LAGUERRE- und MINKOWSKI-m-STRUKTUREN (*)

von WERNER HEISE und HELMUT KARZEL (in Hannover) (**)

SOMMARIO. - *In analogia alla nozione di m-struttura di Möbius introdotta da R. Permutti si definiscono le m-strutture di Laguerre e di Minkowski come generalizzazioni dei piani di Laguerre e dei piani di Minkowski. Si costruisce una classe di m-strutture di Laguerre ovoidali. Vi è stretta connessione fra m-strutture di Minkowski ed insiemi di permutazioni sottilmente* $m+2$ *volte transitivi.*

SUMMARY. - *Analogous to the concept of Permutti's Möbius-m-structures Laguerre- and Minkowski-m-structures are defined as generalizations of the plane Laguerre-and Minkowskigeometry. A class of ovoidal Laguerre-m-structures is constructed. There are close connections between Minkowski-m-structures and sharply* $(m+2)$*-ply transitive sets of permutations.*

W. BENZ lenkte in seinen grundlegenden Arbeiten [2], [3], [5] die Aufmerksamkeit auf die Geometrie der ebenen Schnitte der drei Quadrik-Typen Kugel, Kegel und Hyperboloid, die man Möbius-, Laguerre- bzw. Minkowski-Ebenen nennt.

Als gemeinsame Verallgemeinerung der affinen und der Möbius-Ebenen führte R. PERMUTTI in [14], [15] den Begriff der Möbius-m-Struktur ein. In dieser Note wird die entsprechende Generalisation für die Laguerre- und Minkowski-Ebenen vollzogen und Laguerre-m-sowie Minkowski-m-Strukturen definiert. Wie aus [7], [9] hervorgeht, gibt es für $m > 1$ nur wenige nicht-triviale endliche Möbius-m-Strukturen. Die einzigen bekannten sind mit den Mathieuschen Gruppen vom Grad 11 und 12 verknüpft [12]. Zwischen Minkowski-m-Strukturen und scharf-$(m+2)$-fach transitiven Gruppen bestehen

(*) Pervenuto in Redazione il 17 aprile 1972.

(**) Indirizzo degli Autori: Lehrstuhl für Geometrie, Technische Universität D 3 Hannover, Schneiderberg 50 (Deutschland).

ähnliche enge Beziehungen (Satz 6). Unendliche ovoidale Möbius-m-Strukturen gibt es in grosser Zahl [8]. Zu jeder ovoidalen Möbius-m-Struktur gibt es Laguerre-m-Strukturen, die sich auf entsprechende Weise in einen projektiven Raum einbetten lassen (Satz 4). A. BARLOTTI konstruierte in [1] freie Möbius-m-Strukturen, A. SCHLEIERMACHER und K. STRAMBACH gaben in [16] freie Laguerre-Ebenen an. In [11] wurden freie Minkowski-Ebenen konstruiert. Wir können daher wohl darauf verzichten, die nach [1], [11], [16] zwangsläufige Konstruktion von freien Laguerre-m-und Minkowski-m-Strukturen durchzuführen.

Zwischen endlichen Möbius-m-, Laguerre-m-und Minkowski-m-Strukturen und der Codierungstheorie gibt es zahlreiche Berührungspunkte. Jede endliche Laguerre-m-Struktur ist ein korrigierbarer Code. Wir versagen es uns auf dieses interessante Gebiet näher einzugehen.

1. Grundlegende Begriffe.

Es sei P eine Menge, deren Elemente wir Punkte nennen und $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ zwei nichtleere Teilmengen der Potenzmenge $\mathfrak{P}(P)$, deren Elemente *Geraden* oder *Erzeugende* heissen mögen.

Die unstrukturierte Menge P nennen wir *Möbius-Gitter*.
Je zwei verschiedene Punkte $p, q \in P$ werden *verbindbar* genannt.

Das Paar $(P, \mathfrak{G}_1)$ nennen wir ein *Laguerre-Gitter*, wenn es zu jedem Punkt $p \in P$ genau eine, mit $[p]_1$ bezeichnete Erzeugende aus $\mathfrak{G}_1$ durch p gibt. Je zwei verschiedene Punkte $p, q \in P$ werden *verbindbar* genannt, wenn sie nicht gemeinsam auf einer Erzeugenden liegen.

