

UNA NUOVA CLASSE DI FUNZIONI IN UN'ALGEBRA REALE (*)

di PAOLO DENTONI e GIOVANNI BATTISTA RIZZA (a Parma) (**)

SOMMARIO. - In un'algebra reale A , si considerano le funzioni per le quali la r -forma esterna $fdx \wedge \dots \wedge dx$ a valori in A risulti chiusa (funzioni r -olomorfe). Queste funzioni comprendono, per $r = 1$, le funzioni monogene ($df = f' dx$) studiate da vari Autori; mentre, per $r = n - 1$, vanno avvicinate alle funzioni regolari di FUETER e MOISIL ed anzi coincidono con queste (a meno di un opportuno isomorfismo) nell'algebra dei quaternioni e nelle algebre di Clifford. Per le funzioni r -olomorfe in un'algebra qualsiasi si stabilisce un teorema integrale di tipo CAUCHY. Una formula integrale è poi ottenuta nel caso dell'algebra dei quaternioni.

SUMMARY. - Let A be an algebra on R and f a function in A . Consider the exterior r -form $F = f dx \wedge \dots \wedge dx$ with values in A . We say that f is r -holomorphic iff F is closed.

Monogenic functions ($df = f' dx$) (SCHEFFERS, LORCH, RIZZA, ...) is a special case ($r = 1$). Regular functions (MOISIL, FUETER) are strictly related to $(n - 1)$ -holomorphic functions ($n = \dim A$). In particular these classes of functions coincide (up to suitable isomorphisms), when A is the quaternion algebra Q or a CLIFFORD algebra C .

For r -holomorphic functions in a general algebra A , a CAUCHY theorem is proved. A representation formula, when $A = Q$, is also obtained.

1. Premessa.

È noto che i tentativi di estendere l'ordinaria teoria delle funzioni alle algebre reali di dimensione finita si sono sviluppati secondo due indirizzi principali. Il primo (G. SCHEFFERS, E. R. LORCH, G. B. RIZZA, P. DENTONI) richiede sostanzialmente per le funzioni

(*) Pervenuto in Redazione il 5 luglio 1972.

Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo G.N.S.A.G.A.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico dell'Università - 43100 Parma.

l'esistenza di una derivata (*funzioni monogene*), e si sviluppa nelle algebre commutative o quasi commutative. Il secondo (G. C. MOISIL, R. FUETER, G. B. RIZZA), di natura più formale, in quanto deriva da una definizione di carattere non intrinseco, ha dato i risultati più significativi nell'algebra dei quaternioni Q e nelle algebre di Clifford C (*funzioni regolari*).

Il presente lavoro si propone di superare almeno in parte il dualismo accennato, attraverso la considerazione, in un'algebra, di una nuova classe di funzioni, dette *funzioni r -olomorfe*. Essa, da un lato, contiene, a meno di un addendo lineare, le funzioni monogene (funzioni 1-olomorfe) (n. 3); dall'altro, comprende una classe di funzioni (funzioni $(n - 1)$ -olomorfe), che hanno proprietà molto simili a quelle delle funzioni regolari e coincidono anzi con queste, a meno di un opportuno isomorfismo, nell'algebra dei quaternioni Q e nelle algebre di Clifford C (n. 6).

Per la definizione di funzioni r -olomorfe si fa uso del calcolo differenziale esterno nell'algebra, ciò che assicura alla definizione carattere intrinseco, e permette fra l'altro di introdurre in modo elegante la nozione di grado di commutatività dell'algebra.

La sopra accennata corrispondenza tra funzioni olomorfe e funzioni regolari nell'algebra dei quaternioni Q e nelle algebre di Clifford C , mette in luce il carattere intrinseco che in tali algebre assume la condizione di regolarità di FUETER e MOISIL con riferimento alle basi canoniche di Q e C .

