GRUPPI LOCALMENTE FINITI DOTATI DI r-OMOMORFISMI DUALI COMPLETI (*)

di GIOVANNI ZACHER (a Padova) (**)

SOMMARIO. - *Si determinano i gruppi localmente finiti che ammettono un r-omomorfismo duale completo.*

SUMMARY. - *A characterization is given of the locally finite groups with a complete dual-lattice homomorphism.*

Un gruppo G dicesi dotato di un *r-omomorfismo duale* (*completo*), se esiste un gruppo $\overline{G}$ ed un omomorfismo duale (completo) φ del reticolo $L(G)$ di tutti i sottogruppi di G in quello $L(\overline{G})$ di $\overline{G}$, vale a dire una applicazione tale che $\varphi(\bigvee_{X \in \mathcal{F}} X) = \bigwedge_{X \in \mathcal{F}} \varphi(X)$, $\varphi(\bigwedge_{X \in \mathcal{F}} X) = \bigvee_{X \in \mathcal{F}} \varphi(X)$ per un qualunque sottoinsieme non vuoto $\mathcal{F}$ finito (anche non finito) di $L(G)$.

Lo scopo della presente Nota è la caratterizzazione dei gruppi localmente finiti dotati di un r-omomorfismo duale completo.

Le notazioni usate sono quelle usuali in teoria dei gruppi; in particolare $H \leq G$: sottogruppo di G, $H \lhd G$: sottogruppo normale di G, $\langle a \rangle$: gruppo ciclico generato da a. Se φ è una applicazione di $L(G)$ su $L(\overline{G})$, per $H \leq G$, poniamo $H^* = \bigvee_{X \ni \mathcal{F}} X$, $H_* = \bigwedge_{X \in \mathcal{F}} X$ con $\mathcal{F} = \{X \mid X \leq G \text{ e } \varphi(X) = \varphi(H)\}$; $\{1\}^*$ è detto il *nucleo inferiore*, G_* il *nucleo superiore* di φ.

(*) Pervenuto in Redazione il 9 febbraio 1972.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Algebra e Geometria dell'Università — Via Belzoni 3 — 35100 Padova.

PROP. 1. *Se φ è un r-omomorfismo duale completo del gruppo G su $\overline{G}$, con $\overline{G} \neq \{1\}$, allora G e $\overline{G}$ sono periodici.*

DIM. Sia G non periodico; allora il nucleo inferiore $\{1\}^*$ di φ coincide con il sottogruppo identico $\{1\}$ di G (ch. III th. 5 in [2]), per cui $\varphi(X) \neq \overline{G}$ per ogni sottogruppo non identico X di G. Sia $\langle a \rangle$ d'ordine infinito; posto $Z_i = \langle a^{p^i} \rangle$ con p numero primo fissato, attraverso φ alla catena discendente $\{Z_i\}$ corrisponde una catena ascendente $\{\overline{Z}_i\}$ con $\bigvee_i \overline{Z}_i = \overline{G}$, dato che $\bigwedge_i Z_i = \{1\}$. Possiamo supporre $\overline{Z}_0$ sottogruppo massimo di $\overline{Z}_1$, $\overline{Z}_0 <\cdot \overline{Z}_1$; dato che l'intersezione di infiniti sottogruppi massimi di Z_0 è il gruppo identico, possiamo trovare un sottogruppo $M <\cdot Z_0$, d'indice $q \neq p$ in Z_0 e tale che $\varphi(M) = \overline{M} \neq \overline{Z}_0$, e dunque $\overline{Z}_0 <\cdot \overline{M}$; ma allora $\overline{M} = \overline{Z}_0 \vee \langle \overline{b} \rangle$ con $\overline{b} \notin \overline{Z}_0$ e dato che $\bigcup_i \overline{Z}_i = \overline{G}$, esiste un indice j tale che $\overline{b} \in \overline{Z}_j$ e dunque $\overline{M} \leq \overline{Z}_j$; ossia $Z_j \leq M$, cosa assurda, essendo l'indice $[Z_0 : M]$ primo con p. Concludiamo che G non contiene elementi aperiodici. Similmente passiamo a provare che pure $\overline{G}$ è periodico. Infatti sia per assurdo $\overline{a}$ un elemento di periodo infinito di $\overline{G}$; posto di nuovo $\overline{Z}_i = \langle \overline{a}^{p^i} \rangle$, sia $\{Z_i\}$ una catena ascendente in G_* con $\varphi(Z_i) = \overline{Z}_i$. Giacché $\bigwedge_i \overline{Z}_i = \{1\}$, è $\bigcup_i Z_i^* = G_*$; se poi $Z_0^* <\cdot M \leq G_*$ con $\varphi(M) = \overline{M} = \langle \overline{a}^q \rangle$ ove q è un primo diverso da p, sarà $M = Z_0^* \vee \langle b \rangle \leq G_*$ con b contenuto in conveniente Z_j per cui $Z_0^* < M \leq Z_j$ e dunque $\overline{M} \geq \overline{Z}_j$, assurdo.

