SUR LES SÉRIES ET LES SOMMES DÉFINIES DANS CERTAINES ALGÈBRES UNIVERSELLES TOPOLOGIQUES (*)

par IULIUS GY. MAURER (à Cluj)
et MIKLÓS SZILÁGYI (à Tg. Mureş) (**)

SOMMARIO. - *Si stabiliscono alcune proprietà legate alla nozione di sommabilità delle famiglie di elementi di un Ω-gruppo munito d'una topologia filtrante separata. Particolarmente si mette in evidenza l'interdipendenza che si manifesta tra la teoria delle serie e la teoria delle somme definite nelle algebre universali topologiche.*

SUMMARY. - *Given an Ω-group, with a separated filtering topology, we establish some properties about the summability of elements of a such Ω-group. Particullary we show the interdependence between the theory of series and the theory of sums defined in universal topological algebras.*

Nous établissons quelques propriétés liées à la notion de sommabilité des familles d'éléments d'un Ω-groupe, muni d'une topologie filtrée. En particulier nous mettons en évidence l'interdépendence qui existe entre la théorie des séries et la théorie des sommes définies dans les algèbres universelles mentionnées.

Observons toutefois qu'une *algèbre universelle* (G, Ω) est un ensemble G muni d'un ensemble Ω d'opérations n-aires, où n a des valeurs entières non négatives. Si $\omega \in \Omega$, alors l'élément de G qui correspond dans l'opération ω à un système ordonné $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ d'éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Omega$, sera noté par $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$. Une algèbre

(*) Pervenuto in Redazione il 20 settembre 1972.
(**) Indirizzi degli Autori:
IULIUS GY. MAURER, Institut Mathématique, Université Cluj (Roumanie);
MIKLÓS SZILÁGYI, Faculté de Mathématique, Institut Pédagogique - Tg Mureş (Roumanie).

universelle est dénommée *Ω-groupe* s'il existe dans Ω une opération binaire (qui sera désignée par $+$) telle que $(G, +)$ est un groupe et si nous avons aussi la propriété $o\, o \ldots o\, \omega = o$ pour tout $\omega \in \Omega$, où o représente l'élément nul du groupe $(G, +)$.

On dit qu'un Ω-groupe G est un *Ω-groupe topologique* si G est un espace topologique (G, τ) et si toutes les opérations $\omega \in \Omega$ sont continues par rapport à la topologie τ. Observons que, si on désigne par V_g un voisinage quelconque de l'élément $g \in G$, alors la continuité d'une opération n-aire $\omega \in \Omega$ peut être formulée de la manière suivante : si $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ est un système quelconque d'éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ et $V_{a_1 a_2 \ldots a_n \omega}$ est un voisinage arbitrairement choisi de $a_1 a_2 \ldots a_n \omega$, alors il existe des voisinage $V_{a_1}, V_{a_2}, \ldots, V_{a_n}$ des éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$, tels que

$$(1) \qquad V_{a_1} V_{a_2} \ldots V_{a_n} \omega \subseteq V_{a_1 a_2 \ldots a_n \omega} .$$

Soit G un *Ω-groupe topologique séparé.* Considérons une *suite* $\}a_n\{_{n \in N}$ quelconque d'éléments $a_n \in G$ $(n \in N)$, où N désigne l'ensemble des nombres entiers non négatifs, ordonné par la relation d'ordre naturel « $\leq$ ».

