SU UN PROBLEMA DI MINIMALITÀ PER GRUPPI FINITI (*)

di MARIO CURZIO (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *Siano $A, N, N^{(p)}$ le proprietà gruppali rispettivamente dell'abelianità, della nilpotenza, della p-nilpotenza. Un A_2-gruppo finito non risolubile è isomorfo al gruppo alterno U_5, un N_2-gruppo finito semplice è isomorfo a U_5, un $N_2^{(p)}$-gruppo finito è risolubile.*

I risultati precedenti costituiscono una generalizzazione del noto teorema di Iwasawa-Schmidt.

SUMMARY. - *Let be $A, N, N^{(p)}$ group properties of abelianity, of nilpotence and of p-nilpotence respectively. A finite non solvable A_2-group is isomorphic to the alternating group U_5, a finite simple N_2-group is isomorphic to U_5, a finite $N_2^{(p)}$-group is solvable.*

These results form a generalization of the well known theorem of Iwasa-wa-Schmidt.

Un gruppo G dicesi minimale non-P (o P_1-*gruppo*) se, e solo se, essendo P una proprietà gruppale, si ha $G \notin P$, mentre $H \in P$ per ogni sottogruppo proprio $H < G$; un P_2-*gruppo* è per definizione un gruppo minimale non-$(P \cup P_1)$. Un gruppo finito, minimale non abeliano (A_1-*gruppo*) o minimale non nilpotente (N_1-*gruppo*), è risolubile come segue dal teorema di IWASAWA-SCHMIDT ([3] e [6]). Se p è un numero primo, è ben nota (Itô [2]) la risolubilità dei gruppi minimali non p-nilpotenti ($N_1^{(p)}$-*gruppi*).

Nel presente lavoro e sempre con riferimento al caso finito, si dimostra che un N_2-gruppo semplice è isomorfo al gruppo alterno

(*) Pervenuto in Redazione il 19 gennaio 1972.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico dell'Università - Via Mezzocannone 8 - 80134 Napoli.

U_5 e che un A_2-gruppo non semplice è risolubile, inoltre sono risolubili tutti gli $N_2^{(p)}$-gruppi; l'ordine di un N_2-gruppo vale $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ (p, q, r, num. primi). Si spera di poter fornire, in una successiva ricerca, un procedimento atto a costruire gli N_2-gruppi finiti.

1. Si considereranno soltanto gruppi finiti adoperando notazioni e nomenclatura abituali, in particolare si avrà per un gruppo G:

$|G| =$ ordine di G,

$N_G(H) =$ normalizzatore di $H \leq G$,

$H \lhd G =$ sottogruppo normale $H \leq G$,

$\Phi(G) =$ sottogruppo di FRATTINI di G (intersezione dei sottogruppi massimali),

$G_p =$ un p-sottogruppo di SYLOW di G.

Negli sviluppi successivi si farà spesso uso dei risultati seguenti:

1.1. (RÉDEI [5]) *Per un N_1-gruppo G, si ha:*

(a) $|G| = p^m q^n$ *($p \neq q$ num. primi) con $G_p \lhd G$ e G_q ciclico,*

(b) $\Phi(G_p) \cup \Phi(G_q) \leq Z(G)$,

(c) *G_p ha esponente $\leq p^2$, che vale p quando $p > 2$,*

(d) *G è privo di sottogruppi normali di indice p.*

1.2. (RÉDEI [5]) *Se G è un A_1-gruppo d'ordine non potenza di primo, si ha:*

(a) $|G| = p^m q^n$ *($p \neq q$ num. primi) con G_p normale minimale e G_q ciclico,*

(b) $\Phi(G_q) = Z(G)$.

1.3. *Se G è un N_1-gruppo con un sottogruppo di Sylow normale e ciclico, si ha:*

(a) *G è un A_1-gruppo,*

(b) $|G| = pq^n$ *($p > q$ primi) con $G_p \lhd G$.*

DIM. Segue facilmente da 1.1 e da noti teoremi sui gruppi supersolubili.

1.4. *Un N_1-gruppo diedrale ha ordine $2p$ (p primo > 2).*

DIM. Caso particolare di 1.3.

2. Si dimostrerà qui che un N_2-gruppo semplice è isomorfo al gruppo alterno U_5.

2.1. *Il gruppo di Suzuki* $S(2^{2n+1})$ *non è un* N_2-*gruppo.*

Dim. Come ben noto ([7], p. 137) tra i sottogruppi propri di $S(2^{2n+1})$ vi è un gruppo di Frobenius H avente ordine $2^{4n+2}(2^n-1)$ con nucleo N d'ordine 2^{4n+2} ed esponente 4.

Sia per assurdo $S(2^{2n+1})$ un N_2 gruppo. Allora H è un N_1-gruppo e, essendo N un sottogruppo di Sylow normale, H ammette (cfr. 1.1) un sottogruppo di Sylow K d'ordine 2^n-1 con normalizzatore $N_H(K)$ nilpotente e più ampio di K, ciò contro il significato di N.