Per le funzioni r -olomorfe in un'algebra arbitraria si stabilisce un teorema integrale di tipo CAUCHY (Teor. T_1 , n. 4). Un esempio di formula integrale è invece segnalato al n. 5 per le funzioni 3-olomorfe nell'algebra Q dei quaternioni (Teor. T_2). Il risultato consente anche di ritrovare la classica formula integrale per le funzioni regolari di FUETER e MOISIL in Q .

2. Forme a valori in un'algebra.

Sia A un'algebra di Banach sul campo reale \mathbb{R} ⁽¹⁾, non necessariamente commutativa nè di dimensione finita, X un sottospazio vettoriale di A , e U un aperto di X . Una p -forma differenziale ω_p

⁽¹⁾ Sulle algebre di Banach, ved. p. es. E. HILLE - R. S. PHILLIPS [9]. Fra le algebre di Banach rientrano, in particolare, le ordinarie algebre di *dimensione finita*.

definita in U , a valori in A , è una funzione definita su U a valori nell'insieme $\mathcal{A}_p(X, A)$ delle *applicazioni p -lineari continue alternanti* di X^p in A ⁽²⁾.

Date in U due forme ω_p, ω_q a valori in A , di gradi p, q rispettivamente, con $\omega_p \wedge \omega_q$ si denota il loro *prodotto esterno* ⁽³⁾, cioè la $(p+q)$ -forma che su ogni $x \in U; x_1, \dots, x_{p+q} \in X$ assume il valore

$$(1) \quad \omega_{p+q}(x; x_1, \dots, x_{p+q}) = \\ = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \omega_p(x; x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \omega_q(x; x_{\sigma(p+1)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$$

dove la somma è estesa a tutte le permutazioni σ dei numeri $\{1, \dots, p+q\}$ tali che $\sigma(1) < \dots < \sigma(p), \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$ ed $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ secondo che σ è di classe pari, dispari ⁽⁴⁾.

Come nel caso di forme a valori scalari ⁽⁵⁾, anche il prodotto esterno di forme a valori nell'algebra gode della *proprietà associativa*. In generale, invece, non si conserva la proprietà anticommutativa del prodotto esterno di due 1-forme. Denotato invero con d il differenziale di FRECHET ⁽⁶⁾, si osserva immediatamente che la condizione

$$(2) \quad dx \wedge dx = 0 \quad (7)$$

equivale alla *relazione di permutabilità*

$$(3) \quad [x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1 = 0$$

per ogni coppia di elementi x_1, x_2 di X ⁽⁸⁾. Più in generale, considerata l' m -esima potenza esterna di dx ($m \geq 2$), si verifica imme-

⁽²⁾ Ved. p. es. H. CARTAN [4], p. 21.

⁽³⁾ Ved. p. es. H. CARTAN [4], p. 14-15 e 22-23. Nella definizione generale interviene una applicazione bilineare Φ ; è naturale assumere qui come Φ la *moltiplicazione* dell'algebra.

⁽⁴⁾ A secondo membro, $\omega_p \omega_q$ è l'ordinario prodotto nell'algebra. Il prodotto esterno in un'algebra interviene già nei lavori [14], [15] di G. B. RIZZA.

⁽⁵⁾ Per le forme a valori reali, ved. p. es. H. CARTAN [4], p. 17-18. La dimostrazione si estende senza modifiche al caso di forme a valori in A .

⁽⁶⁾ Per nozioni generali sul differenziale negli spazi di Banach, ved. p. es. E. HILLE - R. S. PHILLIPS [9], p. 110; N. BOURBAKI [2], p. 12.

⁽⁷⁾ Con x si denota qui la *funzione identica* sullo spazio X . Come è d'uso, si denota spesso con lo stesso simbolo anche l'elemento generico di X .

⁽⁸⁾ Ved. G. B. RIZZA [15], p. 2.

diatamente che la condizione

$$(4) \quad [dx]^m = dx \wedge \dots \wedge dx = 0$$

equivale al sussistere nel sottospazio X di A dell'identità standard di grado m

$$(5) \quad [x_1 \dots x_m] = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(m)} = 0 \quad (9)$$

la somma essendo estesa a tutte le permutazioni.