Das Tripel $(P, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ nennen wir ein *Minkowski-Gitter*, wenn $(P, \mathfrak{G}_1)$ und $(P, \mathfrak{G}_2)$ Laguerre-Gitter sind und wenn jede Erzeugende aus $\mathfrak{G}_1$ jede Erzeugende aus $\mathfrak{G}_2$ in genau einem Punkt schneidet. Je zwei verschiedene Punkte $p, q \in P$ werden *verbindbar* genannt, wenn sie sowohl in $(P, \mathfrak{G}_1)$ als auch in $(P, \mathfrak{G}_2)$ verbindbar sind.

Zwei Punkte p, q eines Möbius-, Laguerre-oder Minkowski-Gitters heissen *parallel*, $p \parallel q$, wenn sie nicht verbindbar sind.

Es sei $\Gamma = P, (P, \mathfrak{G}_1)$ bzw. $(P, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ ein Möbius-, Laguerre bzw. Minkowski Gitter und $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{P}(P)$ eine Menge, deren Elemente wir *Ketten* nennen. Das Paar $(\Gamma, \mathfrak{K})$ heisst *Kettenstruktur*, wenn jede Erzeugende jede Kette in genau einen Punkt schneidet. Es sei $P^p = P \diagdown \{x \in P \mid x \parallel p\}$, $\mathfrak{G}_1^p = \{G \cap P^p \mid G \in \mathfrak{G}_1 \diagdown [p]_1\}$, $\mathfrak{G}_2^p = \{G \cap P^p \mid G \in$

$\in \mathfrak{G}_2 \setminus [p]_2\}$ und $\mathfrak{K}^p = \{K \cap P^p \mid p \in K \in \mathfrak{K}\}$ und $\Gamma^p = P^p, (P^p, \mathfrak{G}_1^p)$ bzw. $(P^p, \mathfrak{G}_1^p, \mathfrak{G}_2^p)$. Das Paar $(\Gamma^p, \mathfrak{K}^p)$ heisst die *Ableitung* von $(\Gamma, \mathfrak{K})$ in p.

Es sei m eine natürliche Zahl (Die Null wird auch als natürlich betrachtet. Eine Kettenstruktur $(\Gamma, \mathfrak{K})$ heisst *Ketten-m-Struktur*, wenn gilt:

(K1): *Zu je $m+2$ paarweise verbindbaren Punkten gibt es genau eine mit ihnen inzidente Kette.*

(K2): *Zu jeder Kette $K \in \mathfrak{K}$, jeweils m verschiedenen Punkten $p_1, \ldots$ $\ldots, p_m \in K$ und jedem mit $p_1, \ldots, p_m$ verbindbaren Punkt $q \in P \setminus K$ gibt es genau eine Kette L mit $K \cap L = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ und $q \in L$.*

(K3): *Es gibt eine Kette und einen nicht mit ihr inzidenten Punkt. Jede Kette enthält mindestens m Punkte.*

Für $\Gamma = P, (P, \mathfrak{G}_1)$ bzw. $(P, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ heisst $(\Gamma, \mathfrak{K})$ *Möbius-, Laguerre-* bzw. *Minkowski-m-Struktur.* Für $m = 0$ ist $(P, \mathfrak{K})$, $(P, \mathfrak{K} \cup \mathfrak{G}_1)$ bzw. $(P, \mathfrak{K} \cup \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2)$ jeweils eine affine Ebene. Für $m = 1$ ist $(\Gamma, \mathfrak{K})$ eine Möbius-, Laguerre-bzw. Minkowski-Ebene.

Satz 1. *Eine Kettenstruktur $(\Gamma, \mathfrak{K})$ mit $\emptyset \notin \mathfrak{K}$ ist für jede natürliche Zahl $m > 0$ genau dann eine Ketten-m-Struktur, wenn die Ableitung $(\Gamma^p, \mathfrak{K}^p)$ in jedem Punkt $p \in P$ eine Ketten-$(m-1)$-Struktur ist.* Den einfachen Beweis übergehen wir.

