SULLE CONGRUENZE IN MULTIGRUPPI ASSOCIATI A SPAZI PROIETTIVI (*)

di FABIO ROSSI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si determinano alcune proprietà geometriche delle congruenze e degli omomorfismi del multigruppo associato ad uno spazio proiettivo.*

SUMMARY. - *Geometrical properties of congruences and homomorphism of the multigroup, associated to a projective space, are determined.*

Introduzione.

Nel 1938 M. Dresher ed O. Ore [2] hanno fornito un primo studio approfondito della nozione di multigruppo introdotta nel 1934 da F. Marty [5] sulla base di ricerche dovute a numerosi Autori. Recentemente M. Koskas [3] ha ampliato i risultati di Dresher ed Ore, soprattutto in relazione alla teoria delle equivalenze e degli omomorfismi. Egli, tra l'altro, ha assegnato una caratterizzazione delle equivalenze regolari e delle congruenze (che costituiscono due tipi di equivalenze compatibili con la struttura di multigruppo).

Una prima applicazione geometrica della teoria dei multigruppi si deve a W. Prenowitz, che ha esaminato la nozione di equivalenza regolare in un multigruppo associato ad una geometria proiettiva «generalizzata» [6]. Qualora però si operi in uno spazio proiettivo, tale nozione perde l'interesse in quanto non vi esistono equivalenze regolari proprie (cfr. prop. 2.1.8).

(*) Pervenuto in Redazione il 19 luglio 1972.
Lavoro eseguito nel periodo di godimento di una borsa di studio del C.N.R.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

Scopo del presente lavoro é di approfondire ulteriormente i risultati di Koskas e di studiarne i riflessi geometrici nell'ambito degli spazi proiettivi. Più precisamente, si introducono e si studiano le congruenze «stabili» di un multigruppo e si assegna una caratterizzazione dei sistemi grafici in uno spazio proiettivo di dimensione finita [8], per il tramite delle congruenze stabili del multigruppo associato a tale spazio. Si passa quindi ad esaminare in modo dettagliato gli omomorfismi del multigruppo associato ad uno spazio proiettivo: essi forniscono, dal punto di vista geometrico, una classe di semicollineazioni generalizzate [1], [4]. Avvalendosi poi di certi legami fra congruenze ed omomorfismi, si stabiliscono delle relazioni fra spazi di Galois costruiti a partire da un medesimo spazio proiettivo. In tal modo si forniscono, fra l'altro, alcuni esempi non banali di semicollineazioni generalizzate iniettive o suriettive proprie fra spazi lineari su campi non isomorfi.

§ 1. Sulle congruenze in multigruppi.

0. Premesse.

Richiamiamo alcune definizioni ed alcuni risultati significativi sulla teoria dei multigruppi che ci saranno utili in seguito, rimandando, per la definizione di multigruppo stesso, alla bibliografia citata nell'introduzione.

DEFINIZIONE 1. [3] Una equivalenza $\mathcal{R}$ di un multigruppo $\mathcal{M}$ si dice *regolare a destra* se $x \mathcal{R} y$, $a \in \mathcal{M} \Longrightarrow x \cdot a \bar{\mathcal{R}} y \cdot a$, dove $A \bar{\mathcal{R}} B \Longleftrightarrow \forall a \in A$, $\exists b \in B$ tale che $a \mathcal{R} b$ et $\forall b \in B$, $\exists a \in A$ tale che $a \mathcal{R} b$.

Una equivalenza $\mathcal{R}$ di $\mathcal{M}$ si dice *regolare* se è regolare a destra ed a sinistra.

DEFINIZIONE 2. [3] Una equivalenza $\mathcal{R}$ di un multigruppo $\mathcal{M}$ si dice *congruenza* se il prodotto di due classi di equivalenza modulo $\mathcal{R}$ (come sottoinsiemi di $\mathcal{M}$) è una unione di classi modulo $\mathcal{R}$, cioè se x, y, $z \in \mathcal{M}$, $z \in [x] \cdot [y] \Longrightarrow [z] \subseteq [x] \cdot [y]$.

DEFINIZIONE 3. [3] Si dice *omomorfismo* di un multigruppo $\mathcal{M}$ in un multigruppo $\mathcal{M}'$, una applicazione f di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}'$ tale che $\forall x$, $y \in \mathcal{M}$, $f(x \cdot y) \subseteq f(x) \cdot f(y)$.

Un omomorfismo f è detto:
quasi forte se $f(z) \in f(x) \cdot f(y) \Longrightarrow \exists\, x', y' \in \mathcal{M}$ tali che

$$f(x') = f(x), f(y') = f(y), \quad z \in x' \cdot y' \, ;$$

forte a sinistra se $f(z) \in f(x) \cdot f(y) \Longrightarrow \exists\, x' \in \mathcal{M}$ tale che

$$f(x') = f(x), \quad z \in x' \cdot y \, ;$$

forte se è forte a destra ed a sinistra;
buono se

$$\forall\, x, y \in \mathcal{M}, f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y).$$

Valgono le seguenti proposizioni [3]:

1.0.1. *Se $\mathcal{R}$ è una equivalenza regolare in $\mathcal{M}$ è possibile assegnare una struttura di multigruppo all'insieme $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ in modo tale che l'applicazione canonica di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ risulti un omomorfismo buono. Viceversa se f è un omomorfismo buono di $\mathcal{M}$ su un multigruppo $\mathcal{M}'$, la equivalenza $\mathcal{R}$ associata ad f è una equivalenza regolare ed $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ è isomorfo ad $\mathcal{M}'$.*

Notiamo che la legge di composizione in $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ rimane così definita

$$[x] * [y] = \{[z] \mid \exists\, z' \mathcal{R} z : \; z' \in x \cdot y\}.$$

1.0.2. *Se $\mathcal{R}$ è una congruenza in $\mathcal{M}$ è possibile assegnare una struttura di multigruppo all'insieme $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ in modo che l'applicazione canonica di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ sia un omomorfismo quasi forte. Viceversa se f è un omomorfismo quasi forte di $\mathcal{M}$ su un multigruppo $\mathcal{M}'$, l'equivalenza associata ad f è una congruenza di $\mathcal{M}$ e il multigruppo $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ è isomorfo ad $\mathcal{M}'$.*

Notiamo che la legge in $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ rimane così definita:

$$[x] * [y] = \{[z] \mid \exists\, x' \mathcal{R} x, \; \exists\, y' \mathcal{R} y : z \in x' \cdot y'\}.$$

Osserviamo che se un'equivalenza $\mathcal{R}$ è sia una congruenza che una equivalenza regolare, anche le strutture quozienti modulo $\mathcal{R}$ vengono a coincidere.

Nel seguito converremo di indicare con $[x] \cdot [y]$ il prodotto di due classi di equivalenza pensate come sottoinsiemi di $\mathcal{M}$, mentre indicheremo la legge quoziente con $*$.

1. Complementi sugli omomorfismi fra multigruppi.

Siano $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}''$ tre multigruppi, f un epimorfismo di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{M}'$ e g un omomorfismo di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}''$.

1.1.1. *Se f è quasi forte e se $\forall\, x, y \in \mathcal{M}, f(x) = f(y) \Longrightarrow g(x) = g(y)$ allora:*

a_1) *Esiste uno ed un solo omomorfismo ψ di $\mathcal{M}'$ in $\mathcal{M}''$ tale che $g = \psi \circ f$;*

a_2) *ψ è quasi forte se e solo se g è quasi forte;*

a_3) *Se g è buono anche ψ è buono;*

a_4) *Se g è forte a destra (sinistra), anche ψ è forte a destra (sinistra);*

a_5) *Se f è forte a destra (sinistra), ψ è forte a destra (sinistra) se e solo se g è forte a destra (sinistra).*

DIM.: a_1) Si ponga, per ogni $x' \in \mathcal{M}'$, $\psi(x') = g(x)$, essendo $f(x) = x'$. Per l'ipotesi, la ψ è allora una applicazione di $\mathcal{M}'$ in $\mathcal{M}''$. Se $z'' \in \psi(x' . y') \Longrightarrow z'' = \psi(z')$ con $z' \in x' . y'$. È possibile allora trovare tre elementi x, y, z di $\mathcal{M}$ tali che $f(x) = x'$, $f(y) = y'$, $f(z) = z'$; per essi risulta $f(z) \in f(x) . f(y)$. Ma, essendo f quasi forte, si ha $f(z) \in f(x) . f(y) \Longrightarrow \exists\ \xi, \eta \in \mathcal{M} : f(\xi) = f(x), f(\eta) = f(y),\ z \in \xi \cdot \eta \Longrightarrow$ $\Longrightarrow g(z) \in g(\xi) \cdot g(\eta) = g(x) \cdot g(y) \Longrightarrow \psi(f(z)) \in \psi(f(x)) \cdot \psi(f(y) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow z'' \in \psi(x') \cdot \psi(y')$. La ψ è dunque un omomorfismo di $\mathcal{M}'$ in $\mathcal{M}''$. È poi evidente che $g = \psi \circ f$ e che ψ è l'unico omomorfismo di $\mathcal{M}'$ in $\mathcal{M}''$ a godere di tali proprietà.