È utile la definizione:

D_1 — Un sottospazio X dell'algebra A ha in A un grado finito di commutatività, se sussiste la (4) per qualche intero positivo m .

Il più piccolo di tali interi positivi si dice grado di commutatività di X in A , e si denota con $\text{gr } X$.

È bene notare esplicitamente che se X ha dimensione finita n , riesce $\text{gr } X \leq n + 1$. In generale, se $X = A$, si parla di grado di commutatività dell'algebra (10). L'algebra A risulta commutativa se e solo se $\text{gr } A = 2$.

Convieni terminare il numero osservando che, denotato con d il differenziale esterno (11), sussiste, anche per le forme a valori in A , la formula di differenziazione del prodotto esterno (12)

$$(6) \quad d(\omega_p \wedge \omega_q) = (d\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^p \omega_p \wedge d\omega_q.$$

3. Funzioni olomorfe.

Sia f una funzione di classe C^1 nell'aperto U di X , a valori in A , e r un intero positivo. È utile la definizione

D_2 — Si dice che la funzione f è r -olomorfa a destra, sinistra in U , se ivi risulta rispettivamente

$$(7) \quad df \wedge [dx]^r = 0, \quad [dx]^r \wedge df = 0.$$

(9) Sulle identità standard nelle algebre, ved. p. es. N. JACOBSON [10], p. 227.

(10) Ved. p. es. N. JACOBSON [10], p. 227.

(11) Ved. p. es. H. CARTAN [4], p. 24. Sulle 0-forme il differenziale esterno d coincide con il differenziale di FRECHET d .

(12) Ved. N. BOURBAKI [3], p. 13.

Ovviamente, nel caso che lo spazio X abbia in A un grado finito di commutatività $\text{gr } X$, la definizione D_2 perde interesse quando $r \geq \text{gr } X$ ⁽¹³⁾.

E' bene osservare esplicitamente che la condizione $(7)_1, (7)_2$ che definisce le funzioni r -olomorfe (a destra, a sinistra), è una condizione intrinseca nell'algebra A . Precisamente, per ogni isomorfismo (algebrico e topologico) α di A su un'algebra di Banach A^* e per ogni funzione f a valori in A r -olomorfa in un aperto U di X , la funzione $f^* = \alpha f \alpha^{-1}$ (corrispondente ad f in A^*) riesce r -olomorfa nell'aperto $U^* = \alpha U$ del sottospazio $X^* = \alpha X$ ⁽¹⁴⁾ ⁽¹⁵⁾.

Invero, per ogni $x^* \in U^*$; $x_1^*, \dots, x_{r+1}^* \in X^*$ risulta

$$\begin{aligned} (df^* \wedge [dx^*]^r)(x^*; x_1^*, \dots, x_{r+1}^*) &= \\ &= (d(\alpha f \alpha^{-1}) \wedge [d(\alpha x)]^r)(\alpha x; \alpha x_1, \dots, \alpha x_{r+1}) \\ &= \alpha (df \wedge [dx]^r)(x; x_1, \dots, x_{r+1}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analogamente per la r -olomorfia a sinistra.

Se l'algebra è dotata di unità destra u , appartenente ad X , le funzioni 1-olomorfe destre coincidono (a meno di funzioni lineari a destra $y = ax + b$) con le funzioni dotate di derivata destra f' nell'algebra ($df = f' dx$) (funzioni monogene a destra ⁽¹⁶⁾). La verifica non presenta difficoltà e risulta $f'(x) = df(x; u)$. Se anzi l'algebra A è commutativa, queste riescono le sole funzioni r -olomorfe significative, dato che $\text{gr } X = 2$ ⁽¹⁷⁾.

⁽¹³⁾ Se X ha anche dimensione finita n , la definizione D_2 perde interesse anche per $r = n$.

