dz + 2^{\nu} \int\limits_{|\,x-z\,| \leq 2\,|\,h\,|} e^{-\mu\lambda\,|\,x-z\,|}\, \frac{\omega(|\,x-z\,|)}{|\,x-z\,|^{\nu}}\, dz \leq C' J_2 .$$

Quindi

$$(3.8) \qquad |\,I_1\,| \leq C_1\, e^{-\mu \frac{\lambda}{4}\,|\,x-y\,|}\, \frac{\omega(|\,x-y\,|)}{|\,x-y\,|^{\nu}}\, J_2 \leq$$

$$\leq C_1\, e^{-\mu \frac{\lambda}{4}\,|\,x-y\,|}\, \frac{\omega(|\,x-y\,|)}{|\,x-y\,|^{\nu}}\, F(|\,h\,|).$$

Tenendo presente la (3 6) si ha che:

$$|\,I_2\,| \leq \int\limits_{R^{\nu}(x) - \Gamma(x,\, 2\,|\,h\,|)} |\,\Delta_h K(x, z, \lambda)\,|\; |\,Z(z, y, \lambda)\,|\, dz \leq$$

$$\leq H \int\limits_{R^{\nu}(x) - \Gamma(x,\, 2\,|\,h\,|)} e^{-\mu \frac{\lambda}{2}(|\,x-z\,| + |\,z-y\,|)} \left(\frac{\omega(|\,h\,|)}{|\,x-z\,|^{\nu}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_1(|\,h\,|)}{|\,x-y\,|^{\nu-1}} \right) \frac{\omega(|\,z-y\,|)}{|\,z-y\,|^{\nu}}\, dz \leq$$

$$\leq H e^{-\mu \frac{\lambda}{4}\,|\,x-y\,|}\, 2^{\nu}\, \frac{\omega(|\,x-y\,|)}{|\,x-y\,|^{\nu}} \left[\int\limits_{R^{\nu}(x) - \Gamma(x,\, 2\,|\,h\,|)} e^{-\mu \frac{\lambda}{2}\,|\,x-z\,|}\, \frac{\omega(|\,h\,|)}{|\,x-z\,|^{\nu}}\, dz \, + \right.$$

$$+\int_{R^\nu(x)-\Gamma(x,2|h|)} e^{-\mu\frac{\lambda}{2}|x-z|}\frac{\omega_1(|h|)}{|x-z|^{\nu-1}}dz\Bigg]\leq$$

$$\leq H\,2^\nu e^{-\mu\frac{\lambda}{4}|x-y|}\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}\left[\omega(|h|)\,S_\nu\int_{2|h|}^{+\infty}\frac{e^{-\mu\frac{\lambda}{2}t}}{t}dt+\right.$$

$$\left.+\,\omega_1(|h|)\,S_\nu\int_0^{+\infty}e^{-\mu\frac{\lambda}{2}t}dt\right].$$

Osserviamo che:

$$\int_{2|h|}^{+\infty}\frac{e^{-\mu\frac{\lambda}{2}t}}{t}dt\leq\log\frac{1}{|h|}+\int_1^{+\infty}e^{-\mu\frac{\lambda}{2}t}dt.$$

In definitiva è possibile determinare una costante H tale che

$$|I_2|\leq He^{-\mu\frac{\lambda}{4}|x-y|}\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}\left[\omega(|h|)\left(\log\frac{1}{|h|}+M_1\right)+\omega_1(|h|)\right];$$

quindi per $|h|$ abbastanza piccolo:

$$(3.9)\quad |I_2|\leq He^{-\mu\frac{\lambda}{4}|x-y|}\frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^\nu}\left[\omega(|h|)\log\frac{1}{|h|}+\omega_1(|h|)\right].$$

Analogamente

$$|I_3|\leq\int_{R^\nu(y)}|\Delta_h K(x,z,\lambda)|\,|Z(z,y,\lambda)|\,dz\leq$$

$$\leq H\int_{R^\nu(y)}e^{-\mu\frac{\lambda}{2}(|x-z|+|z-y|)}\left(\frac{\omega(|h|)}{|x-z|^\nu}+\frac{\omega_1(|h|)}{|x-z|^{\nu-1}}\right)\frac{\omega(|z-y|)}{|z-y|^\nu}dz\leq$$

$$\leq H'\,e^{-\mu\frac{\lambda}{4}|x-y|}\left[\frac{\omega(|h|)}{|x-y|^\nu}+\frac{\omega_1(|h|)}{|x-y|^{\nu-1}}\right]\int_{R^\nu(y)}e^{-\mu\frac{\lambda}{2}|z-y|}\frac{\omega(|z-y|)}{|z-y|^\nu}dz.$$