Un r-omomorfismo φ di un gruppo G in un reticolo L si dirà proprio non banale se $\varphi L(G) \neq 0$ e se esistono due sottogruppi H, K di G con $H \neq K$ e $\varphi(H) = \varphi(K)$. Osserviamo che se φ è proprio, allora esiste un gruppo ciclico $\langle b \rangle$ di G su cui φ induce un r-omomorfismo proprio. Infatti da $\varphi(H \vee K) = \varphi(H)$, se $b \in H \vee K$ e se ad es. $b \notin H$, risulta $\varphi(H \vee \langle b \rangle) = \varphi(H)$ e dunque $\varphi(H \wedge \langle b \rangle) = \varphi\langle b \rangle$, sebbene $\langle b \rangle \neq H \wedge \langle b \rangle$. Si conclude che φ è un r-isomorfismo su G se e solo se tale è su ogni sottogruppo ciclico di G.

PROP. 2. *Un p-gruppo localmente finito G ammette un r-omomorfismo duale non banale φ se e solo se G è un C_{p^α} gruppo con $2 \leq \alpha \leq \infty$* (1), *oppure un gruppo generalizzato dei quaternioni Q_α, $3 \leq \alpha \leq \infty$* (2).

(1) C_{p^α} è il gruppo ciclico d'ordine p^α se $\alpha < \infty$, C_{p^∞} è il p-gruppo quasi ciclico ([1], pag. 20).

(2) Per la definizione e proprietà vedasi [1] pag. 191.

Se $G = Q_\alpha$, allora il nucleo superiore G_* ha ordine 2 oppure $\{1\}^*$ ha ordine 2 e $G_* = G$, e G è il gruppo dei quaternioni. Se G è C_{p^∞} allora G_* è finito.

DIM. In G, per l'osservazione fatta, esiste un gruppo ciclico $\langle a \rangle$ su cui φ induce un r omomorfismo proprio non banale; pertanto ciascun sottogruppo finito H di G con $\langle a \rangle \leq H$ è ciclico o generalizzato dei quaternioni. Ne consegue che G risulta l'unione di una catena ascendente di gruppi tutti ciclici o generalizzati dei quaternioni, finiti, dunque G stesso è o un C_{p^α} o un Q_α gruppo. Tenuto conto che $L(Q_\alpha)$ ha due sole relazioni di congruenza [2], e che un p-gruppo localmente finito con duale è un gruppo finito ([4], (2.1)), si conclude nel senso voluto.

PROP. 3. *Sia φ un r-omomorfismo duale completo non banale di G su $\overline{G}$, con G gruppo localmente finito. Allora il gruppo periodico $\overline{G}$ è necessariamente un prodotto diretto discreto di sottogruppi di Hall $\overline{H}$, con $\overline{H}$ gruppo finito di ordine del tipo $p^\alpha q^\beta$ con $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 0$, p e q numeri primi.*

