# FORMULE DI MAGGIORAZIONE PER TALUNI INVARIANTI ORTOGONALI CONNESSI CON IL CALCOLO RIGOROSO DEGLI AUTOVALORI DI UN PROBLEMA AI LIMITI (*)

di MARIA PIA COLAUTTI (a Palermo) (**)

SOMMARIO. - *Si espone un metodo per l'approssimazione per eccesso di taluni invarianti ortogonali connessi con un problema di autovalori per un'equazione differenziale del secondo ordine. Vengono dati due procedimenti alternativi per costruire le funzioni approssimanti, richieste dal metodo.*

SUMMARY. - *A method for the upper approximation of orthogonal invariants connected with an eigenvalue problem for a second order differential equation is expounded. Two alternative procedures for the construction of the approximating functions, required by the method, are given.*

Si consideri il seguente problema di autovalori per un problema ai limiti relativo ad un operatore differenziale lineare ordinario, autoaggiunto, del secondo ordine:

(1) $$E(u) + \lambda u = 0, \;\; u(0) = u(1) = 0,$$

dove $E(u)$ è l'operatore così definito:

$$E(u) \equiv \frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{du}{dx}\right] - c(x)\,u$$

e $\theta(x)$ e $c(x)$ sono funzioni reali di variabile reale appartenenti rispettivamente a $\mathcal{C}^{(1)}[0,1]$ ed a $\mathcal{C}^{(0)}[0,1]$ e che supporremo verificare

(*) Pervenuto in Redazione il 6 ottobre 1971.
(**) Indirizzo dell'Autore: Facoltà di Ingegneria dell'Università — 90128 Palermo

le condizioni $\theta(x) > 0$, $c(x) \geq 0$, in $[0, 1]$. In tali ipotesi, gli autovalori del problema (1) costituiscono una successione non decrescente $\{\lambda_k\}$ di numeri positivi, divergente positivamente.

Sia $G(x, \xi)$ la funzione di Green del problema $E(u) + f = 0$, $u(0) = u(1) = 0$ e $\Gamma$ l'operatore così definito:

$$\Gamma f = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Sia inoltre:

$$G^{(1)}(x, \xi) = G(x, \xi), \quad G^{(n)}(x, \xi) = \int_0^1 G(x, t)\, G^{(n-1)}(t, \xi)\, dt \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Si ponga (cfr. [2], [3]):

$$\mathcal{J}_1^n(\Gamma) = \int_0^1 G^{(n)}(x, x)\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Sia $\{w_k\}$ un sistema di funzioni, appartenenti a $\mathcal{C}^{(2)}[0, 1]$, linearmente indipendenti in $[0, 1]$, nulle agli estremi e tali che $\{E(w_k)\}$ sia completo in $\mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$. Per ogni fissato intero $\nu > 0$, siano $\lambda_1^{(\nu)} \leq \lambda_2^{(\nu)} \leq \ldots \leq \lambda_\nu^{(\nu)}$ le soluzioni dell'equazione secolare:

$$\det \left\{ \int_0^1 w_h\, E(w_k)\, dx + \lambda \int_0^1 w_h\, w_k\, dx \right\} = 0 \quad (h, k = 1, \ldots, \nu).$$

Supposto fissato l'intero $n$, sia

$$\tau_k^{(\nu)} = \left\{ \mathcal{J}_1^n(\Gamma) - \sum_{h=1}^{\nu} \frac{1}{[\lambda_h^{(\nu)}]^n} + \frac{1}{[\lambda_k^{(\nu)}]^n} \right\}^{-\frac{1}{n}}.$$

Si ha:

$$\tau_k^{(\nu)} \leq \tau_k^{(\nu+1)} \leq \lambda_k \leq \lambda_k^{(\nu+1)} \leq \lambda_k^{(\nu)} \tag{2}$$

ed inoltre: $\lim\limits_{\nu \to \infty} \tau_k^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu \to \infty} \lambda_k^{(\nu)} = \lambda_k$ (cfr. [10]; [2], pp. 139-163; [8], pp. 357-365; [1]).

Il calcolo dei valori $\tau_k^{(\nu)}$, approssimanti $\lambda_k$ per difetto, è così ricondotto al calcolo di $\mathcal{J}_1^n(\Gamma)$, per almeno un valore di $n$. Solo in casi particolari la funzione $G(x, \xi)$ è nota esplicitamente. In generale, affinché le (2) conservino la loro validità, si dovrà cercare di approssimare $\mathcal{J}_1^n(\Gamma)$ con dei valori per eccesso.

Tale problema di approssimazione per eccesso è stato risoluto, nel caso di problemi al contorno per equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, nei lavori [2], [3], [4], [5].

Nella presente Nota viene indicato un procedimento, indipendente da quelli esposti nei lavori testè citati, il quale, traendo partito dalla particolarità del problema qui considerato, permette — in modo abbastanza semplice — di approssimare per eccesso, tanto quanto si vuole, la quantità $\mathcal{J}_1^n(\Gamma)$. Quantunque il procedimento che qui verrà indicato possa applicarsi qualunque sia il valore di $n$, saranno esplicitamente considerati soltanto i casi $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$.