Quindi

$$(3.10)\qquad | I_3 | \leq He^{-\mu \frac{\lambda}{4} | x-y |} \left[\frac{\omega(|h|)}{|x-y|^{\nu}} + \frac{\omega_1(|h|)}{|x-y|^{\nu-1}} \right].$$

In definitiva, dalle (3.6) (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) segue che per $|x-y| > 4|h|$

$$| \Delta_h Z(x, y, \lambda) | = \left| \Delta_h K(x, y, \lambda) + \Delta_h \int_{R^{\nu}} K(x, z, \lambda) Z(z, y, \lambda)\, dz \right| \leq$$

$$\leq He^{-\mu \frac{\lambda}{4} | x-y |} \left[\frac{\omega(|h|)}{|x-y|^{\nu}} + \frac{\omega_1(|h|)}{|x-y|^{\nu-1}} + \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^{\nu}} F(|h|) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^{\nu}} \omega(|h|) \log \frac{1}{|h|} + \frac{\omega(|x-y|)}{|x-y|^{\nu}} \omega_1(|h|) \right].$$

Essendo i coefficienti della (1.1) funzioni limitate in R^{ν}, si ha che esiste $M > 0$ tale che $\omega(r) \leq M$ per ogni $r \geq 0$.

Tenendo presente la P.2) del modulo di continuità si ha che per $|h|$ abbastanza piccolo

$$(3.11)\qquad | \Delta_h Z(x, y, \lambda) | \leq$$

$$\leq He^{-\mu \frac{\lambda}{4} | x-y |} \left[\frac{F(|h|)}{|x-y|^{\nu}} + \frac{\omega(|h|)}{|x-y|^{\nu}} \log \frac{1}{|h|} + \frac{\omega_1(|h|)}{|x-y|^{\nu}} \right].$$

Utilizzando la (3.11), si ottiene una maggiorazione migliore per I_2 che consente di provare la (3.3), procedendo come in [2]: cioè

$$I_2 = \int_{R^{\nu}(x) - \Gamma(x, 2|h|)} (\Delta_h K(x, z, \lambda))\, Z(z, y, \lambda)\, dz =$$

$$= \int_{R^{\nu}(x) - \Gamma(x, 2|h|)} (\Delta_h K(x, z, \lambda))\, (Z(z, y, \lambda) - Z(x, y, \lambda))\, dz +$$

$$+ \int_{R^{\nu}(x) - \Gamma(x, 2|h|)} (\Delta_h K(x, z, \lambda))\, Z(x, y, \lambda)\, dz = I_1' + I_2^2$$

e

$$| I_1' | \leq \frac{H}{| x - y |^{\nu}} e^{-\mu \frac{\lambda}{4} | x - y |} [\omega_1 (| h |) + F (| h |)].$$

$$| I_2^2 | \leq M \left[\omega_1 (| h |) + | h | \log \frac{1}{|h|} + \omega (| h |) + \right.$$

$$\left. + \omega (| h |) \right| \int_{2 | h | < | x - z | < \frac{1}{2} | x - y |} [D_x^p F_1 (\eta, x - z, \lambda)]_{\eta = x} dz \left| \, | Z (x, y, \lambda) | \right. .$$

Tenendo presente la (2.5), la (2.7) e la proprietà 2 di [2] (pag. 148), è facile verificare che:

$$| I_2^2 | \leq M \left[\omega_1 (| h |) + \omega (| h |) \log \frac{2}{| x - y |} \right] e^{-\mu \frac{\lambda}{4} | x - y |} \frac{\omega (| x - y |)}{| x - y |^{\nu}} .$$

In definitiva:

$$| I_2 | \leq M e^{-\mu \frac{\lambda}{4} | x - y |} [\omega_1 (| h |) + F (| h |)] \left[\frac{1}{| x - y |^{\nu}} + \frac{1}{| x + h - y |^{\nu}} \right] .$$

Resta così completamente provata la proposizione (3.1) e, di conseguenza, il teorema (3.1).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Avantaggiati: *Sulle matrici fondamentali principali per una classe di sistemi differenziali ellittici e ipoellittici* Annali di Matematica Pura ed Appl. (IV) LXV pp. 191-238.

[2] Maticuk Eidel'mann: *On fundamental solution of elliptic systems.* American Mathematical Society Translation (1968).

[3] F. John: *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations.* Intersc. tract. in Pure and Applied Math. (1955).