DIM. Sia φ un r-omomorfismo duale completo non banale del gruppo localmente finito G su $\overline{G}$; allora φ induce un r-omomorfismo duale su $G_1 = G/\{1\}^*$, che indicheremo ancora con φ; esso ha il nucleo inferiore identico. Sia S un p-gruppo di Sylow di G_1 e si supponga che la restrizione di φ su S sia un r-omomorfismo proprio; esso non sarà banale. Tenuto conto della prop. 2 e di (3.5) e (3.7) ch. III, in [2], gli elementi di G_1 con ordini non divisibili per il primo p, costituiscono un sottogruppo di Hall normale T, mentre G_1/T è un C_{p^α} o un Q_α gruppo; nel secondo caso è $G_1 = S \times N$ e S_* è il sottogruppo d'ordine 2 di S. Da qui concludiamo che se π è l'insieme dei numeri primi relativi ai sottogruppi di Sylow di G_1 su cui φ induce r-omomorfismi propri, allora G_1 contiene un π'-sottogruppo di Hall caratteristico N con $(G_1/N)_*$ un gruppo (periodico) localmente ciclico a componenti primarie finite (prop. 2), mentre la restrizione di φ su $L(N)$ è un isomorfismo duale χ tra $L(N)$ e l'intervallo $[\varphi(N), \overline{G}]$.

Sia H un gruppo primario finito con $H \leq N$ e H nè ciclico, nè P-gruppo (3). Detto x un elemento di $\overline{G}$, sia $x\overline{H}x^{-1} \neq \overline{H} = \varphi(H)$.

(3) Per la definizione vedasi [2] pag. 11.

Sia B il sottogruppo minimo di G con $\varphi B = x\overline{H}x^{-1}$; l'applicazione $\psi = \chi^{-1}\, \overline{x}^{-1}\, \varphi\, (\overline{x}^{-1}$ indica l'automorfismo di $L(G)$ indotto dall'automorfismo interno di G individuato da x^{-1}) è un r-omomorfismo di G su H con $\{1\}^* = \{1\}$. Tenuto conto di (3.9) e (3.4) ch. III in [2] si ha che $\overline{H}$ e B hanno lo stesso ordine; dunque $B \leq N$, per cui $x\overline{H}x^{-1} \geq \varphi(N)$. Concludiamo che se $\mathcal{F}$ è l'insieme di tutti i gruppi finiti primari di N che non sono nè ciclici nè P-gruppi, il gruppo $R = \bigvee_{X \in \mathcal{F}} X$ è caratteristico in N ed ha per immagine $\varphi(R) = \overline{R}$ un sottogruppo normale di $\overline{G}$ contenente $\varphi(N)$. Pertanto tra i gruppi R e $\overline{G}/\overline{R}$, φ induce un r-isomorfismo duale; essendo R localmente finito la struttura di R e di $\overline{G}/\overline{R}$ è nota [3]: R è un sottogruppo (normale) di Hall di N, prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow che sono modulari non ciclici, nè P gruppi, nè gruppi hamiltoniani, mentre i gruppi di Sylow di N non contenuti in R sono ciclici o P-gruppi. Proviamo che $(G_1/R)_* = \{1\}$; da $\varphi \langle a, R \rangle = \overline{G}$, poichè $\varphi(\langle a \rangle R) = \varphi \langle a \rangle \wedge \overline{R}$, deve essere $\varphi \langle a \rangle = \overline{G}$, e quindi $a = 1$. Pertanto il gruppo $F(G_1/R)$ unione di tutti i sottogruppi minimi di G_1/R è dualmente isomorfo attraverso φ ad $\overline{R}/\Phi(\overline{R})$, $\Phi(\overline{R})$ il gruppo di Frattini di $\overline{R}$ ([4], prop. V), sicchè $\overline{R}/\Phi(\overline{R})$ è metabeliano a sottogruppi di Sylow finiti [3]. Posto $L/R = F(G_1/R)$, risulta L normale in G_1, $\varphi(L) = \Phi(\overline{R})$ e $L \leq (G_1)_*$; sia $(G_1)_*/L = A \neq \{1\}$. φ induce un r-omomorfismo duale completo φ_1 tra A e $\Phi(\overline{R})$ con $A_* = A$; A è un gruppo localmente finito ed ha i suoi sottogruppi di Sylow di tipo C_{p^α}; il derivato A' è un sottogruppo abeliano e di Hall in A [5], ed A' ha un complemento C in A, essendo A un gruppo numerabile. Supponiamo che A' abbia una componente primaria A'_p di tipo C_{p^∞}; scriviamo $A = (A'_p \times B)\, C$ con $A'_p \times B = A'$. Dato che A'_p è un sottogruppo normale di A di tipo C_{p^∞}, si vede facilmente che l'intervallo $[CB, A]$ non ha elementi massimali. Da $BC \neq A_*$ segue $\varphi_1(BC) \neq \{1\}$; scelto in esso un gruppo minimo $\overline{F}$, se $\varphi_1(F) = \overline{F}$, il gruppo F^* è un sottogruppo massimo di A, data la completezza di φ_1 ed il fatto che $A_* = A$; ma $F^* \geq BC$, cosa assurda. Tenuto presente che pure sul gruppo abeliano A/A' φ_1 induce un r-omomorfismo duale su un altro gruppo, e tenuto conto della prop. 2, si conclude che A è localmente finito con i sottogruppi di Sylow tutti ciclici (finiti). Sia $\varphi_1(H) = \overline{H} \leq \Phi(\overline{R})$ un p-gruppo ciclico; allora H^* ha indice finito in A perchè altrimenti $\overline{H}$ sarebbe contenuto in almeno due sottogruppi massimi distinti di A data la struttura di A, il che però non è possibile. Ne consegue che per ogni sottogruppo $\overline{F}$ di $\Phi(\overline{R})$ finitamente generato, esiste un sottogruppo normale N di A di indice finito in A con $\varphi_1(N) = \overline{N} \geq \overline{F}$. Tenuto conto del teorema 2 di [4], è facile concludere che $\Phi(\overline{R})$ è metabeliano a sottogruppi di Sylow finiti. Pertanto $\overline{G}$ stesso è risolubile a sottogruppi di Sylow finiti. Poichè ogni sottogruppo di $\overline{G}$ è contenuto in un sottogruppo massimo, e tenuto conto che due sottogruppi di Sylow di $\overline{G}$ relativi allo stesso primo p sono coniugati, il gruppo di Frattini $\Phi(\overline{G})$ è un gruppo a sottogruppi di Sylow normali (e di ordini finiti). Tenuto presente la struttura di $\overline{G}/\Phi(\overline{G})$ [3] si conclude che $\overline{G}$ è un prodotto diretto di sottogruppi $\overline{H}$ di Hall, con $\overline{H}$ o un p-gruppo finito oppure un gruppo finito il cui ordine è del tipo $p^\alpha q^\beta$. Ciò conclude la dimostrazione.