## 1. Maggiorazione della soluzione del problema di Cauchy per l'equazione $E(u) = f$.

Siano $a$ e $b$ assegnati numeri reali ed $f$ una funzione di $\mathcal{L}^{(2)}(0,1)$. Si consideri il problema di Cauchy:

$$E(u) = f, \quad u(0) = a, \quad u'(0) = b. \tag{3}$$

Proviamo che:

I. *Se $u$ è la soluzione del problema* (3), *sussiste la seguente formula di maggiorazione*:

$$\max_{[0,1]} |u(x)| \leq e^M \max_{[0,1]} \left| a + b\,\theta(0) \int_0^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} + \int_0^x f(t) \left( \int_t^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} \right) dt \right| \tag{4}$$

*essendo*

$$M = \max_{[0,1]} |c(x)| \int_0^1 \frac{d\xi}{\theta(\xi)}. \tag{5}$$

Procedendo in modo classico, il problema (3) si può tradurre in equazione integrale del tipo di Volterra (cfr. [9], pp. 596-597). Infatti, integrando tra 0 e $x$ i due membri dell'equazione $E(u) = f$, si trova:

$$\theta(x)\frac{du}{dx} - \theta(0)\, b = \int_0^x [f(\xi) + c(\xi)\, u(\xi)]\, d\xi$$

e quindi:

$$u(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta(t)}\left\{\int_0^t [f(\xi) + c(\xi)\, u(\xi)]\, d\xi\right\} dt + b\,\theta(0)\int_0^x \frac{dt}{\theta(t)} + a.$$

Posto $\alpha(t, x) = \int_x^t \frac{d\xi}{\theta(\xi)}$, integrando per parti si ha:

$$u(x) = \left[\alpha(t, x)\int_0^t [f(\xi) + c(\xi)\, u(\xi)]\, d\xi\right]_0^x -$$

$$- \int_0^x \alpha(t, x)\,[f(t) + c(t)\, u(t)]\, dt - b\theta(0)\,\alpha(0, x) + a =$$

$$= -\int_0^x \alpha(t, x)\, c(t)\, u(t)\, dt + a - b\theta(0)\,\alpha(0, x) - \int_0^x \alpha(t, x) f(t)\, dt.$$

L'equazione integrale che traduce il problema (3) è pertanto la seguente:

$$u(x) = \int_0^x K(x, t)\, u(t)\, dt + g(x) \tag{6}$$

con

$$K(x, t) = c(t)\int_t^x \frac{d\tau}{\theta(\tau)} \tag{7}$$

$$g(x) = a + b\theta(0)\int_0^x \frac{d\tau}{\theta(\tau)} + \int_0^x f(\tau)\left(\int_\tau^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)}\right) d\tau. \tag{8}$$

Applicando alla (6) il classico metodo delle approssimazioni successive (¹) si ha: $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$, ove:

(¹) Cfr. [7], pp. 324-327.

$$u_0(x) = g(x), \quad u_n(x) = \int_0^x K^{(n-1)}(x, \xi)\, g(\xi)\, d\xi,$$

$$K^{(0)}(x, \xi) = K(x, \xi), \quad K^{(n)}(x, \xi) = \int_\xi^x K(x, t)\, K^{(n-1)}(t, \xi)\, dt.$$

Si ha inoltre:

$$|u_n(x)| \leq \max_{[0,1]} |g(x)| \frac{M^n x^n}{n!}$$

con $M$ data da (5). Ne segue:

$$|u(x)| \leq e^M \max_{[0,1]} |g(x)|,$$

cioè la (4).

È ovvio che se in luogo di (3) si considera il problema di Cauchy $E(u) = f$, $u(1) = a$, $u'(1) = b$, per la soluzione di tale problema sussiste la maggiorazione

$$(4)' \qquad \max_{[0,1]} |u(x)| \leq e^M \max_{[0,1]} \left| a + b\theta(1) \int_1^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} + \int_1^x f(t) \left( \int_t^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} \right) dt \right| \ (^2).$$

## 2. Rappresentazione degli invarianti ortogonali $\mathcal{J}_1^n(\Gamma)$.

Denoteremo con $v_1(x)$ e $v_2(x)$ gli integrali dell'equazione $E(v) = 0$ che, rispettivamente, verificano le condizioni:

(9) $$v_1(1) = 0, \qquad v_1'(1) = -1$$

(10) $$v_2(0) = 0, \qquad v_2'(0) = 1.$$

Proviamo il lemma seguente:

II. 1) *Il massimo di* $v_2(x)$ [*di* $v_1(x)$] *in* $[0, 1]$ *è positivo ed è assunto in* $x = 1$ [*in* $x = 0$].

(2) Si noti che la (4) e la (4)' sono state stabilite qualunque sia la funzione continua $c(x)$. La non negatività della $c(x)$ sarà sfruttata in seguito.

2) *Riesce:*

$$v_2(x) \geq \theta(0) \int_0^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)}, \quad \left[ v_1(x) \geq \theta(1) \int_x^1 \frac{d\xi}{\theta(\xi)} \right].$$

3) *Indicato con* $W(x)$ *il wronskiano dei due integrali* $v_1(x)$ *e* $v_2(x)$, *risulta* $\theta(x)\, W(x) \equiv \theta(0)\, v_1(0) = \theta(1)\, v_2(1)$.

Sia $c(x) \geq 0$ in $[0, 1]$. La funzione $v_2(x)$, per la seconda delle (10), è ovviamente crescente in un intorno destro dell'origine. Pertanto, per la prima delle (10), il suo massimo in $[0, 1]$ è positivo. Come caso assai particolare di un notissimo teorema, dalle ipotesi $\theta(x) > 0$ e $c(x) \geq 0$, segue che $v_2(x)$ non può avere massimo positivo nè minimo negativo all'interno di $[0, 1]$. Pertanto la $v_2(x)$ è sempre non negativa e riesce: $\max\limits_{[0,1]} v(x) = v_2(1) > 0$. Cioè la 1).

Si ha inoltre, in $[0, 1]$: $\dfrac{d}{dx}[\theta(x)\, v_2'(x)] = c(x)\, v_2(x) \geq 0$ e, quindi, $\theta(x)\, v_2'(x)$ è non decrescente in $[0, 1]$. Ne segue: $\theta(x)\, v_2'(x) \geq$ $\geq \theta(0)\, v_2'(0) = \theta(0)$ e quindi:

$$v_2(x) = \int_0^x v_2'(\xi)\, d\xi \geq \theta(0) \int_0^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)},$$

cioè la 2).

