STRUTTURA QUASI-NORMALE E TEOREMI DI PUNTO UNITO (*)

di PAOLO SOARDI (a Milano) (**)

SOMMARIO. - *In questa Nota viene introdotto e illustrato il concetto di «struttura quasi-normale» in uno spazio vettoriale normato X. Mediante questa nozione, che generalizza quella di struttura normale, dimostriamo alcuni teoremi di punto unito per una classe di mappe T che applicano in sè un sottoinsieme convesso e debolmente compatto di X. Infine costruiamo un procedimento di tipo iterativo che, in spazi uniformemente convessi, converge al punto unito della mappa T.*

SUMMARY. - *In this paper the notion of «quasi-normal structure» in a linear normed space X is introduced. With the aid of this notion (which generalizes that of normal structure) we prove some fixed point theorems for a class of self-mappings T of a convex weakly compact subset of X. Therefore we construct an iterative procedure approximating, in uniformly convex spaces, the fixed point of T.*

1. Consideriamo un sottoinsieme K chiuso e convesso di uno spazio vettoriale normato e un'applicazione $T: K \to K$ tale che

$$\| T(x) - T(y) \| \leq \frac{1}{2} (\| x - T(x) \| + \| y - T(y) \|) \qquad \forall\, x, y \in K.$$

(*) Pervenuto in Redazione il 18 febbraio 1972.
Lavoro eseguito con contributo del C. N. R. nell'ambito del G. N. A. F. A.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Via C. Saldini 50 — 20153 Milano.

In una precedente Nota, rispondendo a un quesito di S. REICH (1), abbiamo dimostrato che per una tale applicazione vale un teorema del tipo di BROWDER - KIRK (2) e cioè che, se K è debolmente compatto e a struttura normale (quindi, in particolare, se lo spazio ambiente X è uno spazio di Banach uniformemente convesso) esiste in K un punto unito di T e uno solo.

In questa Nota, dopo avere introdotto e illustrato una nozione di « struttura quasi-normale », generalizziamo il teorema precedente al caso in cui K sia debolmente compatto e a struttura quasi-normale.

Questa estensione ci sembra interessante perché ogni sottoinsieme chiuso e convesso di uno spazio di Banach separabile è a struttura quasi-normale: il teorema risulta quindi valido anche per sottoinsiemi convessi e debolmente compatti di L^1.

Da questo teorema si deduce anche l'esistenza di un punto unito se X è completo, K è debolmente compatto e convesso e T è continua.

Indichiamo inoltre un procedimento iterativo per ottenere il punto unito, qualora X sia uniformemente convesso.

2. Siano, qui e nel seguito, X uno spazio vettoriale normato, K un suo sottoinsieme non vuoto, chiuso e convesso e

$$\delta(A) = \operatorname*{Sup}_{x,\, y \in A} \| x - y \| \qquad \forall\, A \subseteq X.$$

Diremo che K è « a struttura quasi-normale » qualora sia soddisfatta la condizione seguente:

« *in ogni sottoinsieme chiuso, convesso e limitato $H \subseteq K$, contenente almeno due punti, esiste un punto x tale che*:

$$\| x - y \| < \delta(H) \qquad \forall\, y \in H \text{ »}.$$

Hanno struttura quasi-normale ad esempio:

a) gli insiemi chiusi e convessi a struttura normale;

b) i sottoinsiemi chiusi e convessi di uno spazio strettamente convesso (3);

c) i sottoinsiemi chiusi e convessi di uno spazio di Banach separabile. Vale infatti il seguente

(1) Vedasi [8] pp. 10-11 e [9] Teorema III.

(2) Vedasi [7], [3] Teorema 1, [1] Teorema 3, [5] p. 256.

(3) Omettiamo la facile verifica.

LEMMA I. *Ogni sottoinsieme K chiuso, convesso, separabile di uno spazio di Banach è a struttura quasi-normale* (4).

Infatti, sia $H \subseteq K$ chiuso, convesso, limitato e contenente due punti u, v tali che:

$$\| u - v \| = \delta (H) \tag{2.1}$$

Sia $A \supseteq \{u, v\}$ un sottoinsieme di H massimale per il quale valga (2.1) per ogni sua coppia di punti. A è separabile e quindi al più numerabile; sia $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Poniamo $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_n$; allora $y \in H$. Proviamo che:

$$\| y - x \| < \delta (H) \qquad \forall\, x \in H. \tag{2.2}$$

Infatti, se fosse $\| y - z \| = \delta (H)$ per qualche $z \in H$, si avrebbe

$$\delta (H) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \| x_n - z \| \leq \delta (H);$$

quindi $\| x_n - z \| = \delta (H)\ \forall\, n$, e questo è assurdo perché A è massimale.