Al fine di determinare con esattezza la struttura di $\overline{G}$, premettiamo la seguente

PROP. 4. *Sia ψ un r-omomorfismo completo di un gruppo G su un reticolo finito L e supponiamo che il nucleo inferiore di ψ sia il gruppo identico. Allora G_* è finito.*

DIM. G è un gruppo periodico: infatti sia $K = \langle a \rangle$ un suo sottogruppo ciclico d'ordine infinito. Essendo $\psi(K) = k \neq 0$, sarà $K_* \neq \{1\}$. Se p_1, p_2 sono due numeri primi distinti si ha $K_*^{p_1} \vee K_*^{p_2} = K_*$ e quindi pure $\psi(K_*^{p_1}) \vee \psi(K_*^{p_2}) = k$ mentre $\psi(K_*^{p_i}) \lneqq k$. Da qui segue che $\psi(K_*^{p_i}) \neq \psi(K_*^{p_2})$, per cui il reticolo L verrebbe a contenere infiniti elementi, che è contro l'ipotesi.

Usiamo ora induzione sulla lunghezza n del reticolo L, osservando che il teorema è banale se $n = 0$. Sia dunque $n > 0$ e sia k un elemento coperto da I in L; per ipotesi induttiva esiste un sottogruppo finito K di G con $\psi(K) = k$. Dato che L è finito, il sottogruppo G_* ha solo un numero finito di sottogruppi massimi, per cui tali gruppi hanno tutti indice finito in G_*; sia M il sottogruppo massimo di G_* con $\psi(M) = k$. È M_* finito e normale in M, pertanto l'insieme normale X unione insiemistica di tutti i coniugati di M_* in G_* è finito, dunque esso genera un gruppo normale finito N di G. Ora per $a \notin M$ si ha

$$I = \psi(G_*) = \psi\langle a, M\rangle = \psi\langle a\rangle \vee \psi(M_*) \leq \psi\langle a\rangle \vee \psi(N) = \psi\langle a, N\rangle$$

e $\langle a, N\rangle$ è finito.