a_5) Sia ψ forte a destra; verifichiamo che anche g è forte a destra. Infatti se $g(z) \in g(x) \cdot g(y)$, si ha $g(z) \in g(x) \cdot g(y) \Longrightarrow \psi(f(z)) \in$ $\in \psi(f(x)) \cdot \psi(f(y)) \Longrightarrow f(z) \in f(x) \cdot y'$ con y' opportuno elemento di $\mathcal{M}'$ tale che $\psi(y') = \psi(f(y))$. Esiste allora un $\tilde{y} \in \mathcal{M}$ con $f(\tilde{y}) = y'$ onde $f(z) \in f(x) \cdot f(\tilde{y})$; $f(z) \in f(x) \cdot f(\tilde{y}) \Longrightarrow \exists\ \bar{y} \in \mathcal{M}$ tale che $f(\bar{y}) = f(\tilde{y})$ e $z \in x \cdot \bar{y}$. Risulta allora facilmente $g(\bar{y}) = g(y)$ da cui l'asserto. Se, viceversa, g è forte a destra $\psi(z') \in \psi(x') \cdot \psi(y') \Longrightarrow \exists\ x, y, z \in \mathcal{M}$: $f(x) = x', f(y) = y', f(z) = z' \Longrightarrow \psi(f(z)) \in \psi(f(x)) \cdot \psi(f(y)) \Longrightarrow g(z) \in$ $\in g(x) \cdot g(y) \Longrightarrow \exists\, \bar{y} \in \mathcal{M}: z \in x \cdot \bar{y},\ \ g(\bar{y}) = g(y) \Longrightarrow f(z) \in f(x) \cdot f(\bar{y}) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow z' \in x' \cdot f(\bar{y}), \psi(f(\bar{y})) = g(\bar{y}) = g(y) = \psi(y')$. Le a_2), a_3), a_4) si verificano in modo del tutto analogo.

Notiamo che $a_3)$, $a_4)$ non sono invertibili, come verrà provato nel § 2 - n^0 2.

Consideriamo ora un multigruppo $\mathcal{M}$, e due equivalenze $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ di $\mathcal{M}$ con $\mathcal{R}$ più fine di $\mathcal{R}'$. Sussiste allora la:

1.1.2. $b_1)$ *Se $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ sono due congruenze, esiste un epimorfismo quasi forte ψ di $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ su $\mathcal{M}/\mathcal{R}'$;*

$b_2)$ *Se $\mathcal{R}$ è una congruenza e se ψ è un epimorfismo quasi forte di $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ su un multigruppo $\mathcal{M}''$, esiste in $\mathcal{M}$ una congruenza $\mathcal{R}''$, meno fine di $\mathcal{R}$, tale che $\mathcal{M}/\mathcal{R}''$ sia isomorfo ad $\mathcal{M}''$;*

$b_3)$ *Se $\mathcal{R}$ è una congruenza ed $\mathcal{R}'$ è una equivalenza regolare esiste un epimorfismo buono ψ di $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ su $\mathcal{M}/\mathcal{R}'$.*

DIM. Risulta agevolmente dalle 1.1.1., ricordando le considerazioni svolte in [3] Cap. II n^0 2 (cfr. anche n^0 0 § 1). Come corollario della 1.1.2 si ha che:

1.1.3. *Se $\mathcal{R}$ è una congruenza di un multigruppo $\mathcal{M}$, allora:*

$c_1)$ *Ogni congruenza $\mathcal{R}'$ di $\mathcal{M}$, meno fine di $\mathcal{R}$, individua una congruenza di $\mathcal{M}/\mathcal{R}$. Viceversa, ogni congruenza di $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ individua una congruenza di $\mathcal{M}$, meno fine di $\mathcal{R}$.*

$c_2)$ *Ogni equivalenza regolare $\mathcal{R}'$ meno fine di $\mathcal{R}$, individua una equivalenza regolare di $\mathcal{M}/\mathcal{R}$.*

2. Congruenze indotte.

Siano $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ due multigruppi, f un omomorfismo quasi forte di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}'$, K un sottomultigruppo di $\mathcal{M}$. Indichiamo con $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ rispettivamente, la congruenza associata ad f e l'equivalenza di K associata alla restrizione f' di f a K (ossia l'equivalenza indotta da $\mathcal{R}$ su K), si ha:

1.2.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché f' sia quasi forte è che $x_1, x_2, x_3 \in K$, $x_3 \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow x_3 \in [x_1]'\cdot[x_2]'$, essendo $[x_i]$ la classe di x_i in $\mathcal{R}$ e $[x_i]'$ quella di x_i in $\mathcal{R}'$.*

DIM. Sia f' quasi forte. Si fissino tre elementi $x_1, x_2, x_3 \in K$ tali che $x_3 \in [x_1]\cdot[x_2]$. Allora $x_3 \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow f(x_3) \in f(x_1)\cdot f(x_2) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow f'(x_3) \in f'(x_1)\cdot f'(x_2) \Longrightarrow \exists\ \xi, \eta \in K$ con $f'(\xi) = f'(x_1), f'(\eta) =$ $= f'(x_2)$ e tali che $x_3 \in \xi\cdot\eta$. Quindi $x_3 \in [x_1]'\cdot[x_2]'$. Inversamente supponiamo $f'(x_3) \in f'(x_1)\cdot f'(x_2)$ con $x_1, x_2, x_3 \in K$. Si ha $f'(x_3) \in$

$\in f'(x_1)\cdot f'(x_2) \Longrightarrow f(x_3) \in f(x_1)\cdot f(x_2) \Longrightarrow \exists\ \bar{\xi}, \bar{\eta} \in \mathcal{M}$ tali che $f(\bar{\xi}) = f(x_1)$, $f(\bar{\eta}) = f(x_2)$, $x_3 \in \bar{\xi}\cdot\bar{\eta}$; dunque $x_3 \in [x_1]\cdot[x_2]$ onde $x_3 \in [x_1]'\cdot[x_2]'$. Ma $x_3 \in [x_1]'\cdot[x_2]' \Longrightarrow \exists\ \xi_1, \xi_2 \in K$ con $f'(\xi_1) = f'(x_1), f'(\xi_2) = f'(x_2)$ ed $x_3 \in \xi_1\cdot\xi_2$.

Osserviamo che se $\mathcal{R}$ è una congruenza di un multigruppo $\mathcal{M}$ e se K è un sottomultigruppo di $\mathcal{M}$, l'equivalenza $\mathcal{R}'$, indotta da $\mathcal{R}$ su K, non è in generale, una congruenza di K (cfr. § 2 n^0 2). Ora, dalla 1.2.1 si può dedurre una condizione sufficiente affinché $\mathcal{R}'$ sia una congruenza. Si ha, infatti:

1.2.2. *Se* $x_1, x_2, x_3 \in K$, $x_3 \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow x_3 \in [x_1]'\cdot[x_2]'$, $\mathcal{R}'$ *è una congruenza di* K.

DIM. Infatti, nell'ipotesi indicata, la restrizione a K dell'epimorfismo canonico di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{M}/\mathcal{R}$, è un omomorfismo quasi forte di K stesso.