2.2. *Il gruppo lineare* $PSL(2, 2^n)$ *è un* N_2-*gruppo se, e solo se,* $n=2$.

Dim. $PSL(2,4)$ è chiaramente un N_2-gruppo.

Viceversa, sia $PSL(2,2^n)$ un N_2-gruppo. Esiste ([1], p. 213) un sottogruppo diedrale H d'ordine $2(2^n+1)$ e quindi non nilpotente, allora H è un N_1-gruppo e pertanto (cfr. 1.4) 2^n+1 è un primo di Gauss; ne segue $n=2^m$. Non può essere $m=0$ giacché $PSL(2,2)$ non è N_2-gruppo; del pari non si ha $m>1$ altrimenti ([1], p. 213) esisterebbe in $PSL(2,2^n)$ un sottogruppo proprio isomorfo a $PSL(2,4)$ e perciò né nilpotente né N_1-gruppo. Dopo di ciò: $m=1$ ed $n=2$.

2.3. *Sia* p *un primo dispari.* $PSL(2,p^n)$ *è un* N_2-*gruppo se, e solo se,* $p=5$ *ed* $n=1$.

Dim. $PSL(2,5)$ è un N_2-gruppo in quanto isomorfo a $PSL(2,4)$.

Viceversa, sia $PSL(2,p^n)$ un N_2-gruppo. Esistono dei sottogruppi diedrali H_1 ed H_2 di ordini rispettivi p^n-1 e p^n+1 ([1], p. 213) e, se $p^{2n}\equiv 1\ (16)$, $PSL(2,p^n)$ ammette un sottogruppo proprio isomorfo al gruppo simmetrico S_4 (cfr. [1], p. 213); ma S_4 non è né nilpotente né N_1-gruppo, onde $p^{2n}-1\not\equiv 0\ (16)$.

Posto per comodità

$$k_1=\frac{1}{2}(p^n-1) \quad \text{e} \quad k_2=\frac{1}{2}(p^n+1)$$

si distinguano i casi seguenti.

(a) H_1 e H_2 sono N_1-gruppi.

I numeri k_1 e k_2 sono primi dispari (cfr. 1.4) e così $p^n = k_1 + k_2$ è pari contro l'ipotesi $p > 2$.

(b) H_1 è nilpotente.

Un gruppo diedrale e nilpotente ha ordine potenza di 2, onde H_1 è un 2-gruppo e pertanto $k_1 = 2^m$. Si ha allora $k_1 = 1$ o $k_1 = 2$ perché si è già osservato che $p^{2n} - 1 \not\equiv 0$ (16), quindi risulta $p^n - 1 = 2$ o $p^n - 1 = 4$, ossia $n = 1$ e p vale 3 oppure 5. Non può essere $p = 3$ ed $n = 1$ in quanto $PSL(2, 3)$ non è un N_2-gruppo; dopo di ciò: $n = 1$ e $p = 5$ come volevasi.

(c) H_2 è nilpotente.

Ragionando come per il caso (b), si perviene ancora ad un assurdo. Deve essere $p^n = 1$ o $p^n = 3$.

2.4. *$PSL(3, 3)$ non è un N_2-gruppo.*

Dim. Si sa (cfr. ad es. [4], p. 376) che $PSL(3,3)$ possiede un sottogruppo di Klein H con normalizzatore $N(H)$ d'ordine $2^3 \cdot 3$ e non nilpotente; $|N(H)/H| = 6$ e perciò esiste un sottogruppo $K \lhd N(H)$ e d'ordine $2^2 \cdot 3$.

Sia per assurdo $PSL(3, 3)$ un N_2-gruppo e quindi $N(H)$ un N_1-gruppo. $N(H)$ non è a 2-sottogruppi di Sylow ciclici, onde (cfr. 1.1) risulta 3-nilpotente e privo di sottogruppi di indice 2 contro l'essere $|N(H)/K| = 2$.

Si è finalmente in grado di ottenere quanto appresso.

Teor. 2.5. *Un N_2-gruppo semplice è isomorfo al gruppo alterno U_5.*

Dim. I sottogruppi propri di un N_2-gruppo sono risolubili e quindi un N_2-gruppo semplice G è di uno dei tipi (Thompson [8]): $G \simeq S(2^n)$ con n primo > 2, $G \simeq PSL(2, 2^n)$ con n primo, $G \simeq PSL(2, 3^n)$ con n primo > 2, $G \simeq PSL(2, p)$ con p primo > 3 e $p^2 - 1 \not\equiv 0$ (5), $G \simeq PSL(3, 3)$.

A causa delle proposizioni 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, si ha:

$$G \simeq PSL(2, 4) \simeq PSL(2, 5) \simeq U_5 .$$

Teor. 2.6. *Un N_2-gruppo G ha ordine $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ (p, q, r primi).*

Dim. Sia G risolubile e si consideri un sottogruppo $H \neq G$ non nilpotente. Si ha (cfr. 1.1) $|H| = p^\alpha q^\beta$ ($p \neq q$ primi) ed inoltre

H è massimale [1], la risolubilità di G assicura infine che H è di indice r^γ (r primo).