⁽¹⁴⁾ Cfr. R. F. RINEHART [13], p. 5, dove la definizione di condizione intrinseca è più restrittiva di quella qui adottata. Si riconosce che il complesso delle condizioni (7) riesce intrinseco anche nel senso di RINEHART.

⁽¹⁵⁾ Per la dimostrazione che segue, si tenga presente la regola di differenziazione delle funzioni composte; ved. p. es. N. BOURBAKI [2], p. 13.

⁽¹⁶⁾ Cfr. P. DENTONI [5], p. 11, 15; [6], p. 48. Sulla teoria delle funzioni monogene, ved. p. es. E. R. LORCH [11], G. B. RIZZA [14], [16]. Le funzioni 1-olomorfe destre sono precisamente le funzioni monogene a destra con derivata f' a valori nell'insieme $B = \{b \in A \mid b(x_1 x_2 - x_2 x_1) = 0, \forall x_1, x_2 \in X\}$.

⁽¹⁷⁾ Nel caso attuale le funzioni 1-olomorfe destre coincidono strettamente con le funzioni monogene a destra.

Lo studio delle funzioni r -olomorfe riveste particolare interesse nel caso che il sottospazio X abbia dimensione finita $n = r + 1$ ⁽¹⁸⁾. Si noti che la r -olomorfia in un punto x , relativa al sottospazio X , implica in particolare la r -olomorfia in x , relativa ad ogni sottospazio \tilde{X} di X , contenente x e di dimensione $r + 1$.

Nel caso $n = r + 1$, denotata con $\{u_j\}$ ($j = 1, \dots, n$) una base di X e con $x = \sum_j \xi_j u_j$ l'elemento generico di X , la condizione (7)₁ di r -olomorfia a destra può scriversi

$$(8) \quad \mathcal{D}f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j} (-1)^{j-1} [u_1 \dots \hat{u}_j \dots u_n] = 0 \quad (19) \quad (20).$$

L'operatore può riguardarsi come « duale » dell'operatore $D = \sum_j \frac{\partial}{\partial \xi_j} u_j$, che interviene nella definizione delle *funzioni regolari* a destra nel senso di FUETER e MOISIL ⁽²¹⁾. La relazione tra funzioni $(n - 1)$ -olomorfe a destra e funzioni regolari a destra per alcune algebre notevoli, viene studiata al n. 6.

Considerazioni del tutto analoghe sussistono per la r -olomorfia a sinistra.

4. Teorema integrale.

A partire da questo numero, il sottospazio X si suppone di dimensione finita n .

Sussiste per le funzioni r -olomorfe il *teorema integrale*

T_1 — Siano f, g arbitrarie funzioni r -olomorfe rispettivamente a destra, sinistra nell'aperto U di X , a valori in A . Per ogni catena r -dimensionale c_r , di classe C^1 , omologa a zero in U , risulta:

$$(9) \quad \int_{c_r} f [dx]^r g = 0.$$

⁽¹⁸⁾ Cfr. nota ⁽¹³⁾.

⁽¹⁹⁾ Come è d'uso, $u_1 \dots \hat{u}_j \dots u_n$ indica la successione $u_1 \dots u_n$ priva dell'elemento u_j .

⁽²⁰⁾ Il cambiamento di base con matrice M altera \mathcal{D} per il fattore $\det M$ onde la condizione (8) non dipende dalla base.

⁽²¹⁾ Sulle funzioni regolari di FUETER e MOISIL, ved. p. es. G. C. MOISIL [12], R. FUETER [7], [8], G. B. RIZZA [14].

Per la dimostrazione, basta osservare che, per la regola di differenziazione del prodotto esterno (3), tenute presenti la proprietà fondamentale dell'operatore d e le (7), riesce

$$d(f[dx]^r g) = df \wedge [dx]^r g + (-1)^r f [dx]^r \wedge dg = 0.$$

La formula di Green-Stokes⁽²²⁾ conduce allora immediatamente all'asserto.