Sia ora f un omomorfismo forte a sinistra di un multigruppo $\mathcal{M}$ in un multigruppo $\mathcal{M}'$. La relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ associata ad f è allora una congruenza di $\mathcal{M}$ che diremo *forte a sinistra*. Ci proponiamo di studiare le equivalenze indotte su un sottomultigruppo di $\mathcal{M}$ da equivalenze di tale tipo. Osserviamo intanto che:

1.2.3. $\mathcal{R}$ *è forte a sinistra se e solo se verifica la seguente condizione:*

$$z \in x\cdot y,\ z'\,\mathcal{R}\,z,\ y'\,\mathcal{R}\,y \Longrightarrow \exists\, x'\,\mathcal{R}\,x : z' \in x'\cdot y'.$$

DIM. Se $\mathcal{R}$ è forte a sinistra, esiste un multigruppo $\mathcal{M}'$ ed un omomorfismo forte a sinistra ψ di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}'$, la cui equivalenza associata è $\mathcal{R}$. Quindi $z \in x\cdot y$, $z'\,\mathcal{R}\,z$, $y'\,\mathcal{R}\,y \Longrightarrow \psi(z) \in \psi(x)\cdot\psi(y)$, $\psi(z') = \psi(z), \psi(y') = \psi(y) \Longrightarrow \psi(z') \in \psi(x)\cdot\psi(y') \Longrightarrow \exists\ x' \in \mathcal{M}$ con $\psi(x') = \psi(x)$ tale che $z' \in x'\cdot y'$. Inversamente, la condizione indicata implica che $\mathcal{R}$ è una congruenza di $\mathcal{M}$. L'epimorfismo canonico di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ è allora, come si verifica subito, forte a sinistra.

In particolare, dall'ultima osservazione e dalla proposizione 1.1.1, segue la:

1.2.4. *Se g è un omomorfismo forte a sinistra di* $\mathcal{M}$ *in* $\mathcal{M}'$, *esiste un monomorfismo* ψ *forte a sinistra di* $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ *in* $\mathcal{M}'$, *ove* $\mathcal{R}$ *è la congruenza associata a* g; *inoltre* ψ *è buono se e solo se* $g(\mathcal{M})$ *è un sottomultigruppo di* $\mathcal{M}'$.

Diamo ora la seguente definizione. Diremo che un sottoinsieme K di un multigruppo $\mathcal{M}$ è *debolmente chiuso a sinistra* se $y_1, y_2 \in K$, $y_1 \neq y_2, y_1 \in x\cdot y_2 \Longrightarrow x \in K$.

Si fissi allora una congruenza forte a sinistra $\mathcal{R}$ di $\mathcal{M}$ e si indichi con $\mathcal{R}'$ l'equivalenza indotta da $\mathcal{R}$ su un sottomultigruppo K di $\mathcal{M}$. Verificheremo che:

1.2.5. d_1) *Se K è chiuso* [1] *a sinistra, $\mathcal{R}'$ è una congruenza forte a sinistra di K;*

d_2) *Se K è unitario* [2] *e debolmente chiuso a sinistra, $\mathcal{R}'$ è una congruenza forte a sinistra di K.*

DIM. Supponiamo che $x_3 \in [x_1]\cdot[x_2]$, con $x_1, x_2, x_3 \in K$. Per la 1.2.3. si ha: $x_3 \in [x_1]\cdot[x_2], x_3 \,\mathcal{R}\, x_3 \Longrightarrow \exists\, x_1' \,\mathcal{R}\, x_1 : x_3 \in x_1'\cdot x_2$, onde se K è chiuso a sinistra, o se K è debolmente chiuso a sinistra ed $x_3 \neq x_2$, ne consegue $x_1' \in K$. Se invece K è debolmente chiuso a sinistra ed è $x_3 = x_2$, risulta, tenuto conto che K è anche unitario, $x_3 \in x_1 \cdot x_2$. In ogni caso è dunque $x_3 \in [x_1]'\cdot[x_2]'$; pertanto, in virtù della 1.2.2, $\mathcal{R}'$ è una congruenza di K. Essa è poi forte a sinistra, come subito si constata.

Osserviamo ancora che se f è un omomorfismo forte a sinistra di $\mathcal{M}$ in un multigruppo $\mathcal{M}'$, indicando con f' la restrizione di f ad un sottomultigruppo K di $\mathcal{M}$ la 1.2.5. fornisce il seguente corollario:

1.2.6. *Se K è chiuso a sinistra o se K è unitario e debolmente chiuso a sinistra, f' è un omomorfismo forte a sinistra di K in $\mathcal{M}'$.*

Siano ora $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ due multigruppi qualsiasi, f un omomorfismo quasi forte di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{M}'$ ed $\mathcal{R}$ la congruenza di $\mathcal{M}$ associata ad f. Se K è un sottomultigruppo di $\mathcal{M}$ vale la:

1.2.7. *Condizione necessaria e sufficiente affinché $f(K)$ sia sottomultigruppo di $\mathcal{M}'$ è che:*

$$x_1, x_2 \in K, z \in \mathcal{M}, z \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow [z] \cap K \neq \emptyset.$$

DIM. Se $f(K)$ è sottomultigruppo di $\mathcal{M}'$, $z \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow f(z) \in$ $\in f(x_1)\cdot f(x_2) \Longrightarrow f(z) \in f(K) \Longrightarrow [z] \cap K \neq \emptyset$. Inversamente $y_1, y_2 \in$ $\in f(K)$, $z' \in y_1 \cdot y_2 \Longrightarrow \exists\, z \in \mathcal{M}, \exists\, x_1, x_2 \in K$ tali che $f(z) = z', f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2 \Longrightarrow f(z) \in f(x_1)\cdot f(x_2) \Longrightarrow z \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow [z] \cap K \neq \emptyset \Longrightarrow$ $\Longrightarrow z' = f(z) \in f(K)$. Risulta quindi che $f(K)$ è moltiplicativamente chiuso. Si verifica immediatamente che esso è allora un sottomultigruppo di $\mathcal{M}'$.

[1] Cfr. [2] pag. 714.

[2] Nel senso di [2] pag. 708.

Indicando con f' la restrizione di f a K, e usando le medesime notazioni delle 1.2.1, si ha subito che:

1.2.8. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè f' sia quasi forte ed $f(K)$ sia un sottomultigruppo di $\mathcal{M}'$ è che risulti*:

e_1) $x_1, x_2, x_3 \in K,\ x_3 \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow x_3 \in [x_1]'\cdot[x_2]'$;

e_2) $x_1, x_2 \in K,\ z \in \mathcal{M},\ z \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow [z] \cap K \neq \emptyset$.

Fissiamo ora un sottomultigruppo K di $\mathcal{M}$ e supponiamo che l'equivalenza $\mathcal{R}'$, indotta su K dalla congruenza $\mathcal{R}$ di $\mathcal{M}$ associata ad f, sia una congruenza di K; rimane allora determinato l'epimorfismo canonico φ di K su $K/\mathcal{R}'$. Dimostriamo che:

1.2.9. f_1) *Esiste uno ed un solo monomorfismo λ di $K/\mathcal{R}'$ in $\mathcal{M}'$ tale che $f' = \lambda \circ \varphi$*;

f_2) *λ è buono se e solo se K verifica e_1), e_2).*
(In tale caso λ è un isomorfismo di $K/\mathcal{R}'$ su $f(K)$).

f_3) *Se f è forte e K verifica e_1), e_2) esiste un sottomultigruppo $H \supseteq K$ di $\mathcal{M}$ tale che la restrizione di f ad H sia un omomorfismo forte di H su $f(K)$. Inoltre $x \in H \Longrightarrow [x] \subseteq H$ ed $H/\mathcal{R}$ è isomorfo a $K/\mathcal{R}'$.*

DIM. La f_1) discende immediatamente da 1.1.1. Se K verifica e_1), e_2), f' è quasi forte ed $f(K)$ è sottomultigruppo di $\mathcal{M}'$; dunque λ è un monomorfismo quasi forte (cfr. 1.1.1) sul multigruppo $f(K)$, e perciò λ è buono. Inversamente se λ è buono, λ è anche quasi forte ed $f(K)$ è un sottomultigruppo di $\mathcal{M}'$; ne consegue che f' è quasi forte in K, onde, per la 1.2.8, sono verificate le e_1), e_2).

Per provare la f_3) osserviamo che, essendo $f(K)$ sottomultigruppo, tale risulta anche $H = f^{-1}(f(K))$. Poiché H verifica, come si vede immediatamente, le e_1) e_2) esiste un isomorfismo di $H/\mathcal{R}$ su $f(H) = f(K)$. A norma delle f_1), f_2) esiste allora un isomorfismo di $f(K)$ su $K/\mathcal{R}'$, onde la tesi.

Per quanto ciò apparirà manifesto dal seguito, rileviamo fin d'ora che è possibile la costruzione di monomorfismi quasi forti, ma non buoni, fra due particolari multigruppi. Di conseguenza rimarrà anche provata l'esistenza, per opportuni multigruppi $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$, di qualche omomorfismo quasi forte f di $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}'$ (anche non iniettivo), tale che $f(\mathcal{M})$ non sia sottomultigruppo di $\mathcal{M}'$.