Faisons correspondre à $\}a_n\{_{n \in N}$ la suite $\}S_n\{_{n \in N}$ des sommes partielles $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ $(n \in N)$. Cette suite — notée par $\mathfrak{S}\, a_n$ — sera dénommèe *séries* définie par le système $\}a_n\{_{n \in N}$. Nous dirons que $\mathfrak{S}\, a_n$ est une série *fondamentale* respectivement une série *convergente,* si la suite $\}S_n\{_{n \in N}$ est fondamentale respectivement convergente. Si $S_n \to a \in G$, l'élément $a \in G$ sera dénommé la *valeur* de la série $\mathfrak{S}\, a_n$ et on écrira par abus de langage $\mathfrak{S}\, a_n = a$. Nous dirons que $\mathfrak{S}\, a_n$ est une série *commutativement fondamentale* respectivement *commutativement convergente* si pour toute permutation $\pi : N \to N$, la série $\mathfrak{S}\, a_{\pi(n)}$ — attachée au système $\}a_{\pi(n)}\{_{n \in N}$ — est fondamentale respectivement convergente. Si même la valeur de la série convergente $\mathfrak{S}\, a_n$ ne dépende pas de l'ordre des a_n, alors $\mathfrak{S}\, a_n$ sera dénommée série *inconditionnellement convergente.*

D'autre part, considérons l'ensemble $\mathcal{B}(N)$ de toutes les parties finies de N. Pour tout $\nu \in \mathcal{B}(N)$, soit σ_ν la somme — dans l'ordre naturel des indices — de tous les a_i tels que $i \in \nu$. L'ensemble $\mathcal{B}(N)$ dirigé par la relation d'inclusion « $\subseteq$ » sera noté par Φ. Nous faisons correspondre au système $\}a_n\{_{n \in N}$ la suite Moore-Smith $\}\sigma_\nu\{_{\nu \in \Phi}$. Cette suite, désignée par $\sum a_n$, sera dénommée *somme* définie par le système $\}a_n\{_{n \in N}$. Nous dirons que $\sum a_n$ est une *somme fondamentale* respectivement une somme *convergente* si la suite

Moore Smith $\}\sigma_\nu\{_{\nu \in \Phi}$ est fondamentale respectivement convergente. Les notions de la *fondamentalité commutative* respectivement de la *convergence commutative* et de la *convergence inconditionnelle* d'une somme $\sum a_n$ sont définies d'une manière analogue aux notions introduites dans le cas des séries. Observons encore que nous écrirons par abus de langage $\sum a_n = a$ si la suite Moore-Smith $\}\sigma_\nu\{_{\nu \in \Phi}$ converge vers $a \in G$.

Remarque 1. La terminologie utilisée ci-dessus correspond généralement à la terminologie de N. Bourbaki [1], utilisée dans le cas des groupes topologiques *commutatifs*. Mais au lieu de dire que « la somme $\sum a_n$ est convergente », on dit dans [1] que « le système $\}a_n\{_{n \in N}$ est *sommable* ». Les notions concernantes les sommes — mentionnées ci-dessus — se trouvent dans [4] au cas des systèmes $\}a_\mu\{_{\mu \in \Delta}$, où Δ est un ensemble quelconque totalement ordonné.

Remarque 2. G étant un espace uniforme, *toutes les séries et les sommes convergentes dans G sont fondamentales.*

Remarque 3. L'ensemble dirigé (même bienordonné) $\Phi_1 = (\mathcal{B}_1(N), \subseteq)$, où $\mathcal{B}_1(N) = \}\bar{\nu}_n = \}0, 1, \ldots, n-1\{ \mid n \in N\{$, est un sous-ensemble *cofinal* de $\Phi = (\mathcal{B}(N), \subseteq)$. Nous avons ensuite $\sigma_{\bar{\nu}_n} = S_n$ pour tout $n \in N$. Il en résulte que $\}S_n\{_{n \in N} = \}\sigma_{\bar{\nu}_n}\{_{n \in N} = \}\sigma_{\bar{\nu}_n}\{_{\bar{\nu}_n \in \Phi_1}$ est une sous-suite Moore-Smith de $\}\sigma_\nu\{_{\nu \in \Phi}$. Il en résulte que $\sum a_n = a$ *entraîne l'égalité* $\mathfrak{S}\, a_n = a$. *Des affirmations analogues sont vraies concernantes toutes les autres notions, liées à la notion de convergence des sommes et des séries.* Les réciproques de ces affirmations sont généralement inexactes (voir par ex. [1]).

