DEUX COMPLÉMENTS AU THÉORÈME ERGODIQUE PONCTUEL À PARAMÈTRE CONTINU (*)

par FRANCO CHERSI (à Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si danno due teoremi ergodici puntuali per un processo a parametro continuo, la cui legge sia invariante rispetto allo shift unitario.*

SUMMARY. - *This paper contains two pointwise ergodic theorems for a continuous-parameter process, whose law is invariant under the unit shift.*

1. Le théorème ergodique ponctuel à paramètre continu, appliqué à un processus stochastique, requiert que le processus ait une modification mesurable et qu'il soit stationnaire (au sens strict) (voir par ex. Doob, [4] p. 515, et Jacobs, [5] p. 62). Mais on peut faire des variations sur ce thème. Dans le théorèmes 1 et 2 suivants on suppose que la loi du processus soit invariante seulement par rapport au « shift » d'ampleur 1 (ou d'ampleur > 0 fixée). Dans le théorème 1 on ne fait aucune hypothèse de mesurabilité sur le processus, mais le résultat aussi est faible; on suppose d'ailleurs que les valeurs du processus soient bornées, pour résoudre aisément des problèmes d'intégrabilité et de passage à la limite de l'intégrale. Les processus considérés ici sont de forme canonique (on sait que pour beaucoup de problèmes cette hypothèse n'est pas restrictive); les résultats ont une traduction immédiate dans le langage des ap-

(*) Pervenuto in Redazione il 19 settembre 1972.
Lavoro eseguito con contributo del C. N. R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

plications conservant la mesure (voir par ex. la discussion classique de Doob, chap. X, 1 et chap. XI, 1).

Je désire remercier Messieurs L. Daboni et G. Letta pour leurs conseils, qui m'ont permis d'amélior ce travail en plusieurs points.

2. Considérons un processus de la « première forme canonique », c'est-à-dire $(E^T, \bigotimes_T \mathcal{E}, P_0, (X_t)_{t \in T})$, où $(E, \mathcal{E})$ est un espace mesurable, P_0 une probabilité sur l'espace mesurable produit, et les X_t sont les applications coordonnées de E^T dans E. Nous supposons ici que E soit une partie *bornée* de $\mathbb{R}$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$ sa tribu borélienne, et que T soit $\mathbb{R}_+$, muni de la mesure de Lebesgue quand il faut (¹). Ce processus n'est pas mesurable (pas même sur l'espace produit $E^T \times T$ *complété*: Doob, loco cit., p. 69).

THÉORÈME 1. *Si P_0 est invariante par rapport au shift d'ampleur 1, alors l'ensemble des points $\omega \in E^T$, pour lesquels il existe la limite*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_s(\omega)\, ds, \tag{1}$$

a mesure extérieure P_0^* égale à 1.

DÉM. Soit $\tau : E^T \to E^T$ le shift d'ampleur 1 : $X_t(\tau^k \omega) = X_{k+t}(\omega)$ $(k \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R}_+)$. Si la fonction ω est mesurable, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{1}{n} \int_0^n X_s(\omega)\, ds = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_k \int_k^{k+1} X_s(\omega)\, ds = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_k \int_0^1 X_u(\tau^k \omega)\, du =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_k X_u(\tau^k \omega)\, du,$$

parce que $s = k + u$ avec $u \in I = [\,0, 1\,[$. Remarquons que les moyennes

$$S_n(\omega, u) = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1}{}_k X_u(\tau^k \omega) \qquad (u \in I)$$

sont définies pour tout $\omega \in E^T$.

(¹) Si E est compacte, la tribu produit $\bigotimes_T \mathcal{E}$ est la tribu de Baire du produit topologique E^T (Meyer, [6] p. 44).

À ce point il nous faut trois lemmes.

Lemme 1. *Si on pose* $B = \{\omega :$ la suite S_n converge pour tout $u \in I\}$, *on a* $P_0^*(B) = 1$.

Dém. $u \in I$ étant fixé, soit $B_u = \{\omega : S_n(\omega, u)$ converge$\}$: alors $B = \bigcap_{u \in I} B_u$; B n'est pas vide, parce qu'il contient au moins les applications constantes. Pour tout $u \in I$ X_u est mesurable, bornée, donc intégrable, et les fonctions $S_n(\cdot, u)$ sont mesurables : alors $B_u \in \bigotimes_T \mathcal{E}$, et $P_0(B_u) = 1$ d'après le théorème ergodique de Birkhoff. L'ensemble B_u est un cylindre ayant sa base dans E^{T_u} (²), où $T_u = \{u, u+1, \dots, u+n, \dots\}$; la famille $\{T_u\}_{u \in I}$ est une partition de $T = \mathbb{R}_+$; la base de B_u appartient à $\bigotimes_{T_u} \mathcal{E}$ (Neveu, [7] p. 76). Pour tout $u \in I$ identifions E^{T_u} à $E^{\mathbb{N}} = F$ (si α est une fonction définie sur T_u appelons α_u la suite $\alpha_u(n) = \alpha(u+n)$) ; avec la topologie produit, F est un espace métrisable ; munissons F de la tribu borélienne $\mathcal{B}(F) = \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{E}$ (Meyer, p. 43). Définissons une application bijective et « bi-mesurable »

