SUGLI SPAZI DI CONVERGENZA DEDUCIBILI DA UNA FAMIGLIA DI SUCCESSIONI (*)

di ROMANO ISLER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Assegnato, per ogni punto p di un insieme E, una famiglia arbitraria* $\mathcal{S}_p$ *di successioni di punti contenente la successione costante* $\{p\}$, *si può ottenere, con la « $(\alpha\beta\gamma)$-chiusura » una nuova famiglia più ampia* $\mathcal{S}_p^*$ *che non sempre soddisfa gli assiomi degli spazi di convergenza. Se però* $\mathcal{S}_p$ *è, per ogni p, al più numerabile, allora* $\mathcal{S}_p^*$ *li soddisfa.*

SUMMARY. - *Given, for every point p of a set E, an arbitrary family* $\mathcal{S}_p$ *of sequences containing the constant sequence* $\{p\}$, *we can obtain a new larger family* $\mathcal{S}_p^*$ *of sequences by the « $(\alpha\beta\gamma)$-closure » of* $\mathcal{S}_p$ *not necessarily satisfying the axioms of the convergence structure. If* $\mathcal{S}_p$, *for every point p, is at most countable, than* $\mathcal{S}_p^*$ *satisfies the axioms.*

Introduzione.

Diremo che in un insieme E è assegnata una struttura di convergenza se è assegnata una legge che dichiara convergenti certe successioni dell'insieme E e che associa a ciascuna di tali successioni uno o più punti limite in modo che sussistano i seguenti tre assiomi:

(FK_1) Ogni successione costante $\{p\}$ converge a p.

(*) Pervenuto in Redazione il 28 settembre 1972.

Lavoro eseguito col contributo del C. N. R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

(FK$_2$) Se una successione converge a p, ogni sua sottosuccessione converge a p.

(FK$_3$) Se una successione $\}p_n\{$ non converge a p allora esiste una sottosuccessione $\}p_{n_i}\{$ priva di sottosuccessioni convergenti a p.

Per ottenere una struttura di convergenza faremo uso delle seguenti tre operazioni (α), (β), (γ); ciò permette di ottenere per ogni $p \in E$ da una famiglia di successioni $\mathcal{S}_p$ dichiarate convergenti al punto p un'altra $\mathcal{S}_p^*$ applicando in modo non ordinato e ripetuto le tre operazioni:

(α) Data una successione $\}p_n\{ \in \mathcal{S}$, consideriamo dedotta da questa ogni successione di cui la data è un resto.

(β) Data una successione $\}p_n\{ \in \mathcal{S}$, consideriamo dedotta da questa ogni successione $\}p_{r_n}\{$ con $\lim r_n = \infty$.

(γ) Dato un numero finito di successioni $S^i = \}p_n^i\{$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ di $\mathcal{S}$, consideriamo dedotta da questa ogni successione S che ammetta h $(\leq k)$ sottosuccessioni $S^j = \}p_{r_n^j}\{$ uguali rispettivamente ad h delle S^i e tali che i numeri naturali r_n^j $(j = 1, 2, \ldots, h)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ siano tutti diversi ed ogni numero naturale vi compaia.

Data allora su un insieme E per ogni punto p una famiglia $\mathcal{S}_p$ di successioni contenente la successione costante $\}p\{$, si consideri la $(\alpha\beta\gamma)$-chiusura $\mathcal{S}_p^*$ di $\mathcal{S}_p$. È facile verificare allora con degli esempi che non sempre la $\mathcal{S}_p^*$ soddisfa ai tre assiomi. Il risultato ottenuto è il seguente: se per ogni punto p la famiglia $\mathcal{S}_p$ è al più numerabile, allora la $(\alpha\beta\gamma)$-chiusura dà luogo ad uno spazio sequenziale che è, quindi, il più fine fra quanti conservano le successioni convergenti $\mathcal{S}_p$.

LEMMA. *Sia $\mathcal{S}_p$ una famiglia arbitraria di successioni dichiarate convergenti al punto p, e sia $\}p\{ \in \mathcal{S}_p$. Allora in $\mathcal{S}_p^*$ le successioni costanti sono tutte e sole quelle che costituivano sottosuccessioni costanti in $\mathcal{S}_p$.*

La dimostrazione è banale pur di osservare che se in $\mathcal{S}_p$ non ci sono sottosuccessioni costanti diverse dalla $\}p\{$, l'applicazione delle (α), (β), (γ) un numero finito di volte non consente di giungere ad una successione costante diversa dalla $\}p\{$.