Remarquons qu'un sous-ensemble $\mathcal{J}$ d'un Ω-groupe (G, Ω) est dénommé *idéal* de (G, Ω) si $(\mathcal{J}, +)$ est un sous-groupe normal de $(G, +)$ et si pour tout $i \in \mathcal{J}$ et pour tous les $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ les relations

$$-a_1 a_2 \ldots a_n \omega + a_1 \ldots a_{j-1} (i + a_j) a_{j+1} \ldots a_n \omega \in \mathcal{J}$$

subsistent pour tout $\omega \in \Omega$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Désignons par $\}G_\xi\{_{\xi \in I}$ *une famille d'idéaux de G, où*

1. *I est un système d'indices dirigé par une relation « $\leq$ »;*

2. *si* $\xi_1 \geq \xi_2$ $(\xi_1, \xi_2 \in I)$, *alors* $G_{\xi_1} \subseteq G_{\xi_2}$.

Si on considère une telle famille d'idéaux de G comme un système complet de voisinages de l'élément nul $o \in G$, alors G devient un Ω-groupe topologique [3]. La topologie $\mathcal{T}$ introduite sur G de cette manière sera dénommée *topologie filtrée.* On démontre aisément que G, muni de la topologie filtrée introduite par rapport à la famille $\}G_\xi\{_{\xi \in I}$ d'idéaux de G, est un espace *séparé* si et seulement si

$$\bigcap_{\xi \in I} G_\xi = \}o\{. \tag{2}$$

Si G est un Ω-groupe topologique séparé par rapport à une topologie filtrée $\mathcal{T}$, alors les affirmations suivantes, concernantes les suites, les séries et les sommes définies dans G *sont vraies*:

(a) La suite $\}a_n\{_{n \in N}$ converge vers $a \in G \Longleftrightarrow$ pour tout $\xi \in I$ il existe un $n_0 \in N$, tel qne

$$a_n - a \in G_\xi \text{ pour tout } n \geq n_0. \tag{3}$$

(a_1) La suite Moore-Smith $\}a_\nu\{_{\nu \in \Phi}$ converge vers $a \in G \Longleftrightarrow$ pour tout $\xi \in I$ il existe un $\nu_0 \in \Phi$, tel que

$$a_\nu - a \in G_\xi \text{ pour tout } \nu \supseteq \nu_0. \tag{4}$$

(b) La série $\mathfrak{S}\, a_n$ est fondamentale $\Longleftrightarrow$ pour tout $\xi \in I$ il existe un $n_0 \in N$, tel que

$$S_{n_1} - S_{n_2} \in G_\xi \text{ pour tout } n_1, n_2 \geq n_0. \tag{5}$$

(b_1) La somme $\sum a_n$ est fondamentale $\Longleftrightarrow$ pour tout $\xi \in I$ il existe un $\nu_0 \in \Phi$, tel que

$$\sigma_{\nu_1} - \sigma_{\nu_2} \in G_\xi \text{ pour tout } \nu_1, \nu_2 \supseteq \nu_0. \tag{6}$$

(c) $\mathfrak{S}\, a_n = a \Longleftrightarrow$ pour tout $\xi \in I$ il existe un $n_0 \in N$, tel que

$$S_n - a \in G_\xi \text{ pour tout } n \geq n_0. \tag{7}$$

(c_1) $\sum a_n = a \Longleftrightarrow$ pour tout $\xi \in I$ il existe un $\nu_0 \in \Phi$, tel que

$$\sigma_\nu - a \in G_\xi \text{ pour tout } \nu \supseteq \nu_0. \tag{8}$$

THÉORÈME 1. *Soit G un Ω-groupe topologique séparé par rapport à une topologie filtrée $\mathcal{F}$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

(α) *La série $\mathfrak{S}\, a_n$ est commutativement fondamentale.*

(β) *La série $\mathfrak{S}\, a_n$ est fondamentale.*

(γ) *La suite $\}a_n\{_{n \in N}$ converge vers 0, c'est-à-dire $a_n \to 0$.*

(δ) *La somme $\sum a_n$ est fondamentale.*

(ε) *La somme $\sum a_n$ est commutativement fondamentale.*

Si $(G, \mathcal{F})$ est un espace complet, alors on peut remplacer dans ces affirmations le mot «fondamental» par le mot «convergent».

