UN TEOREMA COSTRUTTIVO DI PUNTO FISSO NEGLI SPAZI DI BANACH (*)

di UGO BARBUTI (a Modena) e SERGIO GUERRA (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si prova una notevole estensione di un recente teorema dovuto a W. A. Kirk.*

SUMMARY. - *Here it is proved a remarkable extension of a recent theorem due to W. A. Kirk.*

Sia X uno spazio di Banach, Y un suo sottoinsieme convesso e T una contrazione su Y:

$$\| Tx - Ty \| \leq \| x - y \|, \ \forall \ x, y \in Y.$$

In generale, fissato $x \in Y$, la traiettoria di origine $x: \} T_x^n \{_N$, non converge e, pertanto, quando l'insieme: $F(T)$, dei punti fissi della T riesce non vuoto, al fine della costruzione effettiva di uno almeno di tali punti, si fa ricorso ad altre tecniche d'approssimazione. Fra queste, quella maggiormente in uso consiste nel considerare la trasformazione

$$U_\lambda = \lambda I + (1 - \lambda) T, \ 0 < \lambda < 1 \ (^1),$$

che è equivalente alla T e di indagare sotto quali circostanze la traiettoria $\} U_\lambda^n \, x \{_N$ converge, per ogni $x \in Y$, ad un punto fisso della T.

(*) Pervenuto in Redazione il 2 marzo 1972.

Lavoro eseguito col contributo del C. N. R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni.

(**) Indirizzi degli Autori: UGO BARBUTI, Istituto Matematico « G. Vitali » — Università — Corso Canalgrande 45 — 41100 Modena; SERGIO GUERRA, Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

(1) Considerata per la prima volta da Mann [1].

Il primo risultato in proposito fu conseguito da Krasnoselskii [2], che dimostrò la convergenza, relativamente al caso particolare $\lambda = \dfrac{1}{2}$, nell'ipotesi che X sia uniformemente convesso, Y chiuso e T a codominio compatto.

Schaefer [3] mostrò poi come tale risultato sussista per ogni $\lambda : 0 < \lambda < 1$.

Ferme restando le altre ipotesi, Edelstein [4] conseguì la stessa tesi di Krasnoselskii supponendo X strettamente, anziché uniformemente convesso.

Nelle medesime ipotesi del teorema di Edelstein, Diaz e Metcalf [5] stabilirono in seguito l'analogo del teorema di Schaefer.

Il teorema di Diaz e Metcalf è stato ultimamente esteso da Barbuti e Guerra [8] al caso in cui la T sia una contrazione generalizzata, cioè tale che

$$\| Tx - Ty \| \leq \alpha \| x - y \| + \beta [\| Tx - x \| + \| Ty - y \|], \quad \forall\, x, y \in Y,$$

$$\alpha \geq 0, \ \beta \geq 0, \ \alpha + 2\beta \leq 1,$$

continua, di Y in sè.

Recentemente Kirk [9] ha preso in considerazione la trasformazione

$$S = \lambda_0 I + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2 + \ldots + \lambda_k T^k, \tag{1}$$

$$\lambda_i \geq 0, \lambda_1 > 0, \ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1,$$

con T contrazione su Y. Tale Autore, appoggiandosi a noti risultati di Browder e Petryshyn [10] (²), dimostra la convergenza della traiettoria $\{S^n x\}_N$ ad un punto fisso della T, per ogni $x \in Y$, nella ipotesi che X sia uniformemente convesso (³).

Scopo di questa nota è quello di mostrare come il risultato conseguito da Kirk sia suscettibile di una doppia generalizzazione, possa cioè generalizzarsi al caso in cui X sia uno spazio di Banach

(²) Cfr. teoremi 5 e 6.

(³) Cfr. [9], corollario del teorema 2. Ci interessa qui far notare come la tesi di Kirk riesca del tutto ovvia (in virtù dei teoremi 1 e 2) non appena si tenga presente, in [6], il teorema 2_c (S è infatti una contrazione su Y) e, in [7], la proposizione 6 (per $m = 1$).

strettamente convesso [4] e T una contrazione generalizzata, continua, di Y in sè.

1. Dimostriamo, preliminarmente, il seguente:

LEMMA. *Se T è una contrazione generalizzata su Y ed S la trasformazione definita in* (1), *allora*

$$Su = u \Longleftrightarrow Tu = u.$$

[4] Gli spazi di Banach uniformemente convessi costituiscono una sottocategoria degli spazi di Banach strettamente convessi.

Per completezza d'esposizione ne diamo qui la prova.