$$\Phi : (E^T, \bigotimes_T \mathcal{E}) \to (F^I, \bigotimes_I \mathcal{B}(F))$$

de la manière suivante :

$$\Phi = \Phi_1 \circ \Phi_0 ,$$

où :

$$\Phi_0 : E^T \to \prod_{u \in I} E^{T_u}, \quad \Phi_0(\omega) = (\omega|_{T_u})_{u \in I}; \quad \Phi_1 : \prod_{u \in I} E^{T_u} \to (E^{\mathbb{N}})^I$$

applique $(\omega|_{T_u})_{u \in I}$ en $\tilde{\omega} = (\omega_u)_{u \in I}$. On voit facilement (Neveu, p. 75) que Φ conserve les tribus produit (Φ est aussi un homéomorphisme par rapport aux topologies produit, donc elle conserve de même les tribus boréliennes). L'ensemble $\Phi(B) = D$ est un « tuyau » dans F^I, c'est-à-dire un produit $\prod_{u \in I} D_u$, avec $D_u \in \mathcal{B}(F)$. En effet, $\Phi(B) = \bigcap_{u \in I} \Phi(B_u)$, parce que Φ est injective ; comme B_u est un cylindre mesurable de E^T avec base dans E^{T_u}, $\Phi(B_u)$ est un cylindre mesurable de F^I avec base dans le facteur d'indice u, et

(²) en bref, « T_u-cylindre ».

cette base appartient à $\mathcal{B}(F)$. Soit $\widetilde{P} = \Phi(P_0)$ la mesure image sur $\bigotimes_I \mathcal{B}(F)$; alors on a aussi $(\widetilde{P})^* = \Phi(P_0^*)$, grâce au fait que Φ est un isomorphisme d'espaces mesurables. Si S est un sous-ensemble de I, appelons $C_S(D)$ le plus petit S cylindre de F^I qui contient D; en particulier, $\Phi(B_u) = C_u(D)$ (3). Nous savons que $\widetilde{P}(C_u(D)) = 1$ pour tout $u \in I$ (parce que $P_0(B_u) = 1$); d'autre part il existe S *dénombrable* tel que $\widetilde{P}^*(D) = \widetilde{P}(C_S(D))$ (voir par ex. Chersi, [3] Lemma 3). Or $C_S(D) = \bigcap_{u \in S} C_u(D)$ (loco cit., (5)), d'où $\widetilde{P}(C_S(D)) = 1$ et $\widetilde{P}^*(D) = 1$. Il en suit que $P_0^*(B) = 1$.

Lemme 2. *Soit M l'ensemble des applications boréliennes de $\mathbb{R}_+$ dans E. L'image $\Phi(M) = L$ est alors l'ensemble des applications boréliennes de I dans F.*

Dém. Soient $\omega \in E^T$ et $\widetilde{\omega} = \Phi(\omega)$. Supposons d'abord ω borélienne et prouvons que, pour tout $C \in \mathcal{B}(F)$, $\overset{-1}{\widetilde{\omega}}(C) \in \mathcal{B}(I)$. Comme $\mathcal{B}(F) = \bigotimes_{\mathbb{N}} \mathcal{E}$, il suffit de le prouver pour tout C de la forme $C = H \times E^{\mathbb{N} \setminus \{p\}}$, où $H \in \mathcal{E}$, $p \in \mathbb{N}$ (la classe de ces ensembles engendre la tribu produit). Or

$$\overset{-1}{\widetilde{\omega}}(C) = \{u \in I : \widetilde{\omega}(u) \in C\} = \{u \in I : \omega(u+p) \in H\},$$

qui est un borélien parce que l'application $t \longmapsto \omega(t+p)$ est borélienne elle aussi. Inversement, supposons $\widetilde{\omega} : I \longrightarrow E^{\mathbb{N}}$ borélienne; prouvons que, pour $A \in \mathcal{E}$, $\overset{-1}{\omega}(A)$ est un borélien dans $\mathbb{R}_+$. Chaque $t \in \mathbb{R}_+$ est écrit $k+u$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $u \in I$, d'une seule manière; $\omega(t) \in A$ si et seulement si $\widetilde{\omega}(u)$ appartient au rectangle C dont le k-ième côté est A et tous les autres sont égaux à E. Si on pose $u = m(t) = t - [t]$, on a que $\omega(t) \in A$ équivaut à $m(t) \in \overset{-1}{\widetilde{\omega}}(C)$; comme $m : \mathbb{R}_+ \longrightarrow I$ est une application borélienne, $\overset{-1}{\omega}(A) = \overset{-1}{m}\,\overset{-1}{\widetilde{\omega}}(C)$ est borélien.