PROP. 5. *Dato un gruppo G, esiste un r-omomorfismo duale completo di un gruppo localmente finito G su $\overline{G}$ se e solo se $\overline{G}$ è un prodotto diretto (discreto) di un insieme $\{\overline{H}_i\}$ di gruppi finiti a due a due con gli ordini primi tra loro, ciascun gruppo essendo o un p-gruppo modulare non hamiltoniano, oppure un P-gruppo non abeliano.*

DIM. Necessità. In virtù delle prop. 3 e 4, $\overline{H}_i$ è l'immagine r-omomorfa duale di un gruppo finito. Pertanto per il teorema 2 in [4], $\overline{H}_i$ ha la detta struttura. Sufficienza. Risulta $L(G) = \prod_i L(\overline{H}_i)$ ([2], ch. I, th. 4) ed $L(\overline{H}_i)$ è autoduale ([2], ch. IV th. 5), donde la conclusione.

Sia G un gruppo localmente finito; nel seguito con $L_f(G)$ denoteremo il sottoreticolo di $L(G)$ formato da tutti e soli i sottogruppi finiti di G.

Prop. 6. *Siano G e $\overline{G}$ due gruppi localmente finiti e ψ un omomorfismo di $L_f(G)$ su $L_f(\overline{G})$. Allora esiste uno ed un solo r-omomorfismo completo ψ_1 di G su $\overline{G}$ che estende ψ.*

DIM. Giacchè un r-omomorfismo completo ψ_1 è determinato dalle immagini sotto ψ_1 dei sottogruppi ciclici di G, l'unicità di ψ_1 resta stabilita.

Passiamo a provare l'esistenza di ψ_1. Poniamo per $H \leq G$, $\psi_1(H) = \bigcup_{a \in H} \psi\langle a \rangle$, unione insiemistica di tutti i gruppi ciclici $\psi\langle a \rangle$.

α) Se H è un sottogruppo finito di G, $\psi_1(H) = \psi(H)$.

Sia $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$; allora $\psi_1(H) = \bigcup_i \psi\langle h_i \rangle$, sicchè $\psi_1(H) \subseteq \subseteq \bigvee_i \psi\langle h_i \rangle = \psi(\bigvee_i \langle h_i \rangle) = \psi(H)$. Scelto $h' \in \psi(H)$ si consideri $\langle h' \rangle \leq \psi(H)$. Ora in H esiste un gruppo ciclico $\langle h_j \rangle$ con $\psi\langle h_j \rangle = = \langle h' \rangle$ ([2] ch. III, th. 15), dunque $h' \in \psi\langle h_j \rangle$, sicchè $h' \in \psi_1(H)$. Pertanto è anche $\psi_1(H) \supseteq \psi(H)$ e dunque $\psi_1(H) = \psi(H)$.

β) ψ_1 è un'applicazione di $L(G)$ su tutto $L(\overline{G})$ che estende la ψ.

Da α) consegue facilmente che se $H \leq G$, allora $\psi_1(H) \leq \overline{G}$. Viceversa sia $\overline{H} \leq \overline{G}$. Sia $h' \in \overline{H}$; $\langle h' \rangle$ è finito, dunque esiste un sottogruppo finito A di G con $\psi(A) = \langle h' \rangle$; ma allora esiste anche un gruppo ciclico $\langle a \rangle \leq A$ tale che $\psi\langle a \rangle = \langle h' \rangle$ ([2], ch. III, th. 15). Pertanto se poniamo $H = \{a \mid a \in G$ e $\psi\langle a \rangle \leq \overline{H}\}$ è $\psi_1(H) = \overline{H}$. Risulta $H \leq G$; infatti per $a, b \in H$ tenuto conto di α) si ha $\psi_1\langle a, b \rangle =$

$= \psi \langle a, b \rangle = \psi \langle a \rangle \vee \psi \langle b \rangle \leq \bar{H}$; ora $a^{-1} b \in \langle a, b \rangle$, dunque $\psi \langle a^{-1} b \rangle \leq H$ e dunque $a^{-1} b \in H$.