3. Equivalenze stabili in un multigruppo.

Sia $\mathcal{M}$ un multigruppo qualunque. Diremo che un'equivalenza $\mathcal{R}$ di $\mathcal{M}$ è *stabile* se $x \mathcal{R} y \Longrightarrow x \cdot y \overline{\mathcal{R}} y$ (3). L'equivalenza banale $x \mathcal{R} y$ $\forall x, y \in \mathcal{M}$ è ovviamente stabile. Multigruppi dotati di equivalenze stabili non banali si possono costruire in base alla:

1.3.1. *Un'equivalenza $\mathcal{R}$ è stabile se e solo se ogni sua classe è moltiplicativamente chiusa in $\mathcal{M}$.*

Dim. Immediata.

Sussiste poi la seguente proposizione:

1.3.2. *Una congruenza (equivalenza regolare) $\mathcal{R}$ è stabile se e solo se esiste un omomorfismo quasi forte (buono) di $\mathcal{M}$ in un multigruppo idempotente* (4) *$\mathcal{M}'$, la cui equivalenza associata sia $\mathcal{R}$.*

Dim. Ci limiteremo al caso che $\mathcal{R}$ sia una congruenza di $\mathcal{M}$; se $\mathcal{R}$ è una equivalenza regolare, la verifica si esegue senza difficoltà allo stesso modo.

Sia $\mathcal{R}$ una congruenza stabile; indichiamo con $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ il relativo multigruppo quoziente e con $*$ la legge quoziente in $\mathcal{M}/\mathcal{R}$. Se $[x] \in \mathcal{M}/\mathcal{R}$ si ha $[z] \in [x] * [x] \Longrightarrow z \in \xi \cdot \eta$ per qualche $\xi \in [x]$, $\eta \in [x] \Longrightarrow \xi \mathcal{R} \eta \Longrightarrow \xi \cdot \eta \overline{\mathcal{R}} \eta \Longrightarrow \xi \cdot \eta \overline{\mathcal{R}} x \Longrightarrow z \mathcal{R} x \Longrightarrow [z] = [x] \Longrightarrow [x] * [x] = [x]$. $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ è dunque un multigruppo idempotente e l'epimorfismo canonico di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ è quello richiesto. Viceversa, se f è un omomorfismo quasi forte di $\mathcal{M}$ in un multigruppo idempotente $\mathcal{M}'$, indicata con $\mathcal{R}$ la congruenza associata ad f, si ha $x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$; $z \in x \cdot y \Longrightarrow f(z) \in f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(y) = f(y) \Longrightarrow z \mathcal{R} y$, onde $x \cdot y \overline{\mathcal{R}} y$.

Intendendo sempre che $\mathcal{R}$ sia o una congruenza o un'equivalenza regolare, dalla 1.3.2 segue subito che:

1.3.3. *$\mathcal{R}$ è stabile se e solo se $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ è un multigruppo idempotente.*

Inoltre, indicando con $\mathcal{R}_i$ la congruenza (ed equivalenza regolare) $x \mathcal{R}_i y \Longleftrightarrow x = y$ si ottiene la:

1.3.4. *$\mathcal{R}_i$ é stabile se e solo se $\mathcal{M}$ è idempotente.*

(3) Per la definizione di $\overline{\mathcal{R}}$ vedasi n° 0; scriveremo $x . y \overline{\mathcal{R}} y$ in luogo di $x \cdot y \overline{\mathcal{R}} \{y\}$.

(4) Un multigruppo si dice *idempotente* se $a^2 = a \ \forall \ a \in \mathcal{M}$ (cfr. ad esempio [2]).

Sorge ora il problema di vedere se esistono effettivamente equivalenze regolari stabili e congruenze stabili che siano *proprie*, cioè diverse dall'equivalenza banale e dalla $\mathcal{R}_i$. Limitiamoci per il momento al caso delle equivalenze regolari, rinviando al prossimo paragrafo quello delle congruenze. Osserviamo, in primo luogo, che:

1.3.5. *Ogni equivalenza regolare di un multigruppo idempotente* $\mathcal{M}$ *è stabile.*

DIM. Segue dal fatto che l'immagine di $\mathcal{M}$ in un omomorfismo buono è un multigruppo idempotente.

Sia ora $\mathcal{M}$ un multigruppo idempotente qualsiasi contenente almeno due elementi. Nell'insieme $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ è possibile introdurre una struttura di multigruppo, definendo la seguente composizione: $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2) \times (y_1 \cdot y_2)$. Ogni proiezione di $\overline{\mathcal{M}}$ su $\mathcal{M}$, risulta allora un epimorfismo buono la cui equivalenza regolare associata è stabile (cfr. prop. 1.3.2 o 1.3.5) e propria. Quindi:

1.3.6. *È possibile costruire a partire da un qualunque multigruppo idempotente* $\mathcal{M}$ *contenente almeno due elementi, un multigruppo (idempotente)* $\overline{\mathcal{M}}$ *dotato di equivalenze regolari stabili proprie.*

§ 2. Multigruppi e spazi proiettivi.

1. Congruenze ed equivalenze regolari in multigruppi associati a spazi proiettivi.

Sia G uno spazio grafico $(\neq \emptyset)$ di dimensione qualsiasi (finita o no). Nel sostegno di G è possibile introdurre una legge di composizione interna, dicendo *prodotto* di due punti a, b di G, il sottospazio $a \cup b$ congiungente tali punti. Si verifica facilmente (cfr. anche [6]) che in tal modo G assume struttura di multigruppo, che converremo di indicare con G^*. Il multigruppo G^* è, inoltre, idempotente, commutativo, unitario e verifica la proposizione:

$$g)\ x_1, x_2, x_3 \in G^*,\ x_3 \in x_1 \cdot x_2,\ x_3 \neq x_1 \Longrightarrow x_2 \in x_1 \cdot x_3 .$$

Viceversa è possibile introdurre una ben determinata struttura di spazio grafico G nel sostegno di un multigruppo G^* del tipo precedente, qualora si definiscano, in modo ovvio, le *rette* di G. Nel seguito diremo che G^* è canonicamente associato a G e viceversa. Per G^* vale la seguente proposizione:

2.1.1. h_1) *Ogni sottomultigruppo* S^* *di* G^* *può essere interpretato come sottospazio non vuoto, di* G *e viceversa;*

h_2) S^* *è sottomultigruppo di* G^* *se e solo se* S^* *è moltiplicativamente chiuso in* G^*;

h_3) S^* *è sottomultigruppo di* G^* *se solo se* S^* *è un sottoinsieme non vuoto e debolmente chiuso;*

h_4) *un sottoinsieme* $S^*(\neq \emptyset)$ *di* G^* *è chiuso se e solo se* $S^* = G^*$;

h_5) *Se* S'^*, S''^* *sono due sottomultigruppi di* G^*, $S'^* \cdot S''^*$ *è un sottomultigruppo di* G^*. *Inoltre, interpretando* S'^*, S''^* *come sottospazi* S', S'' *di* G, $S'^* \cdot S''^*$ *diventa il sottospazio* $S' \cup S''$ *congiungente* S' *ed* S'';

h_6) *Se* f *è un epimorfismo quasi forte (buono) di* G^* *su un multigruppo* G', G' *è commutativo, unitario e verifica la* g).

DIM. Le h_1), h_2), h_3), h_4), h_5) sono immediate (si veda anche [6]). Per verificare la h_6) proviamo che G' è commutativo se f è quasi forte; le altre affermazioni si ottengono in modo analogo. Sia $x', y' \in G'$ e $z' \in x' \cdot y'$; $x', y' \in G', z' \in x' \cdot y' \Longrightarrow \exists\, x, y, z \in G : f(z) \in f(x) \cdot f(y), f(x) = x', f(y) = y', f(z) = z'$; $f(z) \in f(x) \cdot f(y) \Longrightarrow \exists\, \xi, \eta \in G : f(\xi) = f(x), f(\eta) = f(y), z \in \xi \cdot \eta \Longrightarrow z \in \eta \cdot \xi \Longrightarrow f(z) \in f(y) \cdot f(x) \Longrightarrow z' \in y' \cdot x' \Longrightarrow x' \cdot y' \subseteq y' \cdot x'$. Il viceversa è immediato.

In particolare osserviamo che:

2.1.2. *Se* f *è un omomorfismo buono di* G^* *in* G', $f(G^*)$ *è un sottomultigruppo di* G' *canonicamente associato ad uno spazio grafico.*

DIM. La tesi risulta subito dalla 2.1.1 - h_6), ricordando che $f(G^*)$ è un multigruppo idempotente (cfr. § 1-n⁰ 3).