(3) Nous écrivons ici u au lieu de $\{u\}$.

LEMME 3. *Soient I un intervalle réel muni de sa tribu borélienne, $(F, \mathcal{F})$ un espace mesurable, L l'ensemble des applications mesurables de I dans F. Si H est un tuyau dans F^I tel que $H \cap L$ ne soit pas vide et si S est un partie dénombrable de I, chaque S-cylindre de F^I contenant $H \cap L$ contient H aussi.*

DÉM. Soit Σ un S-cylindre contenant $H \cap L$; soit $f \in H$. Il existe $g \in H \cap L$; posons

$$\bar{g}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad t \in S \\ g(t) & \text{si} \quad t \notin S. \end{cases}$$

Comme $\bar{g}$ coïncide avec g sauf sur un ensemble dénombrable de points de I et g est mesurable, $\bar{g}$ aussi appartient à L; en outre $\bar{g} \in H$, parce que f et g lui appartiennent. Donc $\bar{g} \in H \cap L \subset \Sigma$; comme $f|_S = \bar{g}|_S$ et Σ est un S cylindre, $\bar{g} \in \Sigma$ implique $f \in \Sigma$.

DÉM. DU THÉORÈME 1 (suite). Avec les notations des lemmes 1 et 2, considérons $\Phi(B \cap M) = \Phi(B) \cap \Phi(M) = D \cap L$; D est un tuyau dans F^I et $D \cap L$ n'est pas vide: en effet $B \cap M$ contient au moins les applications constantes de T dans E. Des lemmes 1, 3 et du fait que chaque élément de $\bigotimes_I \mathcal{B}(F)$ est un S-cylindre avec S dénombrable, il suit alors que $\widetilde{P}^*(D \cap L) = \widetilde{P}^*(D) = 1$, donc $P_0^*(B \cap M) = 1$. Pour chaque $\omega \in M$ et $t > 0$ on a

$$\frac{1}{t} \int_0^t X_s(\omega)\, ds = \frac{n}{t} \frac{1}{n} \int_0^n X_s(\omega)\, ds + \frac{1}{t} \int_n^t X_s(\omega)\, ds$$

où $n = [t]$. Mais

$$\frac{1}{n} \int_0^n X_s(\omega)\, ds = \int_0^1 S_n(\omega, u)\, du;$$

si $b > 0$ est une borne pour l'ensemble E, on a $|S_n(\omega, u)| \leq b$ pour tous les n, ω, u. Pour chaque $\omega \in B \cap M$ il existe alors la limite

$$\lim_n \frac{1}{n} \int_0^n X_s(\omega)\, ds = \lim_n \int_0^1 S_n(\omega, u)\, du = \int_0^1 \lim_n S_n(\omega, u)\, du;$$

enfin,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{n}{t} = 1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{1}{t} \int_n^t X_s(\omega)\, ds \right| \leq \frac{b}{t}$$

qui tend vers 0.

(Cela n'exclut pas que la limite (1) existe pour des autres ω, n'appartenant pas à B).

COROLLAIRE 1. *Pour chaque processus à valeurs réelles bornées, strictement stationnaire par rapport à la translation unitaire, il existe un processus équivalent* (au sens de Meyer, p. 80) *dans lequel la limite* (1) *existe pour tout* ω (4).

En effet, il suffit de construire d'abord le premier processus canonique associé (Meyer, loco cit.): celui-ci vérifie les hypothèses du théorème 1; puis de prendre comme espace probabilisé l'ensemble $B \cap M$, muni de la tribu trace de $\bigotimes_T \mathcal{E}$ et de la mesure induite par P_0 (Bauer, [1] p. 293, Satz 63.2).

REMARQUE. Le résultat du théorème 1 est « faible », dans le sens que l'égalité $P_0^*(B \cap M) = 1$ dérive essentiellement de la pauvreté de la tribu produit (lemmes 1 et 3). Une question ouverte est la suivante: supposons E compact: dans ce cas, $\bigotimes_T \mathcal{B}(E)$ est la tribu de Baire de E^T; qu'est-ce qu'il arrive si on prend le prolongement borélien régulier de P_0?