Con ragionamenti analoghi si ottengono le proprietà 1) e 2) enunciate per $v_1(x)$.

Poniamo:

$$W(x) = \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Riesce, per le (9) e (10): $W(0) = v_1(0)$, $W(1) = v_2(1)$. Dalla classica formula di Liouville, applicata al wronskiano $W(x)$, si deduce che è costante in $[0, 1]$ il prodotto $\theta(x)\, W(x)$. Ne viene: $\theta(x)\, W(x) =$ $= \theta(0)\, W(0) = \theta(1)\, W(1)$ e, quindi, la 3).

Indichiamo con $\mathcal{U}$ la varietà lineare dello spazio $\mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$ costituita da tutte le funzioni $u(x)$, continue in $[0, 1]$, nulle agli estremi dell'intervallo, dotate di derivata prima assolutamente continua e di derivata seconda appartenente ad $\mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$. Sia $f \in \mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$. La soluzione del problema

$$E(u) = f, \qquad u \in \mathcal{U} \tag{11}$$

si può, come noto, rappresentare con la

$$(12) \qquad u(x) = -\int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) \, d\xi,$$

essendo $G(x, \xi)$ la funzione di Green, considerata nell'introduzione, data da:

$$(13) \qquad G(x, \xi) \begin{cases} \dfrac{1}{\theta(1) \, v_2(1)} \, v_1(x) \, v_2(\xi) & \text{se } x \geq \xi \\ \dfrac{1}{\theta(1) \, v_2(1)} \, v_2(x) \, v_1(\xi) & \text{se } x \leq \xi. \end{cases}$$

$G(x, \xi)$ è simmetrica nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$ e sempre positiva all'interno.

Infatti, si consideri l'integrale generale dell'equazione $E(u) = f$:

$$u(x) = c_1 \, v_1(x) + c_2 \, v_2(x) + \int_0^x U(x, \xi) f(\xi) \, d\xi$$

dove, per la 3) del lemma II, si ha:

$$U(x, \xi) = \frac{1}{\theta(\xi) \; W(\xi)} \begin{vmatrix} v_1(\xi) & v_2(\xi) \\ v_1(x) & v_2(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{\theta(1) \; v_2(1)} \, [v_1(\xi) \, v_2(x) - v_1(x) \, v_2(\xi)].$$

Assumendo $c_1 = 0$ e $c_2 = -\dfrac{1}{\theta(1) \, v_2(1)} \displaystyle\int_0^1 v_1(\xi) f(\xi) \, d\xi$, la funzione $u(x)$ che così si ottiene appartiene ad $\mathcal{U}$, verifica quasi ovunque la $E(u) = f$ ed è rappresentata dalla (12).

Se $u \in \mathcal{U}$, riesce $E(u) = f \in \mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$; la corrispondenza lineare che ad ogni $u$ di $\mathcal{U}$ associa l'elemento $E(u)$ di $\mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$ è biunivoca allorquando $u$ descrive $\mathcal{U}$ e $f$ descrive $\mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$. Pòsto:

$$(14) \qquad \Gamma f = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) \, d\xi,$$

per la (12) tale corrispondenza si rappresenta con la

$$(15) \qquad u = -\Gamma f.$$

Consideriamo il seguente problema di autovalori per l'equazione integrale, con nucleo simmetrico:

$$\Gamma f - \mu f = 0, \qquad f \in \mathcal{L}^{(2)}(0, 1). \tag{16}$$

Ovviamente $\mu = 0$ non è autovalore di (16) perché, in caso contrario, detta $f_0$ una corrispondente autosoluzione, si avrebbe, in $(0, 1)$:

$$\int_0^1 G(x, \xi) f_0(\xi)\, d\xi = 0.$$

Ciò implica $f_0 = 0$ quasi ovunque in $(0, 1)$.

Indichiamo brevemente con

$$E(u) + \lambda u = 0, \qquad u \in \mathcal{U} \tag{17}$$

il problema (1) di autovalori considerato nell'introduzione. Il seguente classico teorema prova l'equivalenza dei due problemi (16) e (17).

III. *Condizione necessaria e sufficiente perché il numero reale* $\mu \neq 0$ *sia autovalore per il problema* (16) *è che* $\lambda = \mu^{-1}$ *sia autovalore per il problema* (17). *Se le funzioni* $f_1, \dots, f_n$ *costituiscono un sistema completo di autosoluzioni, linearmente indipendenti, relative all'autovalore* $\mu$, *per il problema* (16), *pòsto* $u_k = -\Gamma f_k$ $(k = 1, \dots, n)$, *le funzioni* $u_1, \dots, u_n$ *costituiscono un sistema completo di autosoluzioni relative all'autovalore* $\lambda = \mu^{-1}$ *per il problema* (17).

Infatti, se $\lambda$ e $u$ sono, rispettivamente, autovalore ed autosoluzione del problema (17), dalla (15) si trae:

$$f - \lambda \Gamma f = 0. \tag{18}$$

La (18) assicura che $\lambda$ non può essere uguale a zero e, pertanto, pòsto $\mu = \lambda^{-1}$, si ottiene $\Gamma f - \mu f = 0$. Viceversa, se $\mu$ e $f$ sono autovalore ed autosoluzione del problema (16), pòsto $u = -\Gamma f$, riesce, per $\lambda = \mu^{-1}$: $E(u) + \lambda u = 0$, cioè $\lambda$ e $u$ sono autovalore ed autosoluzione del problema (17).