Sia, infatti, X uniformemente convesso; $x, y \in X, x \neq y$ e $\| x \| = \| y \| = 1$. Posto, $\forall n \in N, x_n = x, y_n = y$, riesce $\lim\limits_{lim} \| x_n + y_n \| = \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \| = 2$ e non può accadere che sia $\| x + y \| = 2$, altrimenti, per le ipotesi, risulterebbe $\lim\limits_n \| x_n - y_n \| = \| x - y \| = 0$, onde l'assurdo $x = y$. È dunque, intanto, $\| x + y \| < 2$, ovvero

$$(*) \qquad \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Consideriamo ora il punto $\lambda x + (1 - \lambda) y, 0 < \lambda < 1$ e quindi il numero (non negativo)

$$f(\lambda) = \| \lambda x + (1 - \lambda) y \|.$$

Per $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$, poniamo $\lambda = \frac{1 - \mu}{2}$; risulta $0 \leq \mu < 1$ e, conseguentemente, in virtù della (*),

$$f(\lambda) = f\left(\frac{1-\mu}{2}\right) = \left\| \frac{1-\mu}{2} . x + \frac{1+\mu}{2} . y \right\| = \left\| (1-\mu) . \frac{x+y}{2} + \mu y \right\| \leq$$

$$\leq (1-\mu) . \left\| \frac{x+y}{2} \right\| + \mu . \| y \| < 1 - \mu + \mu = 1.$$

Per $\frac{1}{2} \leq \lambda < 1$, poniamo invece $\lambda = \frac{1 + \mu}{2}$; risulta ancora $0 \leq \mu < 1$ e, conseguentemente, sempre in virtù della (*),

$$f(\lambda) = f\left(\frac{1+\mu}{2}\right) = \left\| \frac{1+\mu}{2} . x + \frac{1-\mu}{2} . y \right\| = \left\| \mu x + (1-\mu) . \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Per ogni $\lambda : 0 < \lambda < 1$ riesce allora $f(\lambda) < 1$ ed X risulta, pertanto, strettamente convesso.

Poiché, com'è ovvio, $Tu = u \Longrightarrow Su = u$, basterà dimostrare l'implicazione opposta.

Sia $u (\in Y) : Su = u$. Consideriamo, su Y, i punti

$$u = T^0 u, Tu, T^2 u, \dots, T^k u$$

e quindi i numeri

$$\| T^p u - T^q u \|, \; p, q = 0,1, \dots, k.$$

Poniamo

$$\delta = \max_{p, q} \| T^p u - T^q u \|$$

e supponiamo, per assurdo, che sia $\delta > 0$. Può darsi che δ sia assunto per vari valori di p e q; noi supporremo, com'è lecito, che p sia il minimo intero positivo per il quale riesca

$$\delta = \| T^p u - T^q u \| \tag{2}$$

e che sia $p > q$.

Osserviamo subito che, per un tale p, è necessariamente $q = 0$. Infatti: se $p = 1$, è ovviamente $q = 0$; se $p > 1$ e $q > 0$, riesce

$$\delta = \| T^p u - T^q u \| \leq \alpha \| T^{p-1} u - T^{q-1} u \| + \beta [\| T^p u - T^{p-1} u \| +$$

$$+ \| T^q u - T^{q-1} u \|] < \alpha\delta + \beta (\delta + \delta) = (\alpha + 2\beta) \delta \leq \delta,$$

onde l'assurdo $\delta < \delta$.

Poiché $u = Su$, sussiste l'uguaglianza

$$u = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_0} T^i u \text{ [5]},$$

dalla quale, posto

$$\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_0} = \mu_i, \quad v = \sum_{i=2}^{k} \frac{\mu_i}{1 - \mu_1} T^i u \text{ [6]},$$

segue la

$$u = \mu_1 Tu + (1 - \mu_1) v$$

(5) É $\lambda_0 < 1$, per essere, come supposto in (1), $\lambda_1 > 0$.

(6) Se riuscisse $\mu_1 = 1$, sarebbe $\lambda_i = 0, \forall i \geq 2$; la trasformazione S si ridurrebbe allora alla $\lambda_0 I + \lambda_1 T$ e il lemma risulterebbe del tutto ovvio.

e, essendo, per quanto supposto in (1) nei riguardi dei numeri λ_i, $\sum_{i=1}^{k} \mu_i = 1, \mu_i \geq 0$, onde $\sum_{i=2}^{k} \frac{\mu_i}{1-\mu_1} = 1$, risulta $v \in Y$. Posto

$$\nu_i = \frac{\mu_i}{1-\mu_1},$$

per essere

$$\| T^p u - v \| = \left\| \sum_{i=2}^{k} \nu_i (T^p u - T^i u) \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=2}^{k} \nu_i \| T^p u - T^i u \| \leq \delta \sum_{i=2}^{k} \nu_i = \delta,$$

risulta, allora,

$$\delta = \| T^p u - u \| = T^p u - \mu_1 Tu - (1-\mu_1) v \| \leq \mu_1 \| T^p u - Tu \| +$$

$$+ (1-\mu_1) \| T^p u - v \| < \mu_1 \delta\,(^7) + (1-\mu_1)\delta = \delta$$

onde l'assurdo $\delta < \delta$.