Sia G non risolubile. Se G è semplice l'asserto segue dai TEOR. 2.5, si proceda per induzione su $|G|$, supponendo quindi G non semplice. Un sottogruppo normale minimale H di G è risolubile e perciò $|H| = p^n$ (p primo), H non può essere di SYLOW altrimenti (teor. di SCHUR) esisterebbe p-complemento di SYLOW risolubile perché o nilpotente o N_1-gruppo, ciò contro la non risolubilità di G. Riconosciuto che H non è di SYLOW e, valendo per G/H il teorema da dimostrare, si ottiene $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$.

TEOR. 2.7. *Un $N_2^{(p)}$-gruppo è risolubile.*

DIM. Un $N_1^{(p)}$-gruppo è minimale non nilpotente (ITÔ [2]) e pertanto, per un $N_2^{(p)}$-gruppo G, si ha $G \in N_1$ oppure $G \in N_2$. Ma G non può essere semplice perché si avrebbe $G \simeq U_5$ (TEOR. 2.5) mentre $U_5 \notin N_2^{(p)}$ per ogni primo p. Da ciò segue facilmente la risolubilità di G.

3. Dai risultati precedenti discendono alcune considerazioni sugli A_2-gruppi.

3.1. *Un A_2-gruppo semplice è isomorfo ad U_5.*

DIM. Sia G un A_2-gruppo. Se ogni sottogruppo proprio non abeliano ha ordine potenza di primo, si ha $G \in N_1$. Se esiste invece qualche $H < G$ non p-gruppo, G risulta un N_2-gruppo; allora, tenuto conto del teorema di IWASAWA-SCHMIDT e del TEOR. 2.5, un A_2-gruppo semplice è isomorfo ad U_5.

3.2. *Un A_2-gruppo ha ordine $p^\alpha q^\beta r^\gamma$ (p, q, r primi).*

DIM. Ovvia, in quanto un A_2-gruppo appartiene o ad N_1 o ad N_2.

TEOR. 3.3. *Un A_2-gruppo non semplice è risolubile.*

DIM. Negando la tesi, G abbia ordine minimo tra gli A_2-gruppi non semplici e non risolubili. Un sottogruppo normale minimale H

[1] Se fosse $G > K > H$ per qualche sottogruppo proprio K, risulterebbe K né nilpotente né N_1-gruppo.

ha ordine p^{α} (p primo) e p divide (²) $|G/H|$. Il quoziente G/H è un A_2-gruppo non risolubile (³) e, per l'ipotesi fatta su G, risulta semplice e quindi (cfr. 3.1) isomorfo ad U_5. Si distinguano ora i casi seguenti.

(*a*) $p = 2$.

G/H ha un sottogruppo $K/H \simeq U_4$ e pertanto $|K| = 2^{\alpha+2} \cdot 3$. Il 2-sottogruppo di SYLOW di K è normale ed inoltre $H \triangleleft K$ ha ordine 2, sicché (cfr. 1.2) K non può essere un A_1-gruppo (⁴). Allora K risulta abeliano contro il fatto che non lo è $K/H \simeq U_4$.

(*b*) $p = 3$.

G/H ha un sottogruppo diedrale K/H d'ordine 10 e così $|K| = 3^{\alpha} \cdot 5 \cdot 2$, onde (cfr. 1.2) K è abeliano in contrasto con l'essere K/H non abeliano.

(*c*) $p = 5$.

G/H ha un sottogruppo $K/H \simeq U_4$ e quindi $|K| = 5^{\alpha} \cdot 3 \cdot 2^2$, onde K è abeliano (cfr. 1.2) e si perviene ancora ad un assurdo.

(²) Ragionare come nella dim. del Teor. 2.6.

(³) Un sottogruppo proprio di G/H o è abeliano o A_1-gruppo. Non può essere G/H un A_1-gruppo altrimenti G sarebbe risolubile.

(⁴) Un sottogruppo di SYLOW normale di un A_1-gruppo non p-gruppo, è normale minimale (cfr. 1.2).

BIBLIOGRAFIA

[1] B. HUPPERT - *Endliche Gruppen I,* Springer, Berlin (1967).

[2] N. ITÔ - *Note on (LM)-groups of finite order,* Kodai Math. Seminar report (1951), p. 1-6.

[3] K. IWASAWA - *Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind,* Proc. Phys. Math. Soc. Japan 23 (1941) p. 1-4.

[4] C. METELLI - *I gruppi semplici minimali sono individuati reticolarmente in senso stretto,* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, 45 (1971), p. 367-378.

[5] L. RÉDEI - *Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen,* Publ. Math. Debrecen 4 (1956), p. 303-324.

[6] O. SCHMIDT - *Gruppi finiti a sottogruppi propri nilpotenti* (in russo), Math. Sbornik 31 (1924), p. 366-372.

[7] M. SUZUKI - *On a class of doubly transitive groups,* Annals of Math. 75 (1962), p. 105-145.

[8] J. THOMPSON - *Non solvable finite groups all whose local subgroups are solvable,* Bull. Ann. Math. Soc. 74 (1968), p. 383-437.