Per constatare che gli autovalori del problema (16) sono tutti positivi, basta provare che per ogni $f \in \mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$ riesce:

$$\int_0^1 \int_0^1 G(x, \xi) f(x) f(\xi)\, dx\, d\xi \geq 0, \tag{19}$$

il segno uguale sussistendo se e solo se $f$ è quasi ovunque nulla in $(0, 1)$.

Dalla (15), eseguendo un'integrazione per parti e sfruttando le $u(0) = u(1) = 0$, si trae:

$$\int_0^1\int_0^1 G(x, \xi) f(x) f(\xi)\, dx\, d\xi = -\int_0^1 u\, E(u)\, dx = \int_0^1 \left[\theta(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + c(x)\, u^2\right] dx.$$

Pertanto, se nella (19) valesse il segno uguale, si avrebbe

$$\int_0^1 \left[\theta(x)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + c(x)\, u^2\right] dx = 0;$$

cioè $u \equiv 0$ in $[0, 1]$ e, quindi, $f = 0$ quasi ovunque in $(0, 1)$.

L'operatore $\Gamma$ definito in $\mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$ per mezzo della (14) è un operatore compatto, simmetrico e strettamente positivo. Come noto, esso ammette una semplice infinità di autovalori, ciascuno di molteplicità geometrica finita, tutti positivi. Ordinati tali autovalori in successione e ripetuto ciascuno di essi tante volte quant'è la rispettiva molteplicità, siano essi: $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n \geq \ldots$ La successione $\{\mu_h\}$ converge a zero per $h \to \infty$ (cfr. [2], pp. 112-119).

L'invariante ortogonale del primo ordine e di grado $n$ dell'operatore $\Gamma$ che, come noto (cfr. [2], pag. 145), è dato da:

$$\mathcal{J}_1^n(\Gamma) = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_h^n$$

si può rappresentare per mezzo della funzione di Green $G(x, \xi)$ introdotta con la (13).

Considerato l'iterato della $G(x, \xi)$ introdotto a pag. 2, è facile verificare che: $G^{(n)}(x, \xi) = G^{(n)}(\xi, x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Risulta inoltre:

$$\text{(20)} \qquad G^{(n)}(x_1, x_{n+1}) = \int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 G(x_1, x_2)\, G(x_2, x_3) \ldots$$

$$\ldots G(x_{n-1}, x_n)\, G(x_n, x_{n+1})\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n$$

e $\Gamma^n f = \int_0^1 G^{(n)}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$. Essendo (cfr. [2], pp. 139-163):

$$\mathcal{J}_1^n(\Gamma) = \mathcal{J}_1^1(\Gamma^n), \quad \mathcal{J}_1^1(\Gamma) = \int_0^1 G(x_1, x_1)\, dx_1$$

e quindi

$$\mathcal{J}_1^n(\Gamma) = \int_0^1 G^{(n)}(x_1, x_1)\, dx_1,$$

per la (20), si ha:

$$(21)\qquad \mathcal{J}_1^n(\Gamma) = \int_0^1\int_0^1 \dots \int_0^1 G(x_1, x_2) G(x_2, x_3) \dots G(x_{n-1}, x_n) G(x_n, x_1) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

**3. Approssimazione per eccesso degli invarianti $\mathcal{J}_1^1(\Gamma), \mathcal{J}_1^2(\Gamma), \mathcal{J}_1^3(\Gamma)$.**

Dalla (13) e dalla (21) si ha:

$$(22)\qquad \mathcal{J}_1^1(\Gamma) = \frac{1}{\theta(1)\, v_2(1)} \int_0^1 v_1(x)\, v_2(x)\, dx$$

$$(23)\qquad \mathcal{J}_1^2(\Gamma) = \frac{2}{[\theta(1)\, v_2(1)]^2} \int_0^1 [v_1(x)]^2\, dx \int_0^x [v_2(y)]^2\, dy$$

$$(24)\qquad \mathcal{J}_1^3(\Gamma) = \frac{6}{[\theta(1)\, v_2(1)]^3} \int_0^1 [v_1(x)]^2\, dx \int_0^x v_1(y)\, v_2(y)\, dy \int_0^y [v_2(z)]^2\, dz.$$

La (22) è immediata. Per verificare la (23) basta osservare che:

$$G^{(2)}(x_1, x_1) = \int_0^{x_1} [G(x_1, x_2)]^2\, dx_2 + \int_{x_1}^1 [G(x_1, x_2)]^2\, dx_2 =$$

$$= \frac{1}{[\theta(1)\, v_2(1)]^2} \left\{ \int_0^{x_1} [v_1(x_1)]^2 [v_2(x_2)]^2\, dx_2 + \int_{x_1}^1 [v_1(x_2)]^2\, [v_2(x_1)]^2\, dx_2 \right\};$$

quindi:

$$\mathcal{J}_1^2(\Gamma) = \int_0^1 G^{(2)}(x_1, x_1)\, dx_1 = \frac{1}{[\theta(1)\, v_2(1)]^2} \left\{ \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} [v_1(x_1)]^2 [v_2(x_2)]^2 dx_2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 [v_1(x_2)]^2 [v_2(x_1)]^2\, dx_2 \right\} = \frac{2}{[\theta(1)\, v_2(1)]^2} \int_0^1 [v_1(x_1)]^2\, dx_1 \int_0^{x_1} [v_2(x_2)]^2\, dx_2.$$

Cioè la (23), ove si sostituisca $x_1$ con $x$ e $x_2$ con $y$.