La 2.1.2 ammette come immediato corollario la seguente proposizione (che compare anche in [6]):

2.1.3. *Se* $\mathcal{R}$ *è una equivalenza regolare di* G^*, $G^*/\mathcal{R}$ *è canonicamente associato ad uno spazio grafico.*

Dai risultati ottenuti al n^0 3 § 1 consegue la seguente proposizione:

2.1.4. *Se* f *è un epimorfismo quasi forte di* G^*, *su* G', G' *è canonicamente associato ad uno spazio grafico se e solo se la congruenza* $\mathcal{R}$, *associata ad* f, *è stabile.*

DIM. Infatti se G' è canonicamente associato ad uno spazio grafico, G' è un multigruppo idempotente e la 1.3.2 fornisce allora l'asserto. Viceversa se $\mathcal{R}$ è stabile, $G^*/\mathcal{R}$ è idempotente (cfr. 1.3.3) ed isomorfo a G'; G' risulta allora idempotente e, per la 2.1.1-h_6), canonicamente associato ad uno spazio grafico.

Come ovvia conseguenza della 2.1.4 si ottiene:

2.1.5. *Se $\mathcal{R}$ è una congruenza di G^*, $G^*/\mathcal{R}$ è canonicamente associato ad uno spazio grafico se e solo se $\mathcal{R}$ è stabile.*

Osserviamo ancora che, in base alle 2.1.1-h_2) e 1.3.1,

2.1.6. *Una equivalenza $\mathcal{R}$ di G^* è stabile se e solo se ogni sua classe è un sottomultigruppo di G^*.*

In [7] si è introdotta la nozione di g-partizione di una «geometria» G qualunque. Se in particolare G è uno spazio grafico, da quanto precede, segue facilmente che:

2.1.7. *Indicando con $\mathcal{R}$ una equivalenza regolare del multigruppo G^*, la partizione di G, determinata da $\mathcal{R}$, è una g-partizione di G. Viceversa, ogni g-partizione di G determina una equivalenza regolare $\mathcal{R}$ in G^*.*

Quindi, per una proprietà stabilita in [7]:

2.1.8. *Se G è uno spazio grafico irriducibile, ogni equivalenza regolare $\mathcal{R}$ di G^* o è banale o coincide con $\mathcal{R}_i$.*

Supponiamo d'ora in poi di operare su uno spazio grafico *irriducibile* S_{s-1} di dimensione finita $s-1$.

Ricordiamo che si dice *fibrazione* di S_{s-1} mediante sottospazi S_{n-1} $(1 < n < s)$, ogni sistema di S_{n-1} che costituisce una partizione di S_{s-1} (cfr. [8], oppure [9]). In particolare, data una fibrazione Φ di S_{s-1} si dice che gli S_{n-1} di Φ costituiscono un *sistema grafico di* S_{n-1} dello spazio grafico S_{s-1}, se Φ induce una fibrazione in ogni sottospazio di S_{s-1} che congiunga due o più dei suoi S_{n-1} (cfr. [8]).

Ciò premesso, dimostriamo la seguente proposizione:

2.1.9. *Se $\mathcal{R}$ è una congruenza stabile propria del multigruppo S^*_{s-1}, la partizione Φ di S_{s-1} determinata da $\mathcal{R}$ è una fibrazione di S_{s-1} i cui sottospazi costituiscono un sistema grafico in S_{s-1}. Viceversa ogni sistema grafico in S_{s-1} individua una congruenza stabile propria di S^*_{s-1}.*

DIM. Sia $\mathcal{R}$ una congruenza stabile propria in S^*_{s-1}. In base alle 2.1.1.-h_1) e 2.1.6, la $\Phi = \{[x]\}_{x \in S_{s-1}}$ può essere considerata come partizione in sottospazi di S_{s-1}. Poiché $\mathcal{R}$ è propria esiste almeno un $x \in S_{s-1}$ tale che il sottospazio $[x]$ abbia dimensione $n-1$, con $1 < n < s$. Se $[y] \in \Phi$, $[y] \neq [x]$, esiste, dalla supposta irriducibilità di S_{s-1}, un $z \in x \cdot y$, $z \neq x$, $z \neq y$; pertanto, essendo $\mathcal{R}$ una congruenza stabile di S^*_{s-1} sarà $z \in x \cdot y$, $z \neq y \Longrightarrow x \in z \cdot y \Longrightarrow$ $\Longrightarrow [x] \subseteq [z] \cdot [y]$; $[z] \cdot [x] \subseteq [z] \cdot ([z] \cdot [y]) = ([z] \cdot [z]) \cdot [y] = [z] \cdot [y]$. Analogamente si dimostra l'inclusione inversa e perciò $[z] \cdot [x] = [z] \cdot [y]$. Interpretando allora $[x], [y], [z]$ come sottospazi di S_{s-1} di dimensione $n-1, m-1$, $r-1$ rispettivamente e ricordando la 2.1.1-h_5) si ha $n + r - 1 =$ $= m + r - 1$, ossia $n = m$. La Φ risulta allora una fibrazione di S_{s-1}, essendo costituita da sottospazi di dimensione $n-1$; è poi evidente che tali sottospazi costituiscono un sistema grafico in S_{s-1}.

Viceversa, fissato un sistema grafico in S_{s-1}, consideriamo i suoi elementi come sottomultigruppi di S^*_{s-1} ottenendo in tal modo una partizione di S^*_{s-1}. L'equivalenza $\mathcal{R}$ di S^*_{s-1} individuata da tale partizione è allora stabile e propria (cfr. 2.1.6 - § 1 n^0 3) ed è una congruenza per definizione stessa di sistema grafico.

Ricordando ora la 2.1.5, dalla proposizione precedente si ha che:

2.1.10. *Se Σ è un sistema grafico in S_{s-1} ed $\mathcal{R}$ è la congruenza di S^*_{s-1} individuata da Σ, $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$ è canonicamente associato ad uno spazio grafico; inversamente, se $\mathcal{R}$ è una congruenza propria di S^*_{s-1} e $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$ è canonicamente associato ad uno spazio grafico, $\mathcal{R}$ individua un sistema grafico in S_{s-1}.*

Osserviamo in particolare che essendo S_{s-1}, nelle nostre ipotesi, uno spazio grafico irriducibile, tale risulta anche lo spazio grafico canonicamente associato a $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$, come deriva dalle considerazioni fatte a proposito della 2.1.9; inoltre se si suppone l'esistenza di un sistema grafico di sottospazi S_{n-1} in S_{s-1} (per cui necessariamente $s = nr$, $r > 1$), si ritrova, come corollario della 2.1.10, la proposizione I di [8] (n^0 37, pag. 38). In base a tale proposizione appare, tra l'altro, che la dimensione dello spazio grafico canonicamente associato a $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$ è $r-1$.

Siamo ora in grado di risolvere la questione posta al § 1 n^0 3, circa l'esistenza di congruenze (non regolari) stabili proprie. Se infatti S_{s-1} è uno spazio di Galois, ove $s = nr$, $r > 1$, $n > 1$, è noto che esistono sistemi grafici « elementari » in S_{s-1} costituiti da sottospazi S_{n-1} (cfr. [8]); l'equivalenza di S^*_{s-1} individuata da un tale sistema è allora una congruenza stabile propria di S^*_{s-1}.

L'equivalenza fra i concetti di congruenza stabile propria di un multigruppo e di sistema grafico in uno spazio proiettivo, implica che lo studio dei sistemi grafici può ricondursi a quello delle congruenze stabili nei multigruppi associati. Le proprietà ottenute nei numeri precedenti forniscono allora, in particolare, la seguente proposizione:

2.1.11. i_1) *Uno spazio grafico irriducibile S_{s-1} può essere fibrato in sottospazi costituenti un sistema grafico, se e solo se esiste un epimorfismo quasi forte ma non buono di S^*_{s-1} su un multigruppo idempotente G'.*

i_2) *Siano Σ un sistema grafico in S_{s-1}, $\mathcal{R}$ la congruenza di S^*_{s-1} individuata di Σ, $\bar{G}$ lo spazio grafico canonicamente associato a $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$. Esiste un sistema grafico di $\bar{G}$ se e solo se esiste una congruenza stabile propria $\mathcal{R}'$ di S^*_{s-1} strettamente meno fine di $\mathcal{R}$.*

DIM. La i_1) si prova subito osservando che se Σ è un sistema grafico di S_{s-1} ed $\mathcal{R}$ è la congruenza di S^*_{s-1} ad esso associata, l'epimorfismo canonico di S^*_{s-1} su $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$ è un omomorfismo non buono (cfr. 2.1.8 e n^0 0) di S^*_{s-1} su un multigruppo idempotente (cfr. 1.3.3); per il viceversa si ricordi che un omomorfismo iniettivo quasi forte su un multigruppo è necessariamente buono. La i_2) e immediata in base alla 1.1.2-b_1).