γ) ψ_1 è un r-omomorfismo completo di G su $\bar{G}$.

Sia $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una famiglia di sottogruppi di G. Posto $U = \bigvee_\lambda U_\lambda$, $\bar{U} = \psi_1(U)$ proviamo che $\bar{U} = \bigvee_\lambda \psi_1(U_\lambda)$. Sia $\bar{k} \in \bar{U}$; allora esiste un $k \in U$ tale che $\bar{k} \in \psi \langle k \rangle$. Ora $k \in \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ con $u_i \in U_{\lambda_i}$ per cui $\psi \langle h \rangle \leq \psi \langle u_1, \dots, u_n \rangle = \psi \langle u_1 \rangle \vee \dots \vee \psi \langle u_n \rangle = \psi_1 \langle u_1 \rangle \vee \dots \vee \psi_1 \langle u_n \rangle \leq$ $\leq \psi_1(U_1) \vee \dots \vee \psi_1(U_n)$ dunque $\bar{k} \in \psi_1 \langle k \rangle \leq \bigvee_\lambda \psi_1(U_\lambda)$. Viceversa sia $\bar{k} \in \bigvee_\lambda \psi_1(U_\lambda)$; allora $\bar{k} \in \langle \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n \rangle$ con $\bar{u}_i \in \psi_1(U_{\lambda_i})$. Sia $\bar{u}_i \in \psi \langle u_i \rangle$; allora $\bar{k} \in \psi \langle u_1 \dots u_n \rangle = \psi_1 \langle u_1 \dots u_n \rangle \leq \psi_1(U) = \bar{U}$. Dunque $\psi_1(U) =$ $= \bigvee_\lambda \psi_1(U_\lambda)$.

Proviamo ora che posto $I = \bigwedge_\lambda U_\lambda$, $\psi_1(I) = \bar{I}$, risulta $\bar{I} = \bigwedge_\lambda \psi_1(U_\lambda)$. Prendiamo $\bar{k} \in \bar{I}$; allora esiste $k \in I$ con $\bar{k} \in \psi \langle k \rangle$; dunque $k \in U_\lambda$ sicchè $\bar{k} \in \psi_1 \langle k \rangle \leq \psi(U_\lambda)$ per cui $\bar{k} \in \bigwedge_\lambda \psi_1(U_\lambda)$. Viceversa sia $\bar{k} \in \bigwedge_\lambda \psi_1(U_\lambda)$; allora $\bar{k} \in \psi_1(U_\lambda)$ e dunque esiste un $k_\lambda \in U_\lambda$ con $\psi_1 \langle k_\lambda \rangle \ni \bar{k}$. Poniamo $\langle k \rangle = \bigwedge_\lambda \langle k_\lambda \rangle \leq \bigwedge_\lambda U_\lambda$. Giacchè $\langle k_\lambda \rangle$ è finito, esiste un sottoinsieme finito Δ di Λ tale che $\langle k \rangle = \bigwedge_{\lambda \in \Lambda} \langle k_\lambda \rangle = \bigwedge_{\delta \in \Delta} \langle k_\delta \rangle$; ma allora $\psi_1 \langle k \rangle =$ $= \psi \langle k \rangle = \bigwedge_\delta \psi \langle k_\delta \rangle = \bigwedge_\delta \psi_1 \langle k_\delta \rangle \ni \bar{k}$; poichè $k \in I$, ne segue che $\bar{k} \in \bar{I}$. Dunque $\bar{I} = \bigwedge_\lambda \psi_1(U_\lambda)$. ψ_1 è dunque un r-omomorfismo completo di G su $\bar{G}$ che estende ψ per quanto detto in α).

Diamo un'altra proposizione prima di giungere alla dimostrazione del teorema che costituisce lo scopo principale della presente nota.