Nach Satz 1 können wir viele bekannte Tatsachen aus der Theorie der affinen Ebenen auf Ketten-m-Strukturen übertragen. So sind etwa alle Ketten einer Ketten-m-Struktur gleichmächtig. Wir definieren die *Ordnung* einer Ketten-m-Struktur $(\Gamma, \mathfrak{K})$ invariant gegenüber dem Ableitungsprozess als die um m verminderte Kardinalzahl einer Kette.

2. Endliche Ketten-m-Strukturen.

Über Möbius-m-Strukturen brauchen wir hier nichts zu sagen, weil sie in [14], [15], [1], [7], [8], [9] [12] abgehandelt wurden.

Wir bemerken, dass bei endlichen Laguerre-m-Strukturen das Axiom (K2) durch die Bedingung ersetzt werden kann, dass eine

Erzeugende genau m Punkte weniger als eine Kette enthält. Für die Axiomatik endlicher Minkowski-m-Strukturen ist (K2) gänzlich überflüssig. Das ergibt sich durch eine einfache kombinatorische Übelegung.

Satz 2. *Es sei* $(\Gamma, \mathfrak{K})$ *eine endliche Laguerre-m-Struktur der Ordnung n. Dann gilt:*

$$|P| = n(n+m), \; |\mathfrak{K}| = n^{m+2} \textit{ und } |G| = n \textit{ für alle } G \in \mathfrak{G}_1 .$$

Beweis. Für $m = 0$ ist $(P, \mathfrak{K} \cup \mathfrak{G}_1)$ eine affine Ebene und für affine Ebenen sind die Aussagen aus Satz 2 bekannt. Es sei $m > 0$, $(\Gamma, \mathfrak{K})$ eine Laguerre-m-Struktur der Ordnung n und $(\Gamma^p, \mathfrak{K}^p)$ die Ableitung von $(\Gamma, \mathfrak{K})$ in einem Punkt $p \in P$.

Nach Satz 1 und Induktionsvoraussetzung ist $|P^p| = n(n + m - 1)$, $|\mathfrak{K}^p| = n^{m+1}$ und $|G| = n$ für alle $G \in \mathfrak{G}_1^p$. Im Falle der Laguerre-m-Strukturen ist $\mathfrak{G}_1^p = \mathfrak{G}_1 \setminus [p]_1$, also gilt $|G| = n$ für alle $G \in \mathfrak{G}_1$ und demzufolge $|P| = |P^p| + |[p]_1| = n(n+m)$. Wir berechnen die Anzahl der inzidenten Punkt-Ketten-Paare aus $(\Gamma, \mathfrak{K})$: Sie ist $|P||\mathfrak{K}^p| = |K||\mathfrak{K}|$, wobei $K \in \mathfrak{K}$ ist. Es folgt $|\mathfrak{K}| = n^{m+2}$.

Satz 3. *Es sei* $(\Gamma, \mathfrak{K})$ *eine endliche Minkowski m-Struktur der Ordnung n. Dann gilt:*

$$|P| = (n+m)^2, |\mathfrak{K}| = \prod_{i=-1}^{m} (n+i) \textit{ und } |G| = n+m \textit{ für alle } G \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2.$$

Beweis. P lässt sich als kartesisches Produkt einer Erzeugenden aus $\mathfrak{G}_1$ mit einer Erzeugenden aus $\mathfrak{G}_2$ darstellen. Da jede Erzeugende mit jeder Kette K genau einen Punkt gemeinsam hat, gilt $|K| = |G| = n + m$ für alle $G \in \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$ und $|P| = (n+m)^2$.

Für $m = 0$ ist $(P, \mathfrak{K} \cup \mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2)$ eine affine Ebene, also $|\mathfrak{K}| = n^2 + n - |\mathfrak{G}_1| - |\mathfrak{G}_2| = (n-1)n$. Es sei $m > 0$, $(\Gamma, \mathfrak{K})$ eine Minkowski-m-Struktur der Ordnung n und $(\Gamma^p, \mathfrak{K}^p)$ die Ableitung von $(\Gamma, \mathfrak{K})$ in einem Punkt $p \in P$. Nach Induktions-voraussetzung gilt $|\mathfrak{K}^p| = \prod_{i=-1}^{m-1} (n+i)$, aus $|P||\mathfrak{K}^p| = |K||\mathfrak{K}|$ für eine Kette $K \in \mathfrak{K}$ folgt also $|\mathfrak{K}| = \prod_{i=-1}^{m} (n+i)$.