Per concludere questo numero accenniamo ad alcune considerazioni sulle congruenze forti in un multigruppo associato ad uno spazio grafico.

Premettiamo anzitutto che è possibile dare un esempio di congruenza forte propria almeno per il multigruppo associato allo spazio proiettivo tridimensionale sul campo reale [5]. Senza insistere

[5] Sia $\mathcal{A}_3$ uno spazio affine tridimensionale costruito sul campo reale, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $(0, x, y, z)$, e sia S_3 lo spazio proiettivo associato. Fissato in S_3 un piano Π non passante per 0, e detto Π_∞ il piano improprio di S_3, si considerino i seguenti insiemi:

$$A_1 = \{P \mid d(0, P) = n \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

$$A_2 = \{Q \mid Q \in \Pi_\infty,\ Q \notin \Pi,\ (0 \cup Q) \cap \Pi \in A_1\}$$

$$A_3 = \{R_1, R_2\} \text{ con } R_1 \neq R_2,\ R_1, R_2 \in \Pi \cap \Pi_\infty$$

e la partizione di S_3 nei due insiemi $A = A_1 \vee A_2 \vee A_3$; $B = S_3 \dot{-} A$. Si verifica allora che l'equivalenza di S_3^* individuata da tale partizione di S_3, è una congruenza forte.

su tale questione, ci limitiamo a fornire una proprietà sulle congruenze forti proprie $\mathcal{R}$ di un multigruppo associato ad uno spazio grafico G. Precisamente:

2.1.12. l_1) *Se K^* è un sottomultigruppo di G^*, l'equivalenza indotta da $\mathcal{R}$ su K^* è una congruenza forte di K^*.*

l_2) *$\mathcal{R}$ non è stabile, ossia $G^*/\mathcal{R}$ non può essere associato ad uno spazio grafico.*

DIM. La 2.1.12 si verifica immediatamente in base ai risultati fin qui ottenuti (cfr. anche 1.2.5 e 2.1.1).

2. Semicollineazioni generalizzate di uno spazio grafico ed omomorfismi del multigruppo canonicamente associato.

Siano G, G' due spazi grafici irriducibili di dimensione ≥ 2 finita o no, e G^*, G'^* i multigruppi canonicamente associati a G e G'. È immediato riconoscere che:

2.2.1. *Ogni omomorfismo f di G^* in G'^* può essere interpretato come applicazione di G in G' tale che:*

m_1) *Se x, y, z sono punti allineati di G, $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$ sono punti allineati di G';*

m_2) *Se x' è un punto di G', $f^{-1}(x')$ è un sottospazio (eventualmente vuoto) di G.*

In base alla m_1) ed a [1] n^0 18, la f è dunque una particolare semicollineazione generalizzata di G in G'. Viceversa:

2.2.2. *Ogni semicollineazione generalizzata f di G in G' verificante m_2), può essere interpretata come omomorfismo di G^* in G'^*.*

Gli omomorfismi fra multigruppi canonicamente associati a spazi grafici forniscono quindi una classe di semicollineazioni generalizzate, individuata dalla 2.2.2.

La seguente proposizione fornisce alcune proprietà delle predette applicazioni (si veda anche [1] e [4]).

2.2.3. n_1) *Un mono-epimorfismo f di G^* su G'^* può essere considerato come semicollineazione di G su G' e viceversa. Essa è una collineazione se e solo se f è quasi forte;*

n_2) *Un monomorfismo quasi forte ma non buono di G^* in G'^* può essere considerato come semicollineazione generalizzata iniettiva* (*cfr.* [4]) «*propria*» ([6]) *di G in G'. Viceversa, ogni semicollineazione generalizzata iniettiva propria di G in G' risulta un monomorfismo non buono di G^* in G'^**;

n_3) *un epimorfismo quasi forte di G^* su G'^* è una semicollineazione generalizzata suriettiva* «*propria*» ([7]) *di G su G', se e solo se non è buono.*

DIM. La n_1) è immediata di verifica. Per la n_2) osserviamo che in un monomorfismo quasi forte ma non buono f, $f(G^*)$ non può essere sottomultigruppo di G'^* e che, considerato $f(G^*)$ come sottoinsieme di G', esso non è contenuto in una sua retta. Inversamente la 2.2.2 assicura che ogni semicollineazione generalizzata iniettiva f può essere considerata come un monomorfismo di G^* in G'^*; se poi f è propria, tale monomorfismo non può essere buono, poiché altrimenti $f(G^*)$ sarebbe canonicamente associato ad un sottospazio di dimensione ≥ 2 di G'. La n_3) è immediata ricordando la 2.1.8.

Osserviamo in particolare che è sempre possibile assegnare un epimorfismo quasi forte e non buono di un multigruppo associato ad uno spazio di Galois, di dimensione $s - 1$, su campo γ di ordine q, su un ben determinato multigruppo associato ad uno spazio di Galois di dimensione $r - 1$ su un campo δ di ordine q^n qualora sia $s = rn$, $r \geq 3$, $n \geq 2$ (cfr. § 2 n^0 1 [8] n^0 22, n^0 39). Si ottengono in tale modo esempi di semicollineazioni generalizzate suriettive proprie fra spazi lineari su campi diversi.

La seguente proposizione 2.2.4 stabilisce alcune proprietà delle semicollineazioni generalizzate, che sono restrizione di una data semicollineazione generalizzata.

Siano infatti G e G' due spazi grafici irriducibili di dimensione ≥ 2 ed f una semicollineazione generalizzata suriettiva di G su G'. che si possa interpretare come omomorfismo quasi forte di G^* su G'^*. Indicata con $\mathcal{R}$ l'equivalenza associata ad f, si consideri un sottomultigruppo K^* di G^*, associato ad un sottospazio K di G di dimensione ≥ 2. In tali ipotesi si verifica che:

([6]) Diremo che una semicollineazione f generalizzata iniettiva è *propria* se $f(G)$ non è sottospazio di G'. Si noti che tale definizione è più restrittiva di quella data in [4].

([7]) Diremo che una semicollineazione generalizzata suriettiva f è *propria* se f non è iniettiva.

2.2.4. o_1) *La restrizione f' di f a K è una semicollineazione generalizzata su un sottospazio di G' (quindi suriettiva) se e solo se:*

1) $x_1, x_2 \in K^*$, $z \in G^*$, $z \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow [z] \cap K^* \neq \emptyset$;

2) $\forall\, x_1, x_2 \in K^*$, $\exists\, x_3 \in K^*: \; x_3 \notin [x_1]\cdot[x_2]$;

o_2) *Nell'ipotesi di* 1) *e* 2), *la f' è una semicollineazione se e solo se:*

3) $\forall\, x \in K^* \Longrightarrow [x] \cap K^* = \{x\}$;

o_3) *Nell'ipotesi di* 1), *la f' è una collineazione se e solo se:*

4) $x_1, x_2, x_3 \in K^*$, $x_3 \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow x_3 \in x_1 \cdot x_2$.

DIM. La proposizione si prova facilmente mediante le 1.2.7, 1.2.8.

Fissiamo ora uno spazio di Galois S_{s-1}, con $s = 2r$, $r \geq 3$. Assegnato (come è sempre possibile in tale ipotesi [8]) un sistema grafico Σ di rette di S_{s-1}, indichiamo con f l'epimorfismo canonico del multigruppo S^*_{s-1} sul multigruppo $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$ individuato da Σ (cfr. § 2 n^0 1). Se K è un qualsiasi iperpiano di S_{s-1}, si prova senza difficoltà che K contiene almeno una retta di Σ e che K^* verifica le 1), 2) ma non le 3), 4) di 2.2.4. Rimane allora definita, per ogni iperpiano K di S_{s-1}, una semicollineazione generalizzate suriettiva propria di K sullo spazio grafico canonicamente associato ad $f(K^*)$. Notiamo, in particolare, che l'equivalenza indotta da $\mathcal{R}$ su K^* non è una congruenza di K^* (cfr. 2.1.9).