Nei casi in cui si sappia costruire una adatta *funzione nucleo*, dal teorema T_1 si ottengono facilmente, mediante il classico procedimento, *formule di rappresentazione integrale* per le funzioni r -olomorfe.

5. Funzioni olomorfe nell'algebra dei quaternioni.

Risultati particolarmente significativi si ottengono nell'algebra Q dei *quaternioni reali* ($A = X = Q$).

Siano $i_0 = 1, i_1, i_2, i_3$ la base ordinaria di Q ,

$$x = \xi_0 i_0 + \xi_1 i_1 + \xi_2 i_2 + \xi_3 i_3, \quad \bar{x} = \xi_0 i_0 - \xi_1 i_1 - \xi_2 i_2 - \xi_3 i_3$$

il quaternione generico e il suo *coniugato*,

$$Tx = x + \bar{x} = 2\xi_0, \quad N(x) = x\bar{x} = \xi_0^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = |x|^2$$

la *traccia* e la *norma* di x ⁽²³⁾.

Denotato poi con α l'*isomorfismo* di Q come spazio vettoriale:

$$\alpha : x \rightsquigarrow x + Tx$$

si consideri la funzione

$$(10) \quad v(x) = \frac{1}{\alpha^{-1} x N(\alpha^{-1} x)} = 27 \frac{\xi_0 i_0 - 3\xi_1 i_1 - 3\xi_2 i_2 - 3\xi_3 i_3}{(\xi_0^2 + 9\xi_1^2 + 9\xi_2^2 + 9\xi_3^2)^2}.$$

Essa riesce *3-olomorfa a destra e a sinistra* per ogni $x \neq 0$. Invero, si verifica senza difficoltà che la condizione (8) del n. 3,

⁽²²⁾ Ved. p. es. H. CARTAN [4], Teor. II_n, p. 92.

⁽²³⁾ Come è noto, il coniugio $x \rightsquigarrow \bar{x}$ è un *automorfismo* dell'algebra Q , che può essere definito in modo *intrinseco*, cioè indipendente dalla scelta della base. Pertanto anche la traccia e la norma sono operatori intrinseci in Q . Ved. p. es. A. A. ALBERT [1], p. 18.

la quale con riferimento alla base i_0, \dots, i_3 di Q diviene

$$(11) \quad -\frac{1}{2} \mathcal{D}f = 3 \frac{\partial f}{\partial \xi_0} i_0 + \frac{\partial f}{\partial \xi_1} i_1 + \frac{\partial f}{\partial \xi_2} i_2 + \frac{\partial f}{\partial \xi_3} i_3 = 0$$

risulta identicamente soddisfatta dalla funzione $\nu(x)$. Analogamente si prova la 3-olomorfia a sinistra.

Ciò premesso, possiamo ora stabilire una formola integrale di tipo Cauchy per le funzioni 3-olomorfe di Q . Precisamente:

T_2 — Se f è una funzione 3-olomorfa a destra in un aperto U di Q , e z è un punto di U , risulta:

$$(12) \quad \frac{1}{12 \pi^2} \int_{\Gamma_3} f(x) [dx]^3 \nu(x-z) = f(z) N(\Gamma_3, z)$$

dove Γ_3 è un qualsiasi ciclo 3-dimensionale di classe C^1 contenuto in $U - \{z\}$ omologo a zero in U , e $N(\Gamma_3, z)$ è l'indice di allacciamento di Γ_3 rispetto al punto z ⁽²⁴⁾.

Per la dimostrazione del teorema T_2 , basta ricordare che la funzione nucleo ν riesce 3-olomorfa a sinistra, ed applicare il teorema integrale T_1 , seguendo il classico procedimento.

6. Funzioni olomorfe e funzioni regolari.

In questo numero viene chiarita la relazione esistente tra le funzioni olomorfe e le funzioni regolari secondo FUETER e MOISIL, nell'algebra Q dei quaternioni o più generalmente nelle algebre di Clifford classiche su un \mathbf{R} -modulo M .