Im Gegensatz zur Situation bei den endlichen Möbius-m-Strukturen können wir weder bei den Laguerre-noch bei den Minkowski-m-Strukturen auf Grund von Satz 2 bzw. Satz 3 auf die Nichtexistenz gewisser Ketten-m Strukturen für vorgegebene Ordnung n und vorgegebenes m schliessen.

3. Laguerre-m-Strukturen.

Es sei m eine natürliche Zahl und S_{m+1} ein $(m+1)$-dimensionaler projektiver Raum. Eine Teilmenge $Q \subset S_{m+1}$ heisst *m-Oval* wenn jede Hyperebene aus S_{m+1} mit Q höchstens $m+1$ Punkte gemeinsam hat, es zu je m Punkten aus Q genau eine Hyperebene gibt, die Q nur in diesen Punkten schneidet und wenn Q mindestens m Punkte enthält.

Eine Teilmenge C eines $(m+2)$-dimensionalen projektiven Raumes S_{m+2}, die sich als Vereinigungsmenge über alle Verbindungsgeraden eines festen Punktes s (der Spitze von C) mit allen Punkten eines m- Ovals, das in einer nicht mit s inzidenten Hyperebene enthalten ist, darstellen lässt, heisst *Laguerre-m-Kegel.* Die einzelmen um den Punkt s verminderten Verbindungsgeraden nennen wir *Erzeugende* des Laguerre-m-Kegels.

Nach [7] (3.4) gibt es in jedem $(m+1)$-dimensionalen projektiven Raum unendlicher Ordnung m-Ovale; in jedem $(m+2)$-dimensionalen projektiven Raum unendlicher Ordnung existieren also Laguerre-m-Kegel.

Wir bemerken, dass die Kurven ovoidaler Möbius m-Strukturen m-Ovale sind. Die zu den kleinen Mathieuschen Gruppen gehörigen Möbius-2-und Möbius-3-Strukturen [12] sind nach [6] ovoidal. Diese liefern also auch Laguerre-2- und Laguerre-3-Kegel in projektiven Räumen der Ordnung 3.

Satz 4. *Es sei m eine natürliche Zahl und C ein Laguerre-m-Kegel in einem $(m+2)$-dimensionalen projektiven Raum S_{m+2} mit der Spitze s. Dann ist $(P, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{A})$ mit $P = C \setminus s, \mathfrak{G}_1$ als der Menge der Erzeugenden von C und $\mathfrak{A}$ als der Menge der Schnitte von C mit den Hyperebenen aus S_{m+2}, die nicht mit s inzidieren, eine Laguerre-m-Struktur.*

Beweis. $(P, \mathfrak{G}_1)$ ist sicher ein Laguerre-Gitter. Jede Erzeugende $G \in \mathfrak{G}_1$ schneidet jede nicht mit s inzidente Hyperebene (und damit jede

Kette aus $\mathfrak{A}$) in genau einem Punkt. Es sei Q das den Laguerre-m-Kegel definierende m-Oval und H die von Q aufgespannte Hyperebene aus S_{m+2}. Es seien nun $p_1, p_2, \dots, p_{m+2}$ $m+2$ paarweise verbindbare Punkte und $q_i = [p_i]_1 \cap H = [p_i]_1 \cap Q$. Dann sind auch die Punkte q_i für $i = 1,2, \dots, m+2$ paarweise verbindbar. Wären die Punkte $p_1, p_2, \dots, p_{m+2}$ abhängig, d. h. etwa in einer Hypergeraden T enthalten, so wären die Punkte q_i in der Hypergeraden enthalten, die man als Schnitt von H mit der von T und s aufgespannten Hyperebene erhält, und damit auch abhängig. Das ist ein Widerspruch dazu, dass Q ein m-Oval ist, also insbeondere von keiner Hypergeraden aus S_{m+2} in mehr als $m+1$ verschiedenen Punkten getroffen wird.

Durch $p_1, p_2, \dots, p_{m+2}$ geht also genau eine Hyperebene, die s nicht enthält und damit auch genau eine Kette aus K.

Damit ist (K1) nachgewiesen.