Poggiando sui risultati finora ottenuti ci proponiamo di assegnare una proposizione che, stabilendo certi legami fra spazi grafici costruiti a partire da un medesimo spazio di Galois, fornisce alcuni esempi di semicollineazioni generalizzate proprie.

Sia S^*_{s-1} un multigruppo associato ad uno spazio di Galois S_{s-1}, con $s = 2r$, $r \geq 2$. Indicando con $\mathcal{R}$ la congruenza di S^*_{s-1} individuata da un sistema grafico di rette in S_{s-1} si ha che:

2.2.5. *Esiste in S^*_{s-1} un sottomultigruppo K^*_{r-1}, canonicamente associato ad un sottospazio K_{r-1} di S_{s-1} tale che:*

1) $[x] \cap K^*_{r-1} = \{x\}$, $\forall\, x \in K^*_{r-1}$;

2) $x_1, x_2, x_3 \in K^*_{r-1}$, $x_3 \in [x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow x_3 \in x_1 \cdot x_2$;

3) $\forall\, x_1 \neq x_2 \in K^*_{r-1}$, $\exists\, z \in S^*_{s-1}: \; z \in [x_1]\cdot[x_2]$, $[z] \cap K^*_{r-1} = \emptyset$.

DIM. Osserviamo in primo luogo che è possibile trovare in S_{s-1} r rette distinte di Σ, $a_1, a_2, \ldots, a_r$, tali che il loro sottospazio congiungente abbia dimensione $2r - 1$; risulta allora che scelte comunque $t\,(< r)$ fra queste, le rimanenti $r - t$ hanno intersezione vuota con lo spazio congiungente le t rette scelte. Presi ora arbitrariamente i punti $y_1 \in a_1$, $y_2 \in a_2, \dots, y_r \in a_r$, verifichiamo che il sottospazio $K_d = y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_r$ è il sottospazio cercato. Procediamo per induzione su r. Se $r = 2$, si ha $d = 1$ e K_1^* verifica banalmente 1), 2); per la 3) vedasi [8] n^0 22. Supponiamo $r > 2$ ed ammettiamo che comunque si scelgano $r - 1$ rette fra $a_1, a_2, \dots, a_r$, il sottospazio H, determinato col metodo precedente, abbia dimensione $r - 2$ e sia tale che H^* verifichi 1), 2), 3). Evidentemente $K_d = H \cup y_r$ se $H = y_1 \cup y_2 \dots \cup y_{r-1}$, onde intanto $d = r - 1$ poiché $y_r \notin H$. Verifichiamo che K_{r-1}^* gode della 1). Infatti, nessuna retta di Σ passante per un punto y di K_{r-1} fuori da H, può incontrare K_{r-1} in un punto distinto da y; altrimenti, dovendo incontrare anche H, sarebbe contenuta in $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_{r-1}$. Ne seguirebbe $K_{r-1} \subseteq a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_{r-1}$ e quindi $a_r \cap (a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_{r-1}) \neq \emptyset$. Se poi $y \in H$, l'ipotesi induttiva e le considerazioni precedenti portano a riconoscere che la retta di Σ per y interseca K_{r-1} in y soltanto. Per verificare la 2) consideriamo tre punti $x_1, x_2, x_3 \in K_{r-1}$ con $x_1 \neq x_2$, tali che l'S_3 congiungente le rette di Σ passanti per x_1 ed x_2 rispettivamente, contenga x_3. Se x_1, $x_2 \in H$, anche $x_3 \in H$ onde, in H^*, $x_3 \in x_1 \cdot x_2$. Se, inversamente, $x_1 \notin H$, la retta $x_1 \cup x_2$ deve intersecare H in un punto ed S_3 interseca $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_{r-1}$ in (almeno) una retta di Σ. Se x_3 non appartenesse ad $x_1 \cup x_2$, la retta $x_1 \cup x_3$ dovrebbe incontrare H in un punto necessariamente distinto dal precedente; pertanto S_3 sarebbe contenuto in $a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_{r-1}$ e, con esso, anche K_{r-1}; ma ciò constrasta con una conclusione precedente. Osserviamo che la proposizione 2) testè dimostrata assicura che comunque si fissino due punti $x_1 \neq x_2$ di K_{r-1}, lo spazio S_3, congiungente le rette di Σ passanti per x_1 ed x_2 rispettivamente, interseca K_{r-1} in una retta. Da ciò e da [8] n^0 22 segue immediatamente la 3).

Sia ora S_{s-1} uno spazio di Galois, ove $s = r'n$, $r' = 2r$, $n \geq 2$, $r \geq 2$. Per il multigruppo S_{s-1}^* sussiste allora la:

2.2.6. *Esistono in S_{s-1}^* una congruenza stabile propria $\mathcal{R}$ ed un sottomultigruppo K_{nr-1}^*, associato ad un sottospazio K_{nr-1} di S_{s-1}, tali che, indicata con $\mathcal{R}'$ l'equivalenza indotta da $\mathcal{R}$ su K_{nr-1}^*,*

1) $x_1, x_2, x_3 \in K_{nr-1}^*$, $x_3 \in [x_1] \cdot [x_2] \Longrightarrow x_3 \in [x_1]' \cdot [x_2]'$;

2) $\exists\, x_1, x_2 \in K_{nr-1}^*$, $\exists\, z \in S_{s-1}^* : z \in [x_1] \cdot [x_2]$ e $[z] \cap K_{nr-1}^* = \emptyset$;

3) $\mathcal{R}$ *individua un sistema grafico Σ di S_{s-1} in S_{2n-1};*

4) $\mathcal{R}'$ *individua un sistema grafico Σ' di K_{nr-1} in S_{n-1}.*

DIM. Assegnamo un sistema grafico Σ'' di S_{s-1} in S_{n-1}. Σ'' individua una congruenza stabile propria $\mathcal{R}''$ di S^*_{s-1} e lo spazio grafico G, canonicamente associato a $S^*_{s-1}/\mathcal{R}''$, ha dimensione $r'-1$ ed è dunque uno spazio di Galois (cfr. 2.1.9, 2.1.10 e [8] n⁰ 37).