È, pertanto, $\delta = 0$ e cioè $u = Tu$, come volevasi dimostrare.

2. Siamo ora in grado di dimostrare il seguente:

TEOREMA. *Sia Y un sottoinsieme convesso e chiuso di uno spazio di Banach strettamente convesso e sia T una contrazione generalizzata, definita e continua su Y, a codominio compatto. In queste ipotesi, la traiettoria $\{S^n x\}_N$, generata dalla trasformazione* (1), *converge, per ogni $x \in Y$, ad un punto fisso della T.*

La trasformazione S è definita su Y ed ha codominio su Y, essendo Y convesso; inoltre, per il lemma, i due insiemi $F(S)$ ed $F(T)$ coincidono. L'insieme $F(T)$ (e quindi $F(S)$) non è vuoto per un teorema di Schauder [11], per essere Y convesso e chiuso e $T(Y)$ compatto; di più, per ogni $x \in Y$, l'involucro convesso chiuso contenente $T(Y) \cup \{x\}$ risulta compatto per un teorema di Mazur [12], onde la traiettoria $\{S^n x\}_N$. (i cui punti appartengono al detto involucro) è compatta, cioè la trasformazione S è sequenzialmente compatta su Y.

(7) Si ricordi che, per quanto prima osservato, è $\| T^p u - Tu \| < \delta$.

Poiché T è, su Y, una contrazione generalizzata, per ogni $u \in F(T)$, ogni $x \in Y$ ed ogni $p \in N$, riesce

$$(3) \qquad \| T^p x - u \| \leq \| x - u \| \text{ [8]}.$$

Si ponga ora

$$z = \frac{1}{1-\lambda_0} [\lambda_1 (Tx - u) + \ldots + \lambda_k (T^k x - u)].$$

Se $x \notin F(T)$, per il lemma, è $z \neq x - u$ e, in virtù della (3), risulta

$$(4) \qquad \| z \| \leq \frac{1}{1-\lambda_0} [\lambda_1 \| Tx - u \| + \ldots + \lambda_k \| T^k x - u \|] \leq$$

$$\leq \frac{1}{1-\lambda_0} (\lambda_1 + \ldots + \lambda_k) \cdot \| x - u \| = \| x - u \|.$$

Si ha poi che

$$(5) \quad \| Sx - u \| = \| Sx - Su \| = \| \lambda_0 (x - u) + \ldots + \lambda_k (T^k x - u) \| =$$

$$= \| \lambda_0 (x - u) + (1 - \lambda_0) z \| = \| x - u \| \cdot \left\| \lambda_0 \cdot \frac{x-u}{\|x-u\|} + (1-\lambda_0) \cdot \frac{z}{\|x-u\|} \right\| .$$

Sia $x \notin F(T)$. Se nella (4) vale la disuguaglianza, dalla (5) segue

$$\| Sx - u \| \leq \| x - u \| \cdot \left[\lambda_0 \cdot \frac{\| x - u \|}{\| x - u \|} + (1 - \lambda_0) \cdot \frac{\| z \|}{\| x - u \|} \right] <$$

$$< \| x - u \| (\lambda_0 + 1 - \lambda_0) = \| x - u \| .$$

Se nella (4) vale l'uguaglianza, essendo i due vettori $\frac{x-u}{\|x-u\|}, \frac{z}{\|x-u\|}$ distinti e di norma unitaria ed X strettamente convesso, riesce

$$\left\| \lambda_0 \cdot \frac{x-u}{\|x-u\|} + (1-\lambda_0) \cdot \frac{z}{\|x-u\|} \right\| < 1$$

[8] È, infatti,

$$\| Tx - u \| = \| Tx - Tu \| \leq \alpha \| x - u \| + \beta [\| Tx - x \| + \| Tu - u \|] =$$

$$= \alpha \| x - u \| + \beta \| Tx - x \| \leq \alpha \| x - u \| + \beta [\| Tx - u \| + \| x - u \|],$$

onde

$$\| Tx - u \| \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} \cdot \| x - u \| \leq \| x - u \| .$$

Da questa segue poi subito la (3).

e dunque, per ogni $u \in F(T)$ ed ogni $x \notin F(T)$, risulta

$$\| Sx - u \| < \| x - u \|.$$

La tesi segue allora in virtù di un teorema di Diaz e Metcalf [9].