Es sei $K \in \mathfrak{A}$ eine Kette, $p_1, \dots, p_m \in K$ m verschiedene (und damit verbindbare) Punkte aus K und $q \in P \setminus K$ ein mit jedem $p_i (i = 1,2, \dots, m)$ verbindbarer Punkt. K ist in der von K aufgespannten Hyperebene K' ein m-Oval.

Es sei $T \subset K'$ die eindeutig bestimmte Hypergerade aus S_{m+2}, die mit K nur die Punkte $p_1, p_2, \dots, p_m$ gemeinsam hat. Dann ist der Schnitt L von C mit der von q und T aufgespannten Hyperebene aus S_{m+2} die eindeutig bestimmte Kette durch q mit $K \cap L = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$. (K3) ist trivial nachzuweisen.

Es seien $m \geq 0$ und $\omega \geq 2$ zwei natürliche Zahlen und Ω und Δ zwei Mengen mit $|\Omega| = \omega + m$ und $|\Delta| = \omega$.

Weiterhin sei $P = \Omega \times \Delta, \mathfrak{G}_1 = \{\{(\alpha, \beta) \mid \beta \in \Delta\} \mid \alpha \in \Omega\}$ und G eine Menge von Abbildungen von Ω in Δ mit der Eigenschaft, dass jede Abbildung aus G bereits durch die Angabe ihrer Werte in jeweils $m+2$ beliebigen. Argumenten eindeutig bestimmt ist. Wir setzen $\mathfrak{A} = \{\{(\alpha, K(\alpha)) \mid \alpha \in \Omega\} \mid K \in G\}$. $(P, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{A})$ ist dann eine endliche Laguerre-m-Struktur der Ordnung ω.

Es sei Δ die additiv geschriebene zyklische Gruppe der Ordnung 3, $\Omega = \{0,1, \dots, m+2\}$ und G die Menge der als $(m+3)$-Tupel geschriebenen Abbildungen $\left(\alpha_0, \alpha_1, \dots \alpha_{m+1}, \sum_{i=0}^{m+1} \alpha_i\right)$, wobei die Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$ die Gruppe Δ durchlaufen.

G besteht aus 3^{m+2} verschiedenen $(m+3)$-Tupeln und in jedem dieser $(m+3)$-Tupel ist der Wert an jeder Stelle durch die Werte an den übrigen Stellen eindeutig bestimmt. Es gilt daher :

Satz 5. *Zu jedem $m \geq 0$ gibt es eine Laguerre-m-Struktur der Ordung 3.*

Dass es auch für jedes $m \geq 0$ eine Laguerre-m-Struktur der Ordnung 2 gibt, ist trivial.

4. Minkowski-m-Strukturen.

Es sei m eine natürliche Zahl, Ω eine endliche Menge mit $|\Omega| \geq m+2$ und G eine Teilmenge der vollen Permutations-gruppe von Ω, die die Identität enthält und auf Ω scharf $(m+2)$-fach transitiv operiert, d. h. zu je zwei $(m+2)$- Tupeln $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+2}), (\beta_1, \beta_2, \ldots$ $\ldots, \beta_{m+2})$ von jeweils paarweise verschiedenen Elementen aus Ω gibt es genau ein $K \in G$ mit $K(\alpha_i) = \beta_i$.

Es sei $P = \Omega \times \Omega$,

$$\mathfrak{G}_1 = \{\{(\alpha, \beta) \mid \beta \in \Omega\} \mid \alpha \in \Omega\},$$

$$\mathfrak{G}_2 = \{\{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \Omega\} \mid \beta \in \Omega\}$$

und

$$\mathfrak{K} = \{\{(\alpha, \beta) \in P \mid \beta = K(\alpha)\} \mid K \in G\}.$$

Satz 6. *$(P, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K})$ ist eine Minkowski-m-Struktur.*

Beweis. $(P, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2)$ ist natürlich ein Minkowski-Gitter und $(P, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{K})$ damit eine Kettenstruktur. Da Ω endlich ist, brauchen wir nur (**K1**) nachzuweisen. ((**K3**) ist trivialerweise erfüllt). Es seien $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha_{m+2}, \beta_{m+2})$ $m+2$ paarweise verbindbare Punkte, d. h. die $(m+2)$-Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+2})$ und $(\beta_1, \beta_2, \ldots$ $\ldots, \beta_{m+2})$ bestehen aus jeweils paarweise verschiedenen Punkten. Da G scharf $(m+2)$-fach transitiv ist, gibt es genau ein $K \in G$ mit $K(\alpha_i) = \beta_i$; $\{(\alpha, K(\alpha)) \mid \alpha \in \Omega\}$ ist damit die einzige mit (α_i, β_i) inzidente Kette aus $\mathfrak{K}$.