3. Considérons maintenant un processus $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t \in T})$, où Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^T$, tandis que T, X_t sont comme dans le numéro précédent; on a la mesure de Lebesgue sur I et la mesure produit sur $\Omega \times I$.

THÉORÈME 2. *Si le processus est mesurable* (5), *intégrable sur* $\Omega \times I$, *et si P est invariante par rapport au shift τ d'ampleur* 1, *alors la limite* (1) *existe P-presque sûrement.*

(4) Rappel. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \displaystyle\int_0^t f(s)\, ds$ n'existe pas nécessairement.

(5) Cela est vrai si, par exemple, Ω est l'ensemble des applications $T \to R$ continues à droite (ou à gauche) ([6], p. 101). Il suffirait de faire ces hypothèses par rapport à $\Omega \times I$ complété. D'ailleurs, pour chaque processus mesurable il existe un processus équivalent, de forme canonique, mesurable (voir N. Pintacuda, [8] Teor. 4).

DÉM. L'application $\alpha_n : \Omega \times I \to \Omega \times I$ définie par $\alpha_n(\omega, u) = (\tau^n \omega, u)$ $(n \in \mathbb{N})$ conserve la mesure produit [6], et l'application $X : (\omega, u) \mapsto X_u(\omega)$ est intégrable par hypothèse; il en suit que $X \circ \alpha_n$, i. e. $(\omega, u) \mapsto X_u(\tau^n \omega)$, est intégrable sur $\Omega \times I$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors sur un ensemble $\Omega' \subset \Omega$ de mesure 1 il existe toutes les intégrales

$$\xi_n(\omega) = \int_0^1 X_u(\tau^n \omega)\, du = \int_n^{n+1} X_s(\omega)\, ds \qquad n \geq 0 ;$$

les ξ_n sont des fonctions $\mathcal{F}$ mesurables et intégrables. De plus, le processus $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire au sens strict: en effet, $\xi_n(\omega) = \xi_0(\tau^n \omega)$ par définition. Sur Ω' sont définies toutes les moyennes

$$\frac{1}{n} \int_0^n X_s(\omega)\, ds = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k(\omega) ;$$

cette suite converge P — p. s. lorsque n tend à l'infini, d'après le théorème ergodique. À ce point il suffit d'appliquer une technique traditionnelle (Doob, p. 516-517) pour conclure que la limite (1) existe et est égale à

$$\lim_n \frac{1}{n} \int_0^n X_s(\omega)\, ds = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k(\omega), \quad P \text{ — p. s..}$$

Appelons $\mathcal{C}$ la sous-tribu de $\mathcal{F}$ engendrée par les ξ_n et P_1 la restriction de P à $\mathcal{C}$.

COROLLAIRE 2. *Si en outre le shift d'ampleur* 1 *est ergodique (au moins par rapport à* $(\mathcal{C}, P_1)$), *on a p. s..*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t X_s(\omega)\, ds = \int_0^1 \mathcal{E}(X_u)\, du \text{ [7]}. \tag{2}$$

[6] Il suffit de le vérifier pour les réunions finies de rectangles disjoints (voir par ex. [2], Theorem 1.1).

[7] $\mathcal{E}(X_u) = \int_\Omega X_u\, dP.$

DÉM. Dans cette hypothèse, on sait que

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k\, \xi_k(\omega) = \mathcal{E}(\xi_0) \text{ p. s.};$$

or

$$\mathcal{E}(\xi_0) = \int_\Omega \left(\int_0^1 X_u(\omega)\, du \right) dP = \int_0^1 \left(\int_\Omega X_u(\omega)\, dP \right) du.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. BAUER: *Wahrscheinlichkeitstheorie,* W. de Gruyter, 1668.

[2] P. BILLINGSLEY: *Ergodic Theory and Information,* Wiley, 1965.

[3] F. CHERSI: *Sul prolungamento d'una misura definita su un prodotto infinito,* Rend. Sem. Mat. Padova XXXIX (1967).

[4] J. L. DOOB: *Stochastic Processes,* Wiley, 1953.

[5] K. JACOBS: *Neuere Methoden und Ergerbnisse der Ergodentheorie,* Springer-Verlag, 1960.

[6] P. A. MEYER: *Probabilités et potentiel,* Hermann, 1966.

[7] J. NEVEU: *Calcul des Probabilités,* deuxième édition, Masson 1970.

[8] N. PINTACUDA: *Variabili aleatorie strette,* à paraître dans: Ist. Lombardo, Accad. Sci. Lett.., Rend. A.