Dalla validità di (2.2) segue che K ha struttura quasi-normale.

In spazi di Banach non separabili esistono insiemi chiusi e convessi (anzi, in più, debolmente compatti) che non hanno struttura quasi-normale, come mostra il seguente esempio (5).

Sia X uno spazio di Hilbert non separabile; $\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sistema ortonormale massimale; $\{\hat{x}(\alpha)\}_{\alpha \in A}$ i coefficienti di Fourier del generico punto x di X e $\| x \|_X$ la sua norma. Sia Y lo spazio isomorfo a X la cui norma è definita da

$$\| x \|_Y = \operatorname{Max} \left\{ \frac{1}{2} \| x \|_X ,\quad \operatorname*{Sup}_{\alpha \in A} | \hat{x} (\alpha) | \right\}$$

e sia

$$K = \{ x \in Y \mid \| x \|_X \leq 1 \wedge \hat{x} (\alpha) \geq 0 \qquad \forall\, \alpha \in A \}.$$

(4) La dimostrazione segue, con opportune modifiche, il procedimento adottato in [4], Lemma I, p. 1139.

(5) L'esempio è costruito, a partire da uno spazio di Hilbert non separabile, con la stessa tecnica usata in [2], p. 439.

Essendo: $u_\alpha \in K \ \forall \alpha$, $\| u_\alpha - u_\beta \|_Y = 1 \ \forall \alpha \neq \beta$ e inoltre $x, y \in K \Longrightarrow \| x - y \| \leq 1$, risulta $\delta(K) = 1$. Sia x un qualunque punto di K; esistono infiniti $\alpha \in A$ per i quali $\hat{x}(\alpha) = 0$ e quindi $\| x - u_\alpha \|_Y = 1$. Ne segue che K, pur essendo convesso e debolmente compatto (perché Y è riflessivo), non ha struttura quasi-normale.

Osserviamo infine che un insieme a struttura quasi-normale non ha necessariamente struttura normale; esistono infatti in spazi separabili e riflessivi insiemi convessi e debolmente compatti (e quindi a struttura quasi-normale per il Lemma I) che non hanno struttura normale [6].

3. Consideriamo, qui e nel seguito, applicazioni $T : K \longrightarrow K$ soddisfacenti la condizione [7]:

$$\text{(A)} \qquad \| T(x) - T(y) \| \leq \frac{1}{2}(\| T(x) - x \| + \| T(y) - y \|) \qquad \forall\, x, y \in K.$$

Sia $d > 0$ arbitrario. Poniamo

$$(3.1) \qquad A(d) = \{ x \in K \mid \| x - T(x) \| \leq d \},$$

$$(3.2) \qquad B(d) = \overline{co}\, T(A(d)) \ [8] \qquad \forall\, A(d) \neq \emptyset.$$

Vale il seguente

(6) Vedasi [2] p. 439; cfr. anche [6].

(7) La (A) è manifestamente equivalente a

$$\| T(x) - T(y) \| \leq \alpha \| x - T(x) \| + \beta \| y - T(y) \| \qquad \forall\, x, y \in K.$$

con $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$ ed è meno restrittiva della condizione

$$\| T(x) - T(y) \| \leq \alpha \| x - T(x) \| \qquad \forall\, x, y \in K \qquad \text{con} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

È anche evidente che

$$\| T^n(x) - T^{n+1}(x) \| \leq \| T^{n-1}(x) - T^n(x) \| \qquad \forall\, x \in K \wedge \forall\, n > 0.$$

La (A) non implica la continuità di T, né che T sia non espansiva. Vedasi a questo proposito [9] p. 842, nota (4).

(8) Per ogni $A \subseteq X$ denotiamo, qui e nel seguito, con $\bar{A}$ la sua chiusura e con $\overline{co}\, A$ la sua chiusura convessa.

LEMMA II. *Se* $A(d) \neq \emptyset$, *allora*

$$B(d) \subseteq A(d).$$

Infatti, se $x \in B(d)$, comunque si scelga $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un numero finito di punti di $K: x_1, x_2, \ldots, x_n$ e di numeri non negativi $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ in modo tale che risulti $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(x_i) \right\| \leq \varepsilon$. Ricordando la condizione (A) si ottiene

$$\| x - T(x) \| = \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(x_i) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (T(x_i) - T(x)) \right\|$$

$$\leq \varepsilon + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \| x_i - T(x_i) \| + \frac{1}{2} \| x - T(x) \|$$

$$\leq \varepsilon + \frac{1}{2} d + \frac{1}{2} \| x - T(x) \|$$

da cui, per l'arbitrarietà di ε, si ricava $\| x - T(x) \| \leq d$ e quindi la (3.2).