Per verificare la (24), poniamo, per comodità di scrittura:

$$f(x_1, x_2) = v_1(x_1)\, v_2(x_2), \qquad f(x_2, x_1) = v_1(x_2)\, v_2(x_1).$$

Si ha allora, se $x_1 \geq x_2$:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \int_0^{x_2} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3 + \int_{x_2}^{x_1} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3 +$$

$$+ \int_{x_1}^{1} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3 = \frac{1}{[\theta(1)\, v_2(1)]^2} \left\{ \int_0^{x_2} f(x_1, x_3) f(x_2, x_3)\, dx_3 + \right.$$

$$\left. + \int_{x_2}^{x_1} f(x_3, x_2) f(x_1, x_3)\, dx_3 + \int_{x_1}^{1} f(x_3, x_1) f(x_3, x_2)\, dx_3 \right\}$$

e se $x_1 \leq x_2$:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3 + \int_{x_1}^{x_2} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3 +$$

$$+ \int_{x_2}^{1} G(x_1, x_3)\, G(x_2, x_3)\, dx_3 = \frac{1}{[\theta(1)\, v_2(1)]^2} \left\{ \int_0^{x_1} f(x_1, x_3) f(x_2, x_3)\, dx_3 + \right.$$

$$\left. + \int_{x_1}^{x_2} f(x_2, x_3) f(x_3, x_1)\, dx_3 + \int_{x_2}^{1} f(x_3, x_1) f(x_3, x_2)\, dx_3 \right\}.$$

Pertanto riesce:

$$\mathcal{J}_1^3(\Gamma) = \int_0^1 G^{(3)}(x_1, x_1)\, dx_1 =$$

$$= \frac{1}{\theta(1)\, v_2(1)} \left\{ \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} f(x_1, x_2)\, G^{(2)}(x_1, x_2)\, dx_2 + \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^1 f(x_2, x_1)\, G^{(2)}(x_1, x_2)\, dx_2 \right\}.$$

Cioè:

$$(25) \qquad \mathcal{J}_1^3(\Gamma) = \frac{1}{[\theta(1)\, v_2(1)]^3} \left\{ \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} f(x_1, x_2)\, dx_2 \int_0^{x_2} f(x_1, x_3) f(x_2, x_3)\, dx_3 + \right.$$

$$+\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} f(x_1, x_2)\, dx_2 \int_{x_2}^{x_1} f(x_1, x_3) f(x_3, x_2)\, dx_3 +$$

$$+\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} f(x_1, x_2)\, dx_2 \int_{x_1}^{1} f(x_3, x_1) f(x_3, x_2)\, dx_3 +$$

$$+\int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{1} f(x_2, x_1)\, dx_2 \int_0^{x_1} f(x_1, x_3) f(x_2, x_3)\, dx_3 +$$

$$+\int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{1} f(x_2, x_1)\, dx_2 \int_{x_1}^{x_2} f(x_3, x_1) f(x_2, x_3)\, dx_3 +$$

$$+\int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{1} f(x_2, x_1)\, dx_2 \int_{x_2}^{1} f(x_3, x_1) f(x_3, x_2)\, dx_3 \Big\} .$$

Posto :

$$h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2) f(x_1, x_3) f(x_2, x_3) = [v_1(x_1)]^2 v_1(x_2) v_2(x_2) [v_2(x_3)]^2,$$

usando le formule di riduzione

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} h(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_3 \int_{x_3}^{x_1} h(x_1, x_2, x_3)\, dx_2 =$$

$$= \int_0^1 dx_3 \int_{x_3}^{1} dx_1 \int_{x_3}^{x_1} h(x_1, x_2, x_3)\, dx_2 = \int_0^1 dx_3 \int_{x_3}^{1} dx_2 \int_{x_2}^{1} h(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 =$$

$$= \int_0^1 dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \int_{x_2}^{1} h(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 = \int_0^1 dx_2 \int_{x_2}^{1} dx_1 \int_0^{x_2} h(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 ,$$

si constata che i sei addendi al secondo membro della (25) sono fra loro uguali. Sostituendo $x_1$ con $x$, $x_2$ con $y$ e $x_3$ con $z$, segue la (24).

Siano $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ due funzioni che, per ora, supponiamo soltanto continue in $[0, 1]$. Siano $\varepsilon_1$ ed $\varepsilon_2$ due numeri positivi tali che :

$$(26) \qquad | v_i(x) - f_i(x) | < \varepsilon_i , \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad i = 1, 2.$$

Supponiamo che si abbia:

$$f_2(1) - \varepsilon_2 > 0. \tag{27}$$

Poniamo:

$$Q_1 = \frac{1}{\theta(1) f_2(1)} \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx \tag{28}$$

$$Q_2 = \frac{2}{[\theta(1) f_2(1)]^2} \int_0^1 [f_1(x)]^2\, dx \int_0^x [f_2(y)]^2\, dy \tag{29}$$

$$Q_3 = \frac{6}{[\theta(1) f_2(1)]^3} \int_0^1 [f_1(x)]^2\, dx \int_0^x f_1(y) f_2(y) \int_0^y [f_2(z)]^2\, dz. \tag{30}$$

Essendo, per le (26) e (27),

$$v_1(x) < f_1(x) + \varepsilon_1, \qquad v_2(x) < f_2(x) + \varepsilon_2, \qquad v_2(1) > f_2(1) - \varepsilon_2,$$

dalla (22) si ha:

$$\mathcal{I}_1^1(\Gamma) < \frac{1}{\theta(1)[f_2(1) - \varepsilon_2]} \left\{ \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx + \varepsilon_1 \int_0^1 f_2(x)\, dx + \right.$$

$$\left. + \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right\} = \frac{1}{\theta(1) f_2(1)} \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{\theta(1)[f_2(1) - \varepsilon_2]} - \frac{1}{\theta(1) f_2(1)} \right\} \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\theta(1)[f_2(1) - \varepsilon_2]} \left\{ \varepsilon_1 \int_0^1 f_2(x)\, dx + \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right\}.$$