DÉMONSTRATION. Nous démontrons la chaîne d'implications $(\alpha) \Longrightarrow (\beta) \Longrightarrow (\gamma) \Longrightarrow (\delta) \Longrightarrow (\varepsilon) \Longrightarrow (\alpha)$.

L'implication $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$ est vraie en vertu de la Remarque 3.

Supposons la validité de l'affirmation (β), donc de la condition (b). La relation $S_{n_1} - S_{n_2} \in G_\xi$ signifie que $S_{n_1} - S_{n_2} = g \in G$, d'où il résulte que $S_{n_1} = g + S_{n_2} \in G_\xi$ et par conséquent $-S_{n_2} + S_{n_1} = -S_{n_2} + g + S_{n_2} \in G_\xi$, parce que $(G_\xi, +)$ est un sous-groupe normal de $(G, +)$. Nous avons donc

$$(9) \qquad -S_{n_2} + S_{n_1} \in G_\xi \text{ pour tout } n_1, n_2 \geq n_0 .$$

Désignons le nombre n_2 par n et soit $n_1 = n_2 + 1 = n + 1$. Puisque

$$-S_n + S_{n+1} = -(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}) + a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n =$$

$$= -a_{n-1} - \dots - a_1 - a_0 + a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_n ,$$

il s'ensuit en vertu de (9) que $a_n \in G_\xi$ pour tout $n \geq n_0$. Il en résulte en vertu de (a) que $a_n \to 0$ et par conséquent qne l'affirmation (γ) est vraie.

Supposons la validité de l'affirmation (γ), donc de la condition (a) pour $a = 0$. Soit $\overline{\nu}_0 = \nu_{n_0+1} = \}0, 1, \dots, n_0\{ \in \Phi$ et considérons deux éléments quelconques $\nu_1 \nu_2 \in \Phi$ tels que $\nu_1, \nu_2 \supseteq \nu_0$. On peut écrire $\nu_1 = \nu_0 \cup \}i_1, i_2, \dots, i_k\{$ et $\nu_2 = \nu_0 \cup \}j_1, j_2, \dots, j_l\{$, où $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$ et $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_l$. Puisque $i_p \geq n_0$ $(1 \leq p \leq k)$ et $j_q \geq n_0$ $(1 \leq q \leq l)$, il s'ensuite que $a_{i_p} \in G_\xi$ $(1 \leq p \leq k)$ et $a_{j_q} \in G_\xi$ $(1 \leq q \leq l)$ et par conséquent $a = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} \in G_\xi$ et $b = a_{j_1} + a_{j_2} + \dots + a_{j_l} \in G_\xi$.

Il en résulte que

$$\sigma_{\nu_1} - \sigma_{\nu_2} = \sigma_{\nu_0} + a - (\sigma_{\nu_0} + b) = \sigma_{\nu_0} + c - \sigma_{\nu_0},$$

où $c = a - b \in G_\xi$. En tenant compte du fait que $(G_\xi, +)$ est un sous-groupe normal de $(G, +)$, il s'ensuit que $\sigma_{\nu_0} + c - \sigma_{\nu_0} = d + \sigma_{\nu_0} - \sigma_{\nu_0} = d$, où $d \in G_\xi$ et par conséquent $\sigma_{\nu_1} - \sigma_{\nu_2} \in G_\xi$ pour tout $\nu_1, \nu_2 \supseteq \nu_0$. Donc, en vertu de (b_1), l'affirmation (δ) est vraie.