Dal Lemma II si ricava facilmente il

TEOREMA I. *Siano*: X *uno spazio vettoriale normato*; $K \subseteq X$ *convesso e debolmente compatto*; $T: K \rightarrow K$ *soddisfacente la condizione* (A). *Allora esiste almeno un punto di* K *in cui* $\| x - T(x) \|$ *assume il valore minimo.*

Poniamo:

$$d^* = \operatorname*{Inf}_{x \in K} \| x - T(x) \| .$$

Per dimostrare il Teorema I occorre provare che $A(d^*) \neq \emptyset$. Consideriamo allora una successione di numeri reali $\{d_n\} \downarrow d^*$. Essendo per ogni n $A(d_n) \supseteq A(d_{n+1})$, è anche $B(d_n) \supseteq B(d_{n+1})$. Per la compattezza debole di K, $\bigcap_{n=1}^{\infty} B(d_n) \neq \emptyset$. Sia x un punto di tale insieme. Per il Lemma II, è necessariamente $\| x - T(x) \| = d^*$ e quindi $A(d^*) \neq \emptyset$.

Supponiamo ora che K (o T) soddisfino (oltre che alle condizioni richieste per la validità del Teorema I) ulteriori condizioni che escludano la possibilità di un minimo positivo per $\| x - T(x) \|$

in K; allora dal Teorema I si ricavano teoremi di esistenza (e unicità, in forza di (A)) di un punto unito per T.

Valgono, ad esempio, i teoremi seguenti.

TEOREMA II. [9] *Sia K un sottoinsieme convesso, debolmente compatto e a struttura quasi-normale di uno spazio vettoriale normato X. Ogni applicazione $T: K \rightarrow K$ soddisfacente la condizione* (A) *ha in K uno e un solo punto unito.*

Infatti da (A) e da (3.2) segue $\delta(B(d^*)) \leq d^*$. Inoltre, sempre da (3.2) e dal Lemma II segue

$$T(B(d)) \subseteq B(d) \qquad \forall\ d \geq d^* \tag{3.3}$$

e perciò è anche $\delta(B(d^*)) \geq d^*$. Quindi $\delta(B(d^*)) = d^*$, il che è assurdo se $d^* > 0$, perché $B(d^*)$ ha struttura quasi normale.

COROLLARIO I. *Siano : X uno spazio vettoriale normato riflessivo ; $K \subseteq X$ chiuso, convesso a struttura quasi-normale ; $T: K \rightarrow K$ soddisfacente la condizione* (A). *Allora esiste in K uno e un solo punto unito di T.*

Infatti se $d \geq d^*$, l'insieme $B(d)$ soddisfa le condizioni del Teorema II.

Più in particolare vale il

COROLLARIO II. [10] *Siano : X uno spazio di Banach uniformemente convesso, $K \subseteq X$ chiuso e convesso ; $T: K \rightarrow K$ soddisfacente la condizione* (A). *Allora esiste in K uno e un solo punto unito di T.*

TEOREMA III. *Siano : X uno spazio di Banach ; $K \subseteq X$ convesso e debolmente compatto ; $T: K \rightarrow K$ continua e soddisfacente la condizione* (A). *Allora esiste in K uno e un solo punto unito di T.*

Infatti, sia x un punto di K, C_0 la chiusura convessa dell'orbita di x, e $C_n = \overline{co}\, T(C_{n-1})$ $\forall\ n > 1$. Poniamo

$$K_1 = \bigcup_{h=0}^{\infty} \bigcap_{n \geq h} C_n .$$

K_1 è non vuoto, chiuso, convesso (perciò debolmente compatto) e separabile [11] (quindi, per il Lemma I, a struttura quasi normale).

(9) Questo Teorema contiene il Teorema II di [9].

(10) Questo corollario generalizza il Teorema III di [9].

(11) Infatti, essendo C_0 separabile, per la continuità di T ogni C_n è separabile.

Inoltre, essendo T continua, $T(K_1) \subseteq K_1$. Dal Teorema II applicato a K_1 segue l'asserto.

Osserviamo infine che, se T soddisfa (A) ed è inoltre sequenzialmente contrattiva ([12]), dal Teorema I segue immediatamente che T ha in K uno e un solo punto unito.

