SU UNA CARATTERIZZAZIONE DELLE MISURE σ-FINITE (*)

di ALESSIO VOLČIČ (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si caratterizzano le misure σ-finite (definite su una σ-algebra $\mathcal{A}$) mediante la validità del teorema di Radon-Nikodym su dei sottospazi.*

SUMMARY. - *The σ-finite measures (defined on a σ-algebra $\mathcal{A}$) are characterized by means of the validity of the Radon-Nikodym theorem on subspaces.*

In questa breve nota si caratterizzano le misure σ-finite nella categoria delle misure semifinite (1) e definite su una σ-algebra di insiemi $\mathcal{A}$ (2). A questa caratterizzazione si perviene attraverso una condizione (proprietà α) riguardante la validità del teorema di Radon-Nikodym su dei sottospazi dello spazio mensurale assegnato $(S, \mathcal{A}, \mu)$.

DEFINIZIONE. *Sia S lo spazio ambiente, $\mathcal{A}$ una σ-algebra di insiemi di S; diremo che la misura μ (definita sulla σ-algebra $\mathcal{A}$) gode delle proprietà α se e solo se, per ogni misura φ, definita su una sotto σ-algebra di $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$) che contiene tutti gli insiemi μ-sommabili e assolutamente continua rispetto alla restrizione di μ su $\mathcal{A}^*$ (cioè $\varphi(E) = 0$ per ogni $E \in \mathcal{A}^*$ tale che $\mu(E) = 0$) esiste una funzione f $(S, \mathcal{A}^*)$-misurabile, tale che*

$$\varphi(E) = \int_E f d\mu, \quad \forall E \in \mathcal{A}^*.$$

(*) Pervenuto in Redazione il 15 novembre 1971.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

(1) Una misura μ si dice semifinita (vedi [B]), se accade che $\mu(E) = \sup\{\mu(F), \mu(F) < +\infty, F \subset E\}$.

(2) La caratterizzazione si riferisce quindi, nel linguaggio di P. R. Halmos, alle misure totalmente σ-finite.

Osserviamo che, se la μ è σ-finita, allora essa gode della proprietà α. Infatti, contenendo $\mathscr{A}^*$ tutti gli insiemi μ-sommabili, la μ è σ-finita anche su $(S, \mathscr{A}^*)$ e vale quindi il teorema di Radon-Nikodym (3).

Il nostro scopo è quello di invertire questa affermazione, di provare, cioè, che ogni misura che gode della proprietà α è σ-finita.

Premettiamo due lemmi.

LEMMA 1. *Sia $\mathscr{A}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di S ed $\mathscr{I}$ un suo σ-ideale* (4). *Allora la famiglia $\mathscr{A}^*$ di insiemi così definita:*

$$A \in \mathscr{A}^* \Longleftrightarrow A \in \mathscr{I} \quad \textit{oppure} \quad \complement A \in \mathscr{I}$$

è una σ-algebra.

a) Siano, infatti, $A_1, A_2, \in \mathscr{A}^*$. Se $A_1, A_2 \in \mathscr{I}$, allora $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{I} \subset \mathscr{A}^*$. Se invece uno almeno dei due insiemi è tale che il suo complementare appartiene ad $\mathscr{I}$, allora è subito visto che l'insieme

$$\complement (A_1 \cup A_2) = \complement A_1 \cap \complement A_2$$

è intersezione di un insieme di $\mathscr{I}$ con un insieme di $\mathscr{A}$ e quindi (confronta la nota 4) appartiene ad $\mathscr{I}$ e perciò $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{A}^*$.

b) Proviamo che appartiene ad $\mathscr{A}$ anche $A_1 - A_2$. Si ha:

$$A_1 - A_2 = A_1 \cap \complement A_2$$

Se $A_1 \in \mathscr{I}$, allora $A_1 - A_2 \in \mathscr{I} \subset \mathscr{A}^*$. Se $\complement A_2 \in \mathscr{I}$ si ha ancora $A_1 \cap \complement A_2 \subset \mathscr{I} \in \mathscr{A}^*$. Resta il caso che $\complement A_1 \in \mathscr{I}$ e $A_2 \in \mathscr{I}$ ma allora

$$\complement (A_1 \cap \complement A_2) = \complement A_1 \cup A_2 \in \mathscr{I}.$$

c) Poiché $A_1 \cap A_2 = A_1 \cup A_2 - [(A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1)]$, si ha anche che se $A_1, A_2 \in \mathscr{A}^*$ allora $A_1 \cap A_2 \in A^*$.

d) Poiché $\emptyset \in \mathscr{I}$, si ha che $S \in \mathscr{A}^*$.

e) Proviamo infine che, se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi di $\mathscr{A}^*$, allora $\bigcup_N A_n$ appartiene ad $\mathscr{A}^*$.

(3) Si veda ad esempio [H] § 31, teorema B.

(4) Sia $\mathscr{I}$ un σ-anello di insiemi appartenenti ad $\mathscr{A}$, tale che $I \cap A \in \mathscr{I}$; $\forall I \in \mathscr{I}, \forall A \in \mathscr{A}$. Si noti che se $I \in \mathscr{I}$ ed $A \in \mathscr{A}$, $A \subset I$, allora $A \in \mathscr{I}$.

Se $A_n \in \mathcal{I}$, $\forall\, n \in N$, allora ovviamente $\bigcup_N A_n \in \mathcal{I} \subset \mathcal{A}^*$.