Supposons la validité de l'affirmation (δ), donc de la condition (b_1). En vertu de la Remarque 3, $(\delta) \Longrightarrow (\beta)$ et puisque $(\beta) \Longrightarrow (\gamma)$, il s'ensuit que $a_n \longrightarrow 0$, donc que la condition (a) est vraie pour $a = 0$. Soit $\pi : N \longrightarrow N$ une permutation arbitraire et soit $\overline{n}_0 = \max(\pi(o), \pi(1), \ldots, \pi(n_0 - 1))$. En tenant compte de la propriété (a), nous avons $a_{\overline{n}} \in G_\xi$ pour tout $\overline{n} \geq \overline{n}_0$, d'où il résulte que la suite $\}a_{\overline{n}}\{_{\overline{n} \in N} = \}a_{\pi(n)}\{_{n \in N}$ converge vers o. Il s'ensuit en vertu de l'implication $(\gamma) \Longrightarrow (\delta)$ que, la somme $\sum a_{\pi(n)}$ attachée au système $\}a_{\pi(n)}\{_{n \in N}$ est fondamentale. Cela signifie que la somme $\sum a_n$ est commutativement fondamentale, donc que l'affirmation (ε) est vraie.

L'implication $(\varepsilon) \Longrightarrow (\alpha)$ est vraie en vertn de la Remarque 3.

La seconde affirmation du théorème est une conséquence évidente de la prémière proposition démontrée.

Théorème 2. *Soit G un Ω-groupe topologique séparé par rapport à une topologie filtrée $\mathcal{F}$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

$$\text{(i)} \qquad \mathfrak{S}\, a_n = a \qquad (a \in G);$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum a_n = a \qquad (a \in G).$$

Démonstration. Supposons que l'affirmation (i) est vraie, donc qu'il existe pour tout $\xi \in I$ un $n_0' \in N$, tel que $S_n - a \in G$ pour tout $n \geq n_0'$. D'autre part, il s'ensuit de (i) — conformément à la Remarque 2 — que $\mathfrak{S}\, a_n$ est une série fondamentale, d'où il résulte — en vertu du Théorème 1 — que $a_n \longrightarrow 0$, c'est-à-dire que pour tout $\xi \in I$ il exisie un $n_0'' \in N$, tel que $a_n \in G_\xi$ pour tout $n \geq n_0''$. Si donc $n_0 = \max(n_0', n_0'')$, alors nous avons simultanément les relations

$$(10) \qquad S_n - a \in G_\xi \text{ et } a_n \in G_\xi \text{ pour tous les } n \geq n_0.$$

Soit $\nu_0 = \overline{\nu}_{n_0+1} = \{0, 1, \dots, n_0\}$ et considérons un élément quelconque $\nu \in \Phi$, tel que $\nu \supseteq \nu_0$. Puisque ν peut être écrit sous la forme $\nu = \nu_0 \cup \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, où $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ et $i_p \geq n_0$ $(1 \leq p \leq k)$, it s'ensuit — en tenant compte aussi de la seconde relation (10) — que $\sigma_\nu = \sigma_{\nu_0} + b = S_{n_0+1} + b$, où $b = a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} \in G_\xi$. Il en résulte conformément à la première relation (10) et conformément au fait que $(G_\xi, +)$ est un sous-groupe normale de $(G, +)$, que $\sigma_\nu - a = S_{n_0+1} + b - a = S_{n_0+1} - a + (a + b - a) \in G_\xi$ pour tous les $\nu \supseteq \nu_0$. Nous avons donc démontré l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii).

L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est évidement vraie conformément à la Remarque 3.