Sia $\overline{\Sigma}$ un sistema grafico di rette di G ed $\overline{\mathcal{R}}$ la congruenza di $S^*_{s-1}/\mathcal{R}''$ da esso individuata. Esiste allora una congruenza stabile propria $\mathcal{R}$ di S^*_{s-1}, strettamente meno fine di $\mathcal{R}''$ (cfr. 2.1.11) tale che $x\,\mathcal{R}\,y \Longleftrightarrow (g\circ f)(x) = (g\circ f)(y)$, essendo f, g rispettivamente l'epimorfismo canonico di S^*_{s-1} su $S^*_{s-1}/\mathcal{R}''$ e quello di $S^*_{s-1}/\mathcal{R}''$ su $(S^*_{s-1}/\mathcal{R}'')/\overline{\mathcal{R}}$. Proviamo intanto che per ogni $x\in S^*_{s-1}$ si ha $[x]=[y]''\cdot[z]''$, con y e z opportuni elementi di S^*_{s-1}. Per le ipotesi fatte su $\overline{\Sigma}$, esistono infatti due elementi $y, z\in S^*_{s-1}$ tali che $\overline{[f(x)]} = f(y)\cdot f(z)$. Dunque $h\in[y]''\cdot[z]'' \Longrightarrow f(h)\in f(y)\cdot f(z) \Longrightarrow f(h)\in\overline{[f(x)]} \Longrightarrow (g\circ f)(h) = (g\circ f)(x) \Longrightarrow h\in[x]$. Inversamente $r\in[x] \Longrightarrow (g\circ f)(r) = (g\circ f)(x) \Longrightarrow g(f(r)) = g(f(x)) \Longrightarrow f(r)\in\overline{[f(x)]} = f(y)\cdot f(z)$. Essendo f quasi forte si conclude $r\in[y]''\cdot[z]''$. Interpretando allora $[x]$, $[y]''$, $[z]''$ come sottospazi di S_{s-1} (cfr. 2.1.1, 2.1.6), si conclude che il sistema grafico Σ di S_{s-1}, associato alla congruenza $\mathcal{R}$, è costituito da sottospazi di dimensione $2n-1$ (cfr. 2.1.1·h_5). Dalla proposizione 2.2.5, applicata a $S^*_{s-1}/\mathcal{R}''$, deriva l'esistenza di un sottomultigruppo H^*_{r-1} di $S^*_{s-1}/\mathcal{R}''$ verificante, in relazione alla $\overline{\mathcal{R}}$, le 1), 2), 3), di di cui alla 2.2.5 stessa. Si prova allora subito che il sottospazio K di S_{s-1} associato a $K^* = f^{-1}(H^*_{r-1})$, ha dimensione $nr-1$. Proviamo che per ogni $x\in K^*_{nr-1}$ è $[x]\cap K^*_{nr-1} = [x]''$, onde resterà stabilito che l'equivalenza $\mathcal{R}'$, indotta da $\mathcal{R}$ su K^*_{nr-1}, coincide con la limitazione, a quest'ultimo sottomultigruppo, della $\mathcal{R}''$. Infatti, ricordando la 2.2.5, si ha $x\in K^*_{nr-1}$, $y\in[x]\cap K^*_{nr-1} \Longrightarrow g(f(y)) = g(f(x))$, $f(x)$, $f(y)\in H^*_{r-1} \Longrightarrow f(y)\in\overline{[f(x)]} \Longrightarrow f(x) = f(y) \Longrightarrow y\in[x]''$. Il viceversa è analogo. Verifichiamo ora che K^*_{nr-1} gode delle proprietà 1), 2). Fissiamo pertanto tre elementi $x_1, x_2, x_3\in K^*_{nr-1}$ tali che $x_3\in[x_1]\cdot[x_2]$. Essendo f, g quasi forti ed applicando la 2.2.5 ad H^*_{r-1} si ottiene: $x_1, x_2, x_3\in K^*_{nr-1}$, $x_3\in[x_1]\cdot[x_2] \Longrightarrow g(f(x_3))\in g(f(x_1))\cdot g(f(x_2))$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)\in H^*_{r-1} \Longrightarrow f(x_3)\in\overline{[f(x_1)]}\cdot\overline{[f(x_2)]} \Longrightarrow f(x_3)\in f(x_1)\cdot f(x_2) \Longrightarrow x_3\in[x_1]''\cdot[x_2]'' \Longrightarrow x_3\in[x_1]'\cdot[x_2]'$. Se poi $x_1, x_2\in K^*_{nr-1}$ con $f(x_1)\neq f(x_2)$, poiché $f(x_1)$, $f(x_2)\in H^*_{r-1}$, esisterà un $f(z)\in S^*_{s-1}/\mathcal{R}''$ tale $f(z)\in\overline{[f(x_1)]}\cdot\overline{[f(x_2)]}$ e $\overline{[f(z)]}\cap H^*_{r-1} = \emptyset$. Essendo $g\circ f$ quasi forte, poiché $(g\circ f)(z)\in(g\circ f)(x_1)\cdot(g\circ f)(x_2)$ si conclude che $z\in[x_1]\cdot[x_2]$. Quindi $z\in[x_1]\cdot[x_2]$ e $[z]\cap K^*_{nr-1} = \emptyset$.

Siamo ora in grado di verificare la seguente proposizione:

2.2.7. *È possibile costruire a partire da uno spazio di Galois S_{s-1}, con $s = r'n$, $r' = 2r$, $n \geq 2$ $r \geq 3$, due spazi di Galois S'_{r-1} ed S''_{r-1} in modo che:*

1) *Esista una semicollineazione generalizzata non iniettiva $\bar{\psi}$ di un sottospazio K_{nr-1} di S_{s-1} in, ma non su, S''_{r-1}, tale che il sottospazio generato da $\bar{\psi}(K_{nr-1})$ sia S''_{r-1} stesso;*

2) *Esista una semicollineazione generalizzata propria suriettiva φ di K_{nr-1} su S'_{r-1};*

3) *Esista una semicollineazione generalizzata propria suriettiva ψ di S_{s-1} su S''_{r-1} tale che $\bar{\psi}(x) = \psi(x) \ \forall x \in K_{nr-1}$;*

4) *Esista una semicollineazione generalizzata propria iniettiva λ di S'_{r-1} in S''_{r-1}, tale che $\bar{\psi} = \lambda \circ \varphi$.*

DIM. Per l'ipotesi fatta, S^*_{s-1} verifica la 2.2.6. Il multigruppo $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$, ove $\mathcal{R}$ è la congruenza di S^*_{s-1} di cui a 2.2.6, è allora canonicamente associato ad uno spazio di Galois S''_{r-1} (cfr. 2.1.10 e [8] n⁰ 37, 39). Indicando con ψ l'epimorfismo canonico di S^*_{s-1} su $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$, la 2.2.6. assicura che esiste un sottomultigruppo K^*_{nr-1} di S^*_{s-1} tale che la restrizione $\bar{\psi}$ di ψ a K^*_{nr-1} sia un omomorfismo quasi forte, e $\bar{\psi}(K^*_{nr-1})$ non sia un sottomultigruppo di $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$ (cfr. 1.2.1., 1.2.7). D'altra parte, conservando le notazioni di 2.2.6., possiamo osservare che esiste un isomorfismo τ di $(S^*_{s-1}/\mathcal{R}'')/\bar{\mathcal{R}}$ su $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$ tale che $\psi = \tau \circ (g \circ f)$. Essendo allora $\bar{\psi}(K^*_{nr-1}) = \tau(g(H^*_{r-1}))$, risulta che il sottomultigruppo generato da $\bar{\psi}(K^*_{nr-1})$ coincide con $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$ poiché, in base alla 2.2.5., $g(H^*_{r-1})$ genera $(S^*_{s-1}/\mathcal{R}'')/\bar{\mathcal{R}}$. Essendo l'equivalenza $\mathcal{R}'$ di K^*_{nr-1} associata a $\bar{\psi}$ una congruenza, resta provata, in base alla 1.2.9., l'esistenza di un monomorfismo λ quasi forte (cfr. 1.1.1) ma non buono di $K^*_{nr-1}/\mathcal{R}'$ (che, per la 2.2.6, è canonicamente associato ad uno spazio di Galois S'_{r-1}) in $S^*_{s-1}/\mathcal{R}$, tale che $\lambda(K^*_{nr-1}/\mathcal{R}') = \bar{\psi}(K^*_{nr-1})$. Interpretando geometricamente i risultati fin qui ottenuti si prova la tesi di 2.2.7..

Rileviamo esplicitamente che la 2.2.7 risponde al quesito posto al § 1 n⁰ 2, circa l'esistenza di omomorfismi quasi forti f di un multigruppo $\mathcal{M}$ in un multigruppo $\mathcal{M}'$ tali che $f(\mathcal{M})$ non sia sottomultigruppo di $\mathcal{M}'$, e di monomorfismi quasi forti ma non buoni fra due multigruppi.

Notiamo infine che se $\mathcal{R}$ è una congruenza stabile propria di un multigruppo $\mathcal{M}$ associato ad uno spazio proiettivo, e se λ è un qualunque isomorfismo di $\mathcal{M}/\mathcal{R}$ su un multigruppo $\mathcal{M}'$ (cioè λ è una qualsiasi collineazione fra gli spazi grafici associati), allora, indicato con φ l'epimorfismo canonico di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{M}/\mathcal{R}$, il prodotto $\lambda \circ \varphi$ è un epimorfismo di $\mathcal{M}$ su $\mathcal{M}'$ che non può essere né buono, né forte (cfr. § 1 n^0 2, 2.1.8 e 2.1.12). Poiché λ è forte, l'osservazione precedente prova un'affermazione fatta al § 1 n^0 1 circa la non invertibilità di a_3), a_4).

BIBLIOGRAFIA

[1] P. V. Ceccherini: *Collineazioni e semicollineazioni tra spazi affini o proiettivi,* Rend. Mat. e Appl. (3-4) vol. 26 (1967).

[2] M. Dresher et O. Ore: *Theory of multigroups,* Amer. J. Math., t. 60 (1938).

[3] M. Koskas: *Groupoides, demi-hypergroupes et hypergroupes,* J. Math. pures et appl. 49 (1970).

[4] P. Maroscia: *Semicollineazioni e semicorrelazioni tra spazi lineari,* Rend. Mat. e Appl. (3) vol. 3 (1970).

[5] F. Marty: *Sur une généralisation de la notion de groupe,* VIII Congres de Math. Scandinaves Stockholm (1934).

[6] W. Prenowitz: *Projective geometries as multigroups,* Amer. J. Math. Vol. 65 (1943).

[7] F. Rossi: *Quasicollineazioni in geometrie sopra un insieme qualunque,* Rend. Ist. Mat. Trieste IV (1972).

[8] B. Segre: *Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane,* Ann. Mat. Pura Appl. 64 (1964).

[9] B. Segre: *Istituzioni di geometria superiore, vol. II: Spazi proiettivi,* Roma (1965).