TEOREMA I. *Sia $\mathcal{S}_p$ una famiglia finita di successioni convergenti al punto p, comprendente anche la successione costante $\}p\{$. Allora $\mathcal{S}_p^*$ gode delle proprietà* (FK$_1$), FK$_2$) ed (FK$_3$).

DIM. Si verifica subito che le (FK_1) ed (FK_2) sono soddisfatte: la (FK_1) in modo banale e la (FK_2) per il fatto che se una successione appartiene a $\mathcal{S}_p^*$ anche ogni sua sottosuccessione, essendo $\mathcal{S}_p^*$ chiusa rispetto all'operazione (β), sta in $\mathcal{S}_p^*$. Dimostriamo perciò la (FK_3).

Sia

$$\begin{array}{ll} (A_1) & a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}, \dots \longrightarrow p \\ (A_2) & a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \dots \longrightarrow p \\ & \vdots \\ (A_k) & a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, \dots, a_{kn}, \dots \longrightarrow p \end{array}$$

la famiglia finita di successioni di $\mathcal{S}_p$, contenente la successione costante $\{p\}$. Sia $\{x_n\}$ una successione non appartenente a $\mathcal{S}_p^*$.

Se fra i termini x_n della successione compaiono infiniti che non comparivano fra gli a_{ij}, la sottosuccessione formata da tali termini è quella cercata per la (FK_3). Se ciò non succede, esiste una coda della successione $\{x_n\}$ fatta tutta di elementi a_{ij}. Si può allora senza togliere nulla alla generalità del ragionamento, supporre la successione $\{x_n\}$ fatta tutta di elementi a_{ij}. Dimostriamo in questa ipotesi che in $\{x_n\}$ ci dev'essere una sottosuccessione costante $\{x\}$ che non compariva come tale in $\mathcal{S}_p$. Essa sarà allora la sottosuccessione cercata per la (FK_3), in base al lemma. La dimostrazione la facciamo osservando che in caso contrario la $\{x_n\}$ deve appartenere ad $\mathcal{S}_p^*$.

Primo caso: sia dapprima $\{x_n\}$ senza sottosuccessioni costanti, ossia tale che ogni termine sia ripetuto un numero finito di volte. Siano $x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_n}, \dots$ gli infiniti termini distinti che compaiono in $\{x_n\}$ e sia $k(n)$ il numero di volte che il termine x_{r_n} compare. Si può sempre allora, a partire dalle successioni $\{a_{ij}\}$, ottenere, applicando la (γ) e la (α), una successione in cui compaiono tutti e soli gli x_{r_n} e da questa, applicando la (β) e la (α), una in cui ciascuno dei termini x_{r_n} compaia esattamente $k(n)$ volte; allora permutando la successione così ottenuta si ottiene la successione data che quindi appartiene ad $\mathcal{S}_p^*$.

Secondo caso: la $\{x_n\}$ ammetta sottosuccessioni costanti, tutte però tali da comparire già come sottosuccessioni in $\mathcal{S}_p$. Sia allora $\{y_i\}$ la sottosuccessione (se esiste) di $\{x_i\}$ formata da tutti quei termini della $\{x_i\}$ che non si ripetono infinite volte e $\{z_i\}$ la sottosuccessione formata dai termini che si ripetono infinite volte; $\{y_i\}$

abbiamo già visto che appartiene ad $\mathcal{S}_p^*$. In $\}z_i\{$ consideriamo le sottosuccessioni costanti $\}z^h\{$ e fra le k successioni di $\mathcal{S}_p$ consideriamo quelle che possiedono le sottosuccessioni $\}z^h\{$; da queste attraverso la (γ) e la (β) deduciamo una successione in cui tutte le $\}z'\{$ sono sottosuccessioni e nelle quali non compaiano altri termini. Mediante la (β), permutando, si ottiene allora la $\}z_i\{$, che appartiene quindi ad $\mathcal{S}_p^*$. E siccome sia $\}y_i\{$ che $\}z_i\{$ appartengono ad $\mathcal{S}_p^*$, anche $\}x_i\{$ deve appartenerci in virtù della (γ), dal che segue la tesi.

Teorema II. *La tesi del teorema precedente sussiste anche se $\mathcal{S}_p$ è una famiglia numerabile.*

Dim. Sia

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots \longrightarrow p \\
(A_2) & a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}, \dots \longrightarrow p \\
\vdots & \\
(A_m) & a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}, \dots \longrightarrow p \\
\vdots &
\end{array}
$$

una successione di successioni costituente la famiglia $\mathcal{S}_p$, contenente la successione costante $\}p\{$. La $\mathcal{S}_p^*$ gode ovviamente delle proprietà (FK$_1$) ed (FK$_2$). Dimostriamo la (FK$_3$). Sia $\}x_n\{ \notin \mathcal{S}_p^*$. O in essa ci sono infiniti termini che non compaiono fre le a_{ij} e siamo a posto; o ciò non succede. Come nel teorema precedente possiamo supporre che i termini x_i siano tutti del tipo a_{ij}. Distinguiamo allora anche qui due casi.