Ne viene, per la (28),

$$\mathcal{I}_1^1(\Gamma) < Q_1 + \varrho_1, \tag{31}$$

con

$$\varrho_1 = \frac{1}{\theta(1)[f_2(1) - \varepsilon_2]} \left\{ \varepsilon_1 \int_0^1 f_2(x)\,dx + \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\,dx + \right. \tag{32}$$

$$\left. + \frac{\varepsilon_2}{f_2(1)} \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \right\}.$$

Procedendo in modo analogo, dalla (23) si trae:

$$\mathcal{J}_1^2(\Gamma) < Q_2 + \varrho_2 , \tag{33}$$

con $Q_2$ dato dalla (29) e $\varrho_2$ dalla

$$\varrho_2 = \frac{2}{\{\theta(1)[f_2(1) - \varepsilon_2]\}^2} \left\{ \frac{\varepsilon_2(2f_2(1) - \varepsilon_2)}{[f_2(1)]^2} \int_0^1 [f_1(x)]^2\,dx \int_0^x [f_2(y)]^2\,dy + \right. \tag{34}$$

$$+ 2\varepsilon_1 \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^x [f_2(y)]^2\,dy + \varepsilon_1^2 \int_0^1 dx \int_0^x [f_2(y)]^2\,dy +$$

$$+ 2\varepsilon_2 \int_0^1 [f_1(x)]^2\,dx \int_0^x f_2(y)\,dy + 4\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\,dx \int_0^x f_2(y)\,dy +$$

$$\left. + 2\varepsilon_1^2\,\varepsilon_2 \int_0^1 dx \int_0^x f_2(y)\,dy + \varepsilon_2^2 \int_0^1 x[f_1(x)]^2\,dx + 2\varepsilon_1\varepsilon_2^2 \int_0^1 x f_1(x)\,dx + \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2}{2} \right\}.$$

Infine, dalla (24) si ha:

$$\mathcal{J}_1^3(\Gamma) < Q_3 + \varrho_3 , \tag{35}$$

con $Q_3$ dato dalla (30) e $\varrho_3$ dalla

$$\varrho_3 = \frac{6}{[\theta(1)(f_2(1) - \varepsilon_2)]^3} \left\{ \left( \frac{3\varepsilon_2}{f_2(1)} - \frac{3\varepsilon_2^2}{[f_2(1)]^2} + \frac{\varepsilon_2^3}{[f_2(1)]^3} \right) \cdot \right. \tag{36}$$

$$\cdot \int_0^1 [f_1(x)]^2\,dx \int_0^x f_1(y)\,f_2(y)\,dy \int_0^y [f_2(z)]^2\,dz +$$

$$+ 2\varepsilon_2 \int_0^1 [f_1(x)]^2 dx \int_0^x f_1(y) f_2(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz + \varepsilon_2^2 \int_0^1 [f_1(x)]^2\, dx \int_0^x y f_1(y) f_2(y)\, dy +$$

$$+ \varepsilon_1 \int_0^1 [f_1(x)]^2 dx \int_0^x f_2(y)\, dy \int_0^y [f_2(z)]^2 dz + \varepsilon_2 \int_0^1 [f_1(x)]^2 dx \int_0^x f_1(y)\, dy \int_0^y [f_2(z)]^2\, dz +$$

$$+ \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \int_0^1 [f_1(x)]^2\, dx \int_0^x dy \int_0^y [f_2(z)]^2 dz + 2\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \int_0^1 [f_1(x)]^2\, dx \int_0^x f_2(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz +$$

$$+ 2\varepsilon_2^2 \int_0^1 [f_1(x)]^2\, dx \int_0^x f_1(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \int_0^1 [f_1(x)]^2 dx \int_0^x dy \int_0^y f_2(z)\, dz +$$

$$+ \varepsilon_1\, \varepsilon_2^3 \int_0^1 [f_1(x)]^2\, dx \int_0^y y f_2(y)\, dy + \varepsilon_2^3 \int_0^1 [f_1(x)]^2\, dx \int_0^x y f_1(y)\, dy +$$

$$+ \frac{\varepsilon_1\, \varepsilon_2^2}{2} \int_0^1 x^2 [f_1(x)]^2\, dx + 2\varepsilon_1 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_1(y) f_2(y)\, dy \int_0^y [f_2(z)]^2\, dz +$$

$$+ \varepsilon_1^2 \int_0^1 dx \int_0^x f_1(y) f_2(y)\, dy \int_0^y [f_2(z)]^2 dz + 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_1(y) f_2(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz +$$

$$+ 2\varepsilon_1^2\, \varepsilon_2 \int_0^1 dx \int_0^x f_1(y) f_2(y) dy \int_0^y f_2(z)\, dz + 2\varepsilon_1\, \varepsilon_2^2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x y f_1(y) f_2(y)\, dy +$$

$$+ \varepsilon_1^2\, \varepsilon_2^2 \int_0^1 dx \int_0^x y f_1(y) f_2(y)\, dy + 2\varepsilon_1^2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_2(y)\, dy \int_0^y [f_2(z)]^2\, dz +$$

$$+ 2\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_1(y)\, dy \int_0^y [f_2(z)]^2\, dz + 2\varepsilon_1^2\, \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x dy \int_0^y [f_2(z)]^2\, dz +$$

$$+ \varepsilon_1^3 \int_0^1 dx \int_0^x f_2(y)\, dy \int_0^y [f_2(z)]^2 dz + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 \int_0^1 dx \int_0^x f_1(y)\, dy \int_0^y [f_2(z)]^2 dz +$$