Come si è osservato alla fine del n. 3, per il confronto con le funzioni regolari in un sottospazio n -dimensionale $X \subset Q$, interessano le funzioni r -olomorfe con $r = n - 1$. Sia dapprima $X = Q$. L'elemento essenziale che permette il confronto in questo caso è la trasformazione lineare α introdotta al n. 5. Precisamente sussiste il teorema:

T_3 — Per ogni funzione f 3-olomorfa a destra in un punto x_0 di U , la funzione

$$(13) \quad g = f \circ \alpha$$

⁽²⁴⁾ Per la nozione di indice di allacciamento di un ciclo rispetto a un punto, ved. p. es. B. SEGRE [17], p. 194 e 277.

risulta regolare a destra rispetto alla base ordinaria di Q , nel punto $\alpha^{-1}(x_0)$. Viceversa, per ogni funzione g regolare a destra rispetto alla base ordinaria di Q in un punto x_0 , la funzione

$$(14) \quad f = g \circ \alpha^{-1}$$

risulta 3-olomorfa a destra nel punto $\alpha(x_0)$.

Invero, le funzioni regolari a destra rispetto alla base ordinaria i_0, \dots, i_3 di Q sono quelle che annullano l'espressione

$$(15) \quad Df = \frac{\partial g}{\partial \xi_0} i_0 + \frac{\partial g}{\partial \xi_1} i_1 + \frac{\partial g}{\partial \xi_2} i_2 + \frac{\partial g}{\partial \xi_3} i_3,$$

mentre le funzioni 3-olomorfe a destra in Q sono quelle che soddisfano la analoga condizione (11). Dal confronto tra le (11), (15) segue facilmente l'asserto.

Si noti che la (11) può riguardarsi come una condizione di regolarità a destra, con riferimento però alla base $\sqrt{3} i_0, i_1, i_2, i_3$. Pertanto il teorema T_3 può anche enunciarsi così: le funzioni 3-olomorfe a destra di Q coincidono con le funzioni regolari a destra con riferimento alla base $\sqrt{3} i_0, i_1, i_2, i_3$ di Q .

Una volta acquisito il teorema T_3 , non è difficile far vedere che la formula integrale (12) del n. 5 per le funzioni 3-olomorfe consente di ritrovare la classica formula integrale di R. FUETER G. C. MOISIL per le funzioni regolari nell'algebra dei quaternioni Q ⁽²⁵⁾.

Assumiamo ora invece come sottospazio X lo spazio Q_0 generato dagli elementi i_1, i_2, i_3 di Q . Si verifica allora facilmente che, in questo caso, le funzioni 2-olomorfe a destra in X coincidono con le funzioni regolari a destra rispetto alla base i_1, i_2, i_3 .

Risultati simili a quelli ora accennati sussistono anche per le algebre di Clifford $C(A = C)$ ⁽²⁶⁾. Precisamente, sia X il sottospazio vettoriale M_1 di C generato dagli elementi $1, i_1, \dots, i_m$ (m dispari) ⁽²⁷⁾. Come si verifica immediatamente, tenuta presente la (8), il collegamento tra le funzioni m -olomorfe f in un aperto U di M_1 e le funzioni g regolari in U rispetto alla base $1, i_1, \dots, i_m$ di M_1 è ancora

⁽²⁵⁾ Ved. R. FUETER [7], p. 318; G. C. MOISIL [12], p. 171.

⁽²⁶⁾ L'algebra di Clifford classica di dim 2^m su \mathbf{R} può definirsi assegnandone la base: $i_0 = 1, i_{j_1}, i_{j_1 j_2} = i_{j_1} i_{j_2}, i_{j_1 j_2 j_3} = i_{j_1} i_{j_2} i_{j_3}, i_{j_1 \dots j_m} = i_{j_1} \dots i_{j_m}$ essendo $j_1 < j_2 < \dots < j_m$ interi qualsiasi scelti tra $1, \dots, m$ e $i_{j_h}^2 = -1, i_{j_h} i_{j_k} + i_{j_k} i_{j_h} = 0$.