4. Supponiamo soddisfatte le ipotesi del Teorema II. La successione delle iterate di un qualsiasi punto di K non converge, in generale, al punto unito di T in K, anche se T è continua ([13]).

Riteniamo quindi opportuno segnalare qui un procedimento iterativo che, almeno quando X è uniformemente convesso, consente di determinare il punto unito di T.

TEOREMA IV. *Siano soddisfatte le ipotesi del Corollario II e sia x_0 un punto qualunque di K. Posto*

$$x_n = \frac{1}{2}\left(T(x_{n-1}) + T^2(x_{n-1})\right) \qquad \forall\, n > 0,$$

la successione $\{x_n\}$ converge al punto unito x^* di T in K. Risulta inoltre

$$\| x^* - x_{n+1} \| \leq \frac{1}{2} \| x_n - T(x_n) \| \qquad \forall\, n > 0. \tag{4.1}$$

Poniamo, per semplicità di scrittura,

$$\| x_n - T(x_n) \| = a_n\,, \quad \| T(x_n) - T^2(x_n) \| = b_n\,,$$

$$\sup_{y \in B(a_n)} \| y - x_{n+1} \| = c_n\,.$$

Da (A) segue

$$\| x^* - T(x_n) \| \leq \frac{1}{2} a_n\,, \quad \| x^* - T^2(x_n) \| \leq \frac{1}{2} a_n$$

e quindi la (4.1). Inoltre $x_{n+1} \in B(a_n)$ e $\{a_n\} \downarrow a \geq 0$.

Se $a = 0$ da (4.1) segue la tesi.

([12]) Cioé:

$$\lim_{n \to \infty} \| T^n(x) - T^{n+1}(x) \| < \| x - T(x) \| \qquad \forall\, x \neq T(x).$$

([13]) Sia infatti $X = \mathbf{R}$, $K = [-1, 1]$, $T(x) = -x$: la successione $\{T^n(x)\}$ non converge per alcun $x \neq 0$.

Sia $a > 0$. Dalla definizione di $B(d)$ e da (A) segue immediatamente che $\delta(B(d)) \leq d$. Ma allora per ogni n risulta $a_n \geq c_n \geq a_{n+1}$ e da $a > 0$ segue $c_n = a_n(1 + o(1))$ per $n \rightarrow +\infty$. Esiste quindi una successione $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ con $y_{n+1} \in B(a_n)$ tale che per $n \rightarrow +\infty$ risulta

$$\left\| \frac{y_{n+1} - x_{n+1}}{a_n} \right\| = \left\| \frac{y_{n+1} - T(x_n)}{2a_n} + \frac{y_{n+1} - T^2(x_n)}{2a_n} \right\| \rightarrow 1.$$

Essendo inoltre

$$\left\| \frac{y_{n+1} - T(x_n)}{a_n} \right\| \leq 1, \qquad \left\| \frac{y_{n+1} - T^2(x_n)}{a_n} \right\| \leq 1$$

per l'uniforme convessità di X deve essere

$$\| T(x_n) - T^2(x_n) \| = b_n \rightarrow 0.$$

Ma allora $\bigcap_{n=0}^{\infty} B(b_n) = \{x^*\}$ e $T^2(x_n) \rightarrow x^*$. Poiché risulta anche $\| x_{n+1} - T^2(x_n) \| = \frac{1}{2} b_n$, segue $x_n \rightarrow x^*$.

BIBLIOGRAFIA

[1] L. P. Belluce, W. A. Kirk: *Fixed point theorems for certain classes of non-expansive mappings,* J. London Math. Soc. **20** (1969), 141-146.

[2] L. P. Belluce, W. A. Kirk, E. F. Steiner: *Normal structure in Banach spaces,* Pacific J. Math. **26** (1968), 433.440.

[3] F. E. Browder: *Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **54** (1965), 1041-1044.

[4] R. De Marr: *Common fixed points for commuting contraction mappings,* Pacific J. Math. **13** (1963), 1139-1141.

[5] D. Göhde: *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung,* Math. Nach. **30** (1965), 251-258.

[6] J. P. Gossez, E. Lami Dozo: *Structure normale et base de Schauder,* Acad. Royale Belg. Bull. Cl. Sci (5) **55** (1969), 673-681.

[7] W. A. Kirk: *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances,* Amer. Math. Monthly **73** (1965), 1004-1006.

[8] S. Reich: *Kannan's fixed point theorem,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **4** (1971), 1-11.

[9] P. Soardi: *Su un problema di punto unito di S. Reich,* Boll. Un. Mat. Ital. (4) **4** (1971), 841-845.