$$+ \varepsilon_1^3 \varepsilon_2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y [f_2(z)]^2 dz + 4\varepsilon_1^2 \varepsilon_2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_2(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz +$$

$$+ 2\varepsilon_1^3 \varepsilon_2 \int_0^1 dx \int_0^x f_2(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz + 2\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x y f_2(y)\, dy +$$

$$+ \varepsilon_1^3 \varepsilon_2^2 \int_0^1 dx \int_0^x y f_2(y)\, dy + 4\varepsilon_1 \varepsilon_2^2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x f_1(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz +$$

$$+ 2\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \int_0^1 dx \int_0^x f_1(y)\, dy \int_0^y f_2(z)\, dz + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2^3 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x y f_1(y)\, dy +$$

$$+ \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^3 \int_0^1 dx \int_0^x y f_1(y)\, dy + 4\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \int_0^1 f_1(x)\, dx \int_0^x dy \int_0^y f_2(z)\, dz +$$

$$+ 2\varepsilon_1^3 \varepsilon_2^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f_2(z)\, dz + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^3 \int_0^1 x^2 f_1(x)\, dx + \frac{\varepsilon_1^3 \varepsilon_2^3}{6} \Big\} .$$

Supponiamo che $f_1(x)$ ed $f_2(x)$ siano di classe uno in $[0,1]$, con derivata prima assolutamente continua e derivata seconda di quadrato sommabile. $\varepsilon_1$ ed $\varepsilon_2$ si possono calcolare adoperando rispettivamente le formule (4)′ e (4). Infatti, pòsto $u_1(x) = v_1(x) - f_1(x)$, $u_2(x) = v_2(x) - f_2(x)$, poiché $u_1$ ed $u_2$ sono soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$E(u_1) = -E(f_1), \quad u_1(1) = -f_1(1), \quad u_1'(1) = -(1 + f_1'(1)),$$

$$E(u_2) = -E(f_2), \; u_2(0) = -f_2(0), \; u_2'(0) = 1 - f_2'(0),$$

si può assumere $\varepsilon_1$ coincidente con il secondo membro della (4)′, ove al posto di $a$, $b$ e $f$ si sostituisca $-f_1(1)$, $-(1 + f_1'(1))$ e $-E(f_1)$;

cioè:

$$(37)\qquad \varepsilon_1 = e^M \max_{[0,1]} \left| f_1(1) + (1 + f_1'(1))\,\theta(1) \int_1^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} + \int_1^x E(f_1) \left( \int_t^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} \right) dt \right|$$

ed, analogamente,

$$(38)\qquad \varepsilon_2 = e^M \max_{[0,1]} \left| f_2(0) + (f_2'(0) - 1)\,\theta(0) \int_0^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} + \int_0^x E(f_2) \left( \int_t^x \frac{d\xi}{\theta(\xi)} \right) dt \right| .$$

Ogni scelta di $f_1(x)$ ed $f_2(x)$, nella considerata classe di funzioni, con l'ulteriore condizione data dalla (27), permette di calcolare valori per eccesso dei primi tre invarianti ortogonali $\mathcal{I}_1^1(\Gamma)$, $\mathcal{I}_1^2(\Gamma)$ e $\mathcal{I}_1^3(\Gamma)$.

Vogliamo da ultimo provare come si possano costruire delle successioni $\{f_1^{(n)}(x)\}$ e $\{f_2^{(n)}(x)\}$ tali che, fatte relativamente ad $f_1^{(n)}$ ed $f_2^{(n)}$ le posizioni (28), (29), (30), (32), (34), (36), (37) e (38), e detti $Q_1^{(n)}$, $Q_2^{(n)}$, $Q_3^{(n)}$, $\varrho_1^{(n)}$, $\varrho_2^{(n)}$, $\varrho_3^{(n)}$, $\varepsilon_1^{(n)}$ e $\varepsilon_2^{(n)}$ i relativi primi membri, riesca:

$$\lim_{n\to\infty} (Q_m^{(n)} + \varrho_m^{(n)}) = \mathcal{I}_1^m(\Gamma), \qquad m = 1, 2, 3.$$

La possibilità di costruire le successioni $\{f_i^{(n)}(x)\}$ è una immediata conseguenza di un semplice teorema di completezza che veniamo ora ad esporre.

Indichiamo con $H_m(0, 1)$, $m \geq 0$, lo spazio hilbertiano (completo) delle funzioni $f(x)$, appartenenti a $\mathcal{C}^{(m-1)}[0, 1]$, dotate di derivata $(m-1)$-esima assolutamente continua ed aventi la derivata $m$-esima appartenente a $\mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$, con la consueta definizione di prodotto scalare:

$$(f, g)_m = \sum_{h=0}^{m} \int_0^1 \frac{d^h}{dx^h} f(x) \frac{d^h}{dx^h} g(x)\, dx.$$

(Se $m = 0$: $H_0(0, 1) \equiv \mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$).

Indicato con $X_2$ lo spazio cartesiano reale a due dimensioni e supposto $m \geq 2$, si consideri lo spazio

$$\mathcal{H} = H_{m-2}(0, 1) \oplus X_2$$

somma diretta di due spazi hilbertiani $H_{m-2}(0, 1)$ e $X_2$. $\mathcal{H}$ è ancora uno spazio hilbertiano (completo) assumendo, se $u = (f, x_1, x_2) \in \mathcal{H}$

e $v = (g, y_1, y_2) \in \mathcal{H}$, come prodotto scalare in $\mathcal{H}$ il seguente:

$$(u, v) = (f, g)_{m-2} + x_1 y_1 + x_2 y_2 =$$

$$= \sum_{h=0}^{m-2} \int_0^1 \frac{d^h}{dx^h} f(x) \frac{d^h}{dx^h} g(x)\, dx + x_1 y_1 + x_2 y_2 .$$

Sia $\{p_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ un sistema di funzioni linearmente indipendenti, appartenenti a $H_m(0, 1)$ e completo in $H_m(0, 1)$. Come $\{p_k(x)\}$ ad esempio, si può assumere la successione dei monomi nella variabile $x$, oppure il classico sistema trigonometrico.