⁽²⁷⁾ Per m pari, le funzioni m -olomorfe in M_1 sono prive di interesse.

realizzato dalle (13), (14), nelle quali ora α indica l'isomorfismo dello spazio vettoriale M_1 definito da

$$\alpha(x) = x + \frac{1}{2}(m-1)Tx,$$

essendo Tx la *traccia* di x .

Se invece si assume come sottospazio X di C lo spazio vettoriale M generato dagli elementi i_1, \dots, i_m , si verifica senza difficoltà che le funzioni $(m-1)$ -olomorfe a destra in M coincidono con le funzioni regolari a destra rispetto alla base i_1, \dots, i_m di M .

Tenuto conto della natura intrinseca della definizione di funzioni r -olomorfe (n. 3), dai risultati di questo numero segue che nelle algebre Q, C la nozione di funzione regolare con riferimento alle basi canoniche di Q, Q_0, M, M_1 (m -dispari) rispettivamente, ha carattere intrinseco⁽²⁸⁾.

⁽²⁸⁾ Per il primo caso si veda R. F. RINEHART [13], p. 17. Nella dimostrazione attuale si noti che l'isomorfismo α è stato definito in modo intrinseco.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. A. ALBERT, *Structure of Algebras* (A. M. S. Colloquium Publ., New York 1939).
- [2] N. BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques*, Fascicule de résultats, par. 1-7 (Hermann, Paris, 1967).
- [3] N. BOURBAKI, *Variétés différentielles et analytiques*, Fascicule de résultats, par. 8-15 (Hermann, Paris, 1971).
- [4] H. CARTAN, *Formes différentielles* (Hermann, Paris, 1967).
- [5] P. DENTONI, *Sulle funzioni monogene nelle algebre non commutative*. Rend. Mat. e Appl. Roma, (5), 26 (1967), 403-421.
- [6] P. DENTONI, *Sulla monogenicità negli spazi di Banach*. Ann. Mat. Pura Appl., (4), 88 (1971), 33-50.
- [7] R. FUETER, *Die Funktionentheorie der Differentialgleichungen $\Delta u = 0$, $\Delta \Delta u = 0$ mit vier reellen Variablen*. Comm. Math. Helvetici, 7 (1934 35), 307-330.
- [8] R. FUETER, *Über die Funktionentheorie in einer hypercomplexen Algebra*. Elemente der Math., 3 (1948), p. 89.
- [9] E. HILLE - R. S. PHILLIPS, *Functional Analysis and Semi-Groups* (A. M. S. Colloquium Publ., Providence, 1957).
- [10] N. JACOBSON, *Structure of Rings* (A. M. S. Colloquium Publ., Providence, 1956).
- [11] E. R. LORCH, *The theory of analytic functions in normed abelian vector rings*. Trans. Amer. Math. Soc. 54 (1943), 414-425.
- [12] G. C. MOISIL, *Sur les quaternions monogènes*. Bull. Sci. Math. Paris, (2), 55 (1931), 168-174.
- [13] R. F. RINEHART, *Elements of a theory of intrinsic functions on algebras*. Duke Math. J., 27 (1960), 1-19.
- [14] G. B. RIZZA, *Sulle funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse*. Comm. Pont. Ac. Sci., 14 (1950), 169-194.
- [15] G. B. RIZZA, *Teoria delle funzioni monogene nelle algebre complesse commutative dotate di modulo*. Centro Int. Mat. Estivo (CIME) (Ist. Mat. Univ., Roma, 1954),
- [16] G. B. RIZZA, *Teoria delle funzioni nelle algebre complesse dotate di modulo e commutative*. Rend. Mat. e Appl. Roma, (5), 12 (1953), 299-331.
- [17] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, II (Docet, Roma, 1956).