3. Osservazione. Se T è una contrazione, allora, come già abbiamo avuto modo di osservare (cfr. nota (3) a piè di pg.), la trasformazione S (di Kirk) è ancora una contrazione. Ma, se T è una contrazione generalizzata, la trasformazione S può non esserlo. A conferma di quanto asserito, produciamo l'esempio seguente.

Sia X la retta euclidea, $Y = [0, 1]$ e T la trasformazione (di Y in sé) così definita:

$$Tx = \begin{cases} 0 \quad , & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{5}{7} \\ \frac{3(7x-5)}{14}, & \text{per } \frac{5}{7} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

T è continua e non contrattiva; riesce infatti $\left| T1 - T\frac{5}{7} \right| = \frac{3}{7} > \left| 1 - \frac{5}{7} \right| = \frac{2}{7}$. T è una contrazione generalizzata; come subito si controlla, si ha, precisamente:

$$| Tx - Ty | \leq \frac{1}{5} | x - y | + \frac{2}{5} [| Tx - x | + | Ty - y |], \qquad \forall\, x, y \in Y.$$

Si consideri ora la trasformazione S, con $K = 1$, $\lambda_0 = \frac{5}{9}$, $\lambda_1 = \frac{4}{9}$:

$$S = \frac{5}{9} I + \frac{4}{9} T.$$

(9) Cfr. [5], teorema 3. Questo teorema è stato ritrovato, sotto ipotesi un po' meno restrittive da Barbuti e Guerra cfr. [6], teorema 3, pg. 75). Ne riportiamo il testo per comodità di lettura:

« Sia (X, δ) uno spazio metrico e T una trasformazione di X in sè continua e sequenzialmente compatta su X. $F(T)$ sia, inoltre, non vuoto. Se, per ogni $u \in F(T)$ ed ogni $x \in X - F(T)$, riesce $\delta(Tx, u) < \delta(x, u)$, allora la traiettoria $\{T^n x\}_N$ converge per ogni $x \in X$ ».

Riesce

$$\left| S1 - S\frac{5}{7} \right| = \frac{22}{63}, \quad \alpha \left| 1 - \frac{5}{7} \right| + \\ + \beta \left[| S1 - 1 | + \left| S\frac{5}{7} - \frac{5}{7} \right| \right] = \frac{18(\alpha + 2\beta)}{63}$$

e, dunque, per ogni coppia di numeri reali α e β tali che $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\alpha + 2\beta \leq 1$, risulta

$$\left| S1 - S\frac{5}{7} \right| > \alpha \left| 1 - \frac{5}{7} \right| + \beta \left[| S1 - 1 | + \left| S\frac{5}{7} - \frac{5}{7} \right| \right].$$

BIBLIOGRAFIA

[1] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc., 4 (1953), pp. 506-510.

[2] M. A. Krasnoselskii, *Two remarks about the method of successive approximations*, Uspehi Math. Nauk, 10 (1955), n. 1 (63), pp. 123-127.

[3] H. Schaefer, *Über die Methode sukzessiver Approximation*, Jber. Deutsch. Math. Verein. 59 (1957), pg. 131-140.

[4] M. Edelstein, *A remark on a theorem of M. A. Krasnoselskii*, Amer, Math. Monthly 73 (1961), pg. 509-510.

[5] J. B. Diaz and F. T. Metcalf, *On the set of subsequential etc.*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 135 (1969), pg. 459-485.

[6] U. Barbuti e S. Guerra, *Sopra alcuni teoremi di convergenza etc.*, Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, vol. II, fasc. I (1970), pg. 59-84.

[7] U. Barbuti e S. Guerra, *Osservazioni sopra una nota precedente*, Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, vol. III, fasc. II (1971), pg. 188-199.

[8] U. Barbuti e S. Guerra, *On an extension etc.*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., vol. LI, 2° sem., fasc. 1-2 (1971), pp. 29-31.

[9] W. A. Kirk, *On successive approximation etc*, Glasgow Math. Jour. 12, part. 1 (1971), pg. 6-9.

[10] F. E. Browder and W. V. Petryshyn, *The solution by iteration etc.*, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), pg. 571-575.

[11] J. Scander, *Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math., T. II. (1930), pg. 171-180.

[12] S. Mazur, *Über die kleinste Konvexe Menge etc.*, Studia Math., 2 (1930), pg. 7-9.