Se invece esiste almeno un indice n_0 tale che $\complement A_{n_0} \in \mathcal{I}$, allora $\complement (\bigcup_N A_n) = \bigcap_N \complement A_n = \complement A_{n_0} \cap \bigcap_{N'} \complement A_n$ (dove $N' = N - \{n_0\}$) risulta essere intersezione di un insieme di $\mathcal{I}$ con un insieme di $\mathcal{A}$ quindi appartiene ad $\mathcal{I}$ e perciò il suo complementare appartiene ad $\mathcal{A}^*$.

OSSERVAZIONE. *Se* $\mathcal{I} = \mathcal{A}$, *si ha che* $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, *in generale invece la σ-algebra può essere propriamente contenuta in* $\mathcal{A}$.

LEMMA 2. *Sia* $(S, \mathcal{A})$ *uno spazio misurabile qualunque ed* $\mathcal{I}$ *un qualunque σ-ideale proprio della σ-algebra* $\mathcal{A}$. *Sia* $\mathcal{A}^*$ *come definito nel lemma precedente e sia* φ *la funzione di figura così definita su* $\mathcal{A}^*$:

$$\varphi(A) = \begin{cases} 0 & se\ A \in \mathcal{I} \\ 1 & se\ \complement A \in \mathcal{I}. \end{cases}$$

Allora φ *è una misura su* $(S, \mathcal{A})$.

Intanto, ovviamente, si ha che $\varphi(\emptyset) = 0$.

La dimostrazione si consegue non appena si provi la numerabile additività della φ. Ma se $\{A_n\}$ è una successione di insiemi a due a due disgiunti di $\mathcal{A}^*$, soltanto due casi possono verificarsi:

a) $A_n \in \mathcal{I}$, $\forall n \in N$;

b) al più uno degli A_n è tale che $\complement A_n \in \mathcal{I}$.

Siano infatti A_n, A_m tali che $\complement A_n \in \mathcal{I}$ e $A_n \cap A_m = \emptyset$. Ciò implica che $A_m \subset \complement A_n$ e quindi $A_m \in \mathcal{I}$ (vedi nota 4).

È ora facile verificare la numerabile additività della φ: nel caso *a*) si ha che

$$0 = \varphi(\bigcup_N A_n) = \sum_N \varphi(A_n) = 0$$

e nel caso *b*)

$$1 = \varphi(\bigcup_N A_n) = \sum_N \varphi(A_n) = 1.$$

Per provare il teorema che caratterizza le misure σ-finite mediante la proprietà α, dobbiamo premettere ancora la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE. *Sia* $(S, \mathcal{A}, \mu)$ *un qualunque spazio mensurale e* φ *una misura su* $(S, \mathcal{A})$ *semifinita e non identicamente nulla. Valga* *inoltre la seguente proprietà* [5] :

$$\varphi(E) > 0 \Longrightarrow \mu(E) = +\infty, \ \forall E \in \mathscr{A}.$$

Allora la φ *non è un integrale della* μ.

Facciamo la dimostrazione per assurdo. Supponiamo che esista una funzione $(S, \mathscr{A})$-misurabile f tale che

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu, \qquad \forall E \in \mathscr{A}.$$

Sia $A \in \mathscr{A}$ tale che $0 < \varphi(A) < +\infty$ [6].

Per una nota proprietà (vedi [H], § 25, teorema F) l'insieme $A^* = A \cap \{x : f(x) > 0\}$ ha misura μ σ-finita. Esiste quindi una successione di insiemi $\{A_n\}$ tale che $\mu(A_n) < +\infty$, $\forall n \in N$ e $\bigcup_N A_n = A^*$.

Si avrà, per almeno un indice n, che $\varphi(A_n) > 0$, ma questo contraddice l'ipotesi. Ne segue la tesi.

Siamo ora in grado di provare il teorema annunciato nell'introduzione.

TEOREMA. *Se* μ *è una misura semifinita, definita su* $(S, \mathscr{A})$, *allora le due proprietà seguenti sono equivalenti* :

(a) μ *è* σ-*finita*

(b) μ *gode della proprietà* α.

(a) $\Longrightarrow$ (b). Banale, come si è già visto nella introduzione.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Supponiamo per assurdo che la μ non sia σ-finita. Sia $\mathcal{I}$ il σ-ideale degli insiemi aventi misura μ σ-finita e siano $\mathscr{A}^*$ e φ definiti come nei lemmi 1 e 2. Dall'ipotesi fatta sulla μ segue che $\mathcal{I} \underset{\neq}{\subset} \mathscr{A}$.

Se $E \in \mathscr{A}^*$ e $\varphi(E) > 0$, allora $E \notin \mathcal{I}$ e quindi $\mu(E) = +\infty$. La φ verifica quindi le proprietà della proposizione precedente, quindi non è un integrale della μ e quindi non è verificata la proprietà α. Da ciò segue la tesi.

(5) Questa proprietà è strettamente legata al concetto di quasi-singolarità introdotto recentemente (vedi [V]). Si noti che la proprietà enunciata implica la assoluta continuità della φ rispetto alla μ.

(6) Un tale insieme esiste per la semifinitezza della φ (vedi nota 1).

BIBLIOGRAFIA

[B] BERBERIAN, S. K. *Measure and integration,* Macmillan. Collier-Macmillan (1965).

[H] HALMOS, P. R. *Measure theory,* Van Nostrand (1951).

[V] VOLČIČ, A. *Su un teorema di decomposizione per misure localizzabili,* presentato al IX Congresso dell' U. M. I. (di prossima pubblicazione).