PROP. 7. *Sia G un gruppo, ψ un r-omomorfismo completo di G sul reticolo L, dove $L = \prod_i L_i$ è il prodotto cartesiano di reticoli non banali in numero maggiore di 1. Allora G è un gruppo periodico e se E è il nucleo inferiore di ψ, G/E è un prodotto diretto (discreto) di sottogruppi di Hall G_i/E con G_i r-omomorfo ad L_i.*

DIM. Sia e_i l'elemento del centro di L di componenti $e_{ij} =$ $= \begin{cases} O_j & \text{se } j \neq i \\ I_i & \text{se } j = i \end{cases}$; l'elemento $\tilde{e}_i$ di componenti $\tilde{e}_{ij} = \begin{cases} I_j & \text{se } j \neq i \\ O_i & \text{se } j = i \end{cases}$ è l'unico complemento di e_i in L. Posto G_i, $\tilde{G}_i$ i massimi sottogruppi di G rispettivamente con $\psi(G_i) = e_i$, $\psi(\tilde{G}_i) = \tilde{e}_i$, risulta

$E \leq G_i$, $\widetilde{G}_i$ e giacchè $\psi(G_i \wedge \widetilde{G}_i) = 0$ è $G_i \wedge \widetilde{G}_i = E$; per di più $\psi(G_i \vee \widetilde{G}_i) = I$. Sia $x \in G_i$; allora $I = \psi(G_i \vee \widetilde{G}) = \psi(G_i \vee x\widetilde{G}_i x^{-1}) = = e_i \vee \psi(x\widetilde{G}_i x^{-1})$; similmente $O = e_i \wedge \psi(xG_i x^{-1})$ dunque $\psi(x G_i x^{-1}) = = \widetilde{e}_i$, per cui $x\widetilde{G}_i x^{-1} \leq \widetilde{G}_i$; ne segue $\mathcal{N}(\widetilde{G}_i) \geq G_i$, similmente $\mathcal{N}(G_i) \geq \widetilde{G}_i$ e dunque $G_i \vee \widetilde{G}_i/E \simeq G_i/E \times \widetilde{G}_i/E$. $G_i \vee \widetilde{G}_i/E$ è periodico; infatti sia $g \in G_i \vee \widetilde{G}_i$ con $g \notin G_i, g \notin \widetilde{G}_i$. Allora $\psi\langle g \rangle = k_i \vee \widetilde{k}_i$ con $O < k_i \leq e_i$, $O < \widetilde{k}_i \leq \widetilde{e}_i$; giacché $\psi(\langle g \rangle \wedge G_i) = k_i, \psi(\langle g \rangle \wedge \widetilde{G}_i) = \widetilde{k}_i$, il gruppo $\{1\} \neq \langle g^s \rangle = (\langle g \rangle \wedge G_i) \vee (\langle g \rangle \wedge \widetilde{G}_i)$ è modulo E un prodotto di due gruppi propri. Giacchè E è periodico ([2] ch. III, th. 5) g^s è di periodo finito con i periodi relativi a G_i e $\widetilde{G}_i$ primi tra loro. Ne segue che $G_i \vee \widetilde{G}_i$ è periodico e il periodo di un elemento di G_i/E è relativamente primo a quello di un elemento di $\widetilde{G}_i/E$. È ora facile concludere che $\bigvee_i G_i/E \simeq \prod_i G_i/E$ e che la restrizione di ψ su $L(G_i)$ è un r-omomorfismo di G_i sull'ideale (e_i) isomorfo ad L_i. Resta da far vedere che $T = \bigvee_i G_i \doteq G$. Sia $g \in G$, $g \notin G$; giacchè $O < \psi\langle g \rangle = \psi\langle g \rangle \wedge I = \psi\langle g \rangle \wedge \psi\langle T \rangle = \psi(\langle g \rangle \wedge T)$, $\langle g \rangle \wedge T$ è un gruppo non identico del gruppo periodico T; dunque g è periodico e con ciò G. Sia $\langle g \rangle \leq\!|\!\leq E$ un p-gruppo. L'ideale generato da $\psi\langle g \rangle$ è allora una catena di lunghezza non nulla; pertanto $\psi\langle g \rangle \leq e_i$ per un $i \in I$ conveniente, dunque $\langle g \rangle \leq G_i$. Da qui si conclude che $T = G$.