Théorème 3. *Soit G un Ω-groupe topologique séparé par rapport à une topologie filtrée $\mathcal{F}$. Alors $\sum a_n$ est une somme inconditionnellement convergente si et seulement si elle est convergente et les éléménts de la snite $\{a_n\}_{n \in N}$ commutent deux à deux.*

Démonstration. Le Théorème 2 implique que $\sum a_n$ est une somme inconditionnellement convergente si et seulement si $\mathfrak{S}\, a_n$ est une série inconditionnellement convergente. Mais conformément au Théorème 3.2 de [2], $\mathfrak{S}\, a_n$ converge inconditionnellement si et seulement si $\mathfrak{S}\, a_n$ converge et $a_i a_j = a_j a_i$ pour tous les $i, j \in N$ $(i \neq j)$. En appliquant encore une fois le Théorème 2, on arrive aux conditions nécessaires et suffisantes formulées dans l'énoncé du théorème.

Soit maintenat $\omega \in \Omega$ une opération n-aire quelconque, avec $n = m$ et considérons m sommes $\sum a_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. Nous allons désigner par $\sum a_n^{(1)} a_n^{(2)} \dots a_n^{(m)} \omega$ *la somme attachée au système* $\{a_n^{(1)} a_n^{(2)} \dots a_n^{(m)} \omega\}_{n \in N}$.

Théorème 4. *Soit G un Ω-gronpe topologique séparé par rapport à une topologie filtrée $\mathcal{F}$. Si les sommes $\sum a_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ sont fondamentales et $\omega \in \Omega$ est une opération n-aire avec $n = m$, alors la somme $\sum a_n^{(1)} a_n^{(2)} \dots a_n^{(m)} \omega$ est fondamentale. Dans le cas où G est un espace complet, la convergence des sommes $\sum a_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ implique la convergence de la somme $\sum a_n^{(1)} a_n^{(2)} \dots a_n^{(m)} \omega$.*

Démonstration. Soit ξ un élément quelcouque de I. L'élément arbitrairement choisi $\xi \in I$ détermine un voisinage quelconque G_ξ de

$o \in G$. Puisque $o\, o \dots o\, \omega = 0$, il en résulte de la continuité de l'opération ω, l'existence de certains éléments $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m \in I$, tels que

$$G_{\xi_1} G_{\xi_2} \dots G_{\xi_m} \omega \subseteq G_\xi . \tag{11}$$

Puisque — conformément au Théorème 1 — la fondamentalité des sommes $\sum a_n^{(i)} (i = 1, 2, \dots, m)$ est équivalente avec les propriétés $a_n^{(i)} \to 0$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, il s'ensuit de (a) l'existence de certains nombres $n_0^{(i)} \in N (i = 1, 2, \dots, m)$, tels que

$$a_n^{(i)} \in G_{\xi_i} \text{ pour tous les } n \geq n_0^{(i)} \; (i = 1, 2, \dots, m). \tag{12}$$

Pour tous les $n \geq n_0 = \max (n_0^{(1)}, n_0^{(2)}, \dots, n_0^{(m)})$, les relations (11) sont simultanément vraies, d'où il résulte — en tenant compte aussi de la relation (11) — que

$$a_n^{(1)} a_n^{(2)} \dots a_n^{(m)} \omega \text{ pour tous } n \geq n_0 . \tag{13}$$

Cela signifie que $a_n^{(1)} a_n^{(2)} \dots a_n^{(m)} \omega \to 0$, d'où il résulte conformément au Théorème 1 que $\sum a_n^{(1)} a_n^{(2)} \dots a_n^{(m)} \omega$ est une somme fondamentale.

La seconde affirmation du théorème est une conséquence évidente de la première proposition démontrée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N Bourbaki : *Élém. de Math.*, Livre III, *Topologie générale*, ch. 3-4, Paris, 1960.

[2] I. Gy. Maurer et M. Szilágyi : *Über die Untergruppentopologie der Operatorgruppen*, Miskolci Nehézipari Egy. Közl., 30, 289-298, 1970.

[3] M. Szilágyi : *Some Properties of the Topological Ω-Groups, I*, Studia Univ. « Babeş-Bolyai », 18, f. 1, 3-12, 1973.

[4] M. Szilágyi : *The Summability of the Partial Functions with Values in a Topologicol Ω-Group*, Rev. Roumaine Math. Pure et App., (sous presse).