Wir merken an, dass sich die angegebene Konstruktion leicht auch auf unendliche Mengen Ω ausdehnen lässt, Welcher Art dann die zusätzlichen Voraussetzungen an die Permutations menge G sind, kann man aus [10] ersehen. Jeder Minkowski-m-Struktur lässt sich umgekehrt eine auf einer Erzeugenden scharf $(m+2)$ fach transitiv operierende Permutationsmenge zuordnen. Für Minkowski-O-Strukturen ist das in [13] durchgeführt.

Die symmetrische Gruppe vom Grad n ist scharf n-fach und scharf $(n-1)$-fach transitiv; die alternierende Gruppe vom Grad n ist scharf $(n-2)$-fach transitiv; die Mathieusche Gruppe vom Grad 11 bzw. 12 ist scharf 4-bzw. scharf 5- fach transitiv. Auf Satz 6 angewandt bedeutet das:

Satz. 7. *Zu jedem* $m \geq 0$ *gibt es jeweils eine Minkowski-m-Struktur der Ordnung* 2, 3 *und* 4. *Es gibt eine Minkowski*-2 *und eine Minkowski* 3-*Struktur der Ordnung* 9.

LITERATUR

[1] BARLOTTI, A.: *Sulle m-strutture di Möbius.* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste 1 (1969) 35-46.

[2] BENZ, W.: *Über Möbiusebenen. Ein Bericht.* Jahresber. Deutsche Math. Ver. 63 (1960) 1-27.

[3] BENZ, W.: *Über die Grundlagen der Geometrie der Kreise in der pseudo-euklidischen (Minkowskischen) Geometrie.* Journal reine angew. Math. 232 (1968) 41-76.

[4] BENZ, W.: *Permutations and plane sections of a ruled quadric.* Symposia Mathematica (1971).

[5] BENZ, W. und H. MÄURER: *Über die Grundlagen der Laguerre-Geometrie. Ein Bericht.* Jahresber. Deutsche Math. Ver. 67 (1964) 14-42.

[6] COXETER, H. S. M.: *Twelve points in* PG (5, 3) *with* 95040 *self-transformations.* Proc. Royal Soc. (A) 247 (1958) 279-293.

[7] HEISE, W.: *Bericht über k-affine Räume.* Journal of Geometry 1 (1971) 197-224.

[8] HEISE, W.: *Eine neue Klasse von Möbius-m-Strukturen.* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste 2 (1970) 125-128.

[9] HEISE, U., W. HEISE und H.-J. KROLL: *Über die Existenz endlicher Möbius-m-Strukturen.* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste 3 (1971).

[10] HEISE, W. und H. KARZEL: *Symmetrische Minkowski-Ebenen.* Journal of of Geometry 3 (1973).

[11] HEISE, W. und K. SÖRENSEN: *Freie Minkowski-Ebenen Erweiterungen.* Journal of Geometry 3 (1973).

[12] HEISE, W. und J. TIMM: *k-affine Räume.* Manuscr. math. 4 (1971)-31-37.

[13] KARZEL, H.: *Zusammenhänge zwischen Fastbereichen, scharf zweifach-transitiven Permutationsgruppen und 2-Strukturen mit Rechtecksaxiom.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 32 (1968) 191-206.

[14] PERMUTTI, R.: *Una generalizzazione dei piani di Möbius.* Le Matematiche 22 (1967) 360-374.

[15] PERMUTTI, R.: *Sulle m-strutture ovoidali di Möbius.* Le Matematiche 23 (1968) 50-59.

[16] SCHLEIERMACHER, A. und K. STRAMBACH: *Freie Erweiterungen in der affinen Geometrie und der Geometrie der Kreise II.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 34 (1970) 209-226.