TEOREMA. *Sia G un gruppo localmente finito. Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un r-omomorfismo duale completo di G su un gruppo non identico $\overline{G}$, è che G contenga un sottogruppo normale N di Hall con un complemento M, $MN = G$, $M \wedge N = \{1\}$, dove M è un prodotto diretto (discreto) di sottogruppi di Hall H, con H soddisfacente ad una delle seguenti condizioni:*

(i) *H è un gruppo C_{p^α} con $0 < \alpha \leq \infty$, contenente un sottogruppo normale finito di G, e non identico.*

(ii) *H è un gruppo generalizzato dei quaternioni Q_α con $\alpha \leq \infty$, con il sottogruppo d'ordine 2 normale in G.*

(iii) *H è un p-gruppo modulare finito non ciclico nè hamiltoniano, oppure un gruppo dei quaternioni, normale in G.*

(iv) *H è un gruppo finito sopramodulare (UM-gruppo) di ordine $p^n q^m$ ($p > q$ primi, $n > 0$, $m > 0$) con il sottogruppo modulare normale massimo un sottogruppo normale in G.*

DIM. Necessità. Sia ψ un r-omomorfismo duale completo di G su $\overline{G}$, non identico. In virtù della prop. 5, $\overline{G}$ è un prodotto diretto di gruppi finiti $\overline{H}_i$ di Hall, con $\overline{H}_i$ o un p-gruppo modulare non hamiltoniano, oppure un P-gruppo non abeliano. Giacchè $\overline{H}_i$ è autoduale vi esiste un automorfismo duale μ di $L(\overline{G})$ per cui $\varphi = \mu\psi$ è un r-omomorfismo completo di G su $\overline{G}$. Detto E il nucleo inferiore di φ, tenuto conto di th. 4 di ch. I in [2] e della prop. 7, risulta $G/E \simeq \prod\limits_i G_i/E$ con G_i/E un sottogruppo di Hall di G/E e la restrizione di φ su $L(G_i)$ è un r-omomorfismo completo di G_i su $\overline{H}_i$. Il gruppo G_i è localmente finito; per prop. 4 e th. 5, ch. III in [2], si ha che $G = N_i H_i$ dove N_i è un sottogruppo di Hall normale in G_i con $\varphi(N_i) = \{1\}$. Se $\overline{H}_i$ non è ciclico nè un P-gruppo non abeliano, allora $G_i = N_i \times H_i$ ove H_i è un p-gruppo e se non è r-isomorfo ad $\overline{H}_i$ è un gruppo di quaternioni con $H_i/Z(H_i)$ isomorfo ad $\overline{H}_i$. Se H_i è ciclico d'ordine q^γ, H_i è un C_{p^α} con $0 < \gamma \leq \alpha \leq \infty$ che contiene un sottogruppo finito K_i normale in G d'ordine p^β con $0 < \gamma \leq \beta \leq \alpha$, oppure H_i è un gruppo generalizzato dei quaternioni con il centro Z_i normale in G, nel qual caso $\beta = \gamma = 1$. Se $\overline{H}_i$ è P-gruppo d'ordine p^{n+1} o $p^n r$ $(n \geq 1, p > r)$, H_i è un P-gruppo d'ordine p^{n+1} oppure un gruppo dei quaternioni $(n = 1, p = 2)$ oppure un UM-gruppo di ordine $p^n q^m$ $(p > q)$ con il sottogruppo modulare normale massimo normale in G. La necessità ora segue facilmente.

Sufficienza. In virtù di th. 15 ch. III in [2] e la prop. 6, esiste un r-omomorfismo completo di G su un gruppo risolubile $\overline{G}$ con $L(\overline{G})$ autoduale, e dunque pure un r-omomorfismo duale completo di G su $\overline{G}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] SCHENKMAN, E.: *Group theory,* D. van Nostrand C., Inc., Princeton 1965.

[2] SUZUKI, M.: *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups,* Erg. der Math., Springer Verlag, 1967.

[3] ZACHER, G.: *Determination of locally finite groups with duals,* Journal of Algebra, vol. 18, n. 3, 1971.

[4] ZACHER G.: *On lattice dual-homomorphisms between finite groups,* Rend. Sem. Matematico della Università di Padova, vol. 30, 1960.

[5] ZASSENHAUS, H.: *The theory of groups,* Chelsea Publ. C., 1949.