Primo caso: in $\}x_n\{$ non ci sono sottosuccessioni costanti diverse da $\}p\{$. Non può allora succedere che i termini x_i compaiano tutti in un numero finito di successioni $(A_1), (A_2), \dots, (A_k)$. In tal caso infatti $\}x_n\{$ dovrebbe, per quanto dimostrato nel teorema precedente, appartenere alla ($\alpha\beta\gamma$)-chiusura della famiglia finita e quindi ad $\mathcal{S}_p^*$. Ci sarà allora un primo termine x_{r_1} che non compare in (A_1), un primo termine x_{r_2}, con $r_2 > r_1$, che non compare nè in (A_1) nè in (A_2) e così via. La sottosuccessione $\}x_{r_n}\{$ non può ottenersi dalle (A_n) mediante le (α), (β), (γ) ossia non può appartenere ad $\mathcal{S}_p^*$; e lo stesso per ogni sua sottosuccessione; quindi anche in tal caso la (FK$_3$) è soddisfatta.

Secondo caso: ci sia in $\}x_n\{$ almeno una sottosuccessione costante. O fra le sottosuccessioni costanti ve n'è una che non è sottosuccessione di alcuna delle (A_n) ed allora siamo a posto in base al lemma, oppure ognuna di esse è sottosuccessione di una delle (A_n). Indichiamo allora, come già precedentemente, con $\}y_i\{$ l'eventuale sottosuccessione di $\}x_n\{$ fatta dei termini che compaiono un numero finito di volte e con $\}z_i\{$ l'altra. Se i termini di $\}y_i\{$ comparissero tutti in un numero finito di successioni (A_n) e quelli di $\}z_i\{$ comparissero come sottosuccessioni costanti pure in un numero finito di successioni di $\mathcal{S}_p$, $\}x_n\{$ apparterrebbe ad $\mathcal{S}_p^*$ (teor. I) contro l'ipotesi. Se i termini di $\}y_i\{$ non stanno tutti in un numero finito di successioni di $\mathcal{S}_p$, sappiamo già costruire una sottosuccessione di $\}y_i\{$ che soddisfa alla (FK_3). L'unico caso da considerare è allora quello in cui i termini $\}z_i\{$ non sono contenuti come sottosuccessioni costanti in un numero finito di (A_n). Detto allora z_{s_1} il primo termine che non compare infinite volte in (A_1), z_{s_2} il primo termine, con $s_2 > s_1$, che non compare infinite volte nè in (A_1) nè in (A_2) e così via, la sottosuccessione $\}z_{s_n}\{$ soddisfa alla (FK_3) da cui la tesi.

Osservazione. Il teorema non vale qualora la famiglia $\mathcal{S}_p$ sia non numerabile. Si veda il seguente esempio.

Sia $E = R^+$ e sia $\mathcal{S}_0$ l'insieme delle successioni di numeri reali positivi $\}x_n\{$ tali che $\Sigma_n x_n$ converga. Ovviamente $\mathcal{S}_0$ non gode della (FK_3).

Presa in considerazione la $\mathcal{S}_0^*$ si osserva facilmente che la serie armonica non può appartenere ad $\mathcal{S}_0^*$. Infatti degli infiniti termini $\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots$, ognuna delle successioni in $\mathcal{S}_0$ può contenerne al più un numero finito e quindi anche in $\mathcal{S}_0^*$ nessuna successione può contenerne infiniti. E tuttavia nessuna sottosuccessione della serie armonica soddisfa la (FK_3).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. DOLCHER: *Topologie e strutture di convergenza,* Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa, Serie III, vol. XIV (1960), p. 63-92.

[2] J. NOVÁK: *On some problems concerning multivalued convergences,* Czech. Math. Journ. Vol. 14, (1964), p. 548-561.

[3] R. ISLER: *Una generalizzazione degli spazi di Fréchet,* Rend. Sem. Mat. Padova, Vol. XLI (1968), p. 164-176.

[4] R. ISLER: *On a problem concerning sequential spaces,* Proc. Internat. Symposium on Topology, Herceg-Novi, Yug, (1969), p. 196-199.