Sussiste il seguente teorema:

IV. *Se* $\theta(x)$ *appartiene a* $\mathcal{C}^{(m-1)}[0, 1]$ *e* $c(x)$ *appartiene a* $\mathcal{C}^{(m-2)}[0, 1]$, *con* $m \geq 2$, *il sistema di funzioni*:

$$\{P_k(x)\} = \{(E(p_k), p_k(\xi), p_k'(\xi))\} \qquad (k = 1, 2, \dots),$$

*ove* $\xi$ *è un punto fissato in* $[0, 1]$, *è completo in* $\mathcal{H}$.

Procedendo in modo classico, basta provare che se $u = (f, x_1, x_2)$ è un elemento di $\mathcal{H}$ tale che $(u, P_k) = 0$ $(k = 1, 2, \dots)$, necessariamente $f$ è l'elemento nullo di $H_{m-2}(0, 1)$ ed $x_1 = x_2 = 0$.

Indichiamo con $w$ la soluzione del problema di Cauchy: $E(w) = f$, $w(\xi) = x_1$, $w'(\xi) = x_2$. Dall'essere $f \in H_{m-2}(0, 1)$ segue $w \in H_m(0, 1)$. Per la completezza del sistema $\{p_k(x)\}$ in $H_m(0, 1)$ esistono allora le costanti $c_k^{(n)}$ $(k = 1, \dots, n)$ tali che, posto:

$$w_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} p_k(x),$$

la successione $\{w_n(x)\}$ converge a $w(x)$ in $H_m(0, 1)$. Di conseguenza tutte le derivate, fino all'ordine $m - 1$ incluso, della successione $\{w_n(x)\}$ convergono uniformemente in $[0, 1]$ alle rispettive derivate della funzione $w(x)$. La successione $\{E(w_n)\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} E(p_k) \right\}$ converge in $H_{m-2}(0, 1)$ alla funzione $f = E(w)$ e, in particolare, per $x = \xi$, riesce:

$$\lim_{n \to \infty} w_n(\xi) = x_1, \quad \lim_{n \to \infty} w_n'(\xi) = x_2 .$$

Dalla:

$$(u, P_k) = \sum_{h=0}^{m-2} \int_0^1 \frac{d^h}{dx^h} f(x) \frac{d^h}{dx^h} E(p_k)\, dx + x_1 p_k(\xi) + x_2 p_k'(\xi) = 0$$

segue allora:

$$\sum_{h=0}^{m-2}\int_0^1 \frac{d^h}{dx^h} f(x) \frac{d^h}{dx^h} E(w_n)\, dx + x_1 w_n(\xi) + x_2 w_n'(\xi) = 0$$

e, al limite per $n \longrightarrow \infty$,

$$\sum_{h=0}^{m-2}\int_0^1 \left[\frac{d^h f}{dx^h}\right]^2 dx + x_1^2 + x_2^2 = 0 ;$$

cioè la tesi.

Fissato $n$, se $\theta(x)$ appartiene a $\mathcal{C}^{(m-1)}[0, 1]$ e $c(x)$ appartiene a $\mathcal{C}^{(m-2)}[0, 1]$, come successioni $\{f_1^{(n)}(x)\}$ e $\{f_2^{(n)}(x)\}$ possono assumersi le seguenti

$$f_1^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_{1k}^{(n)} p_k(x), \qquad f_2^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} c_{2k}^{(n)} p_k(x),$$

dove le $c_{1k}^{(n)}$ e le $c_{2k}^{(n)}$ sono le soluzioni dei seguenti sistemi lineari algebrici:

$$\sum_{k=1}^{n} [(E(p_h), E(p_k))_m + p_h(1) p_k(1) + p_h'(1) p_k'(1)]\, c_{1k}^{(n)} = -p_h'(1) \quad (h = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{k=1}^{n} [(E(p_h), E(p_k))_m + p_h(0) p_k(0) + p_h'(0) p_k'(0)]\, c_{2k}^{(n)} = p_h'(0) \quad (h = 1, \ldots, n).$$

## 4. Ulteriore metodo per l'approssimazione di $v_1(x)$ e $v_2(x)$.

Vogliamo ora esporre un procedimento per l'approssimazione di $v_1(x)$ e $v_2(x)$, il quale non fa ricorso al teorema di completezza IV. Sebbene il calcolo delle funzioni approssimanti si presenti più laborioso, tale procedimento ha il vantaggio di esprimere gli errori di approssimazione $\varepsilon_1^{(n)}$ ed $\varepsilon_2^{(n)}$ come funzioni esplicite di $n$.

Poniamo:

$$v_i'' = \varphi^{(i)} \qquad (i = 1, 2). \tag{39}$$

Per la prima delle (39) e per le (9) si ha:

$$v_1(x) = \int_1^x (x - \xi)\, \varphi^{(1)}(\xi)\, d\xi + (1 - x) \tag{40}$$

e quindi, essendo $E(v_1) = 0$, $\varphi^{(1)}$ è soluzione dell'equazione

$$\varphi^{(1)}(x) = \int_1^x [\alpha(x) + (x - \xi)\gamma(x)]\, \varphi^{(1)}(\xi)\, d\xi + (1 - x)\gamma(x) - \alpha(x)$$

con

$$\alpha(x) = -\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}, \qquad \gamma(x) = \frac{c(x)}{\theta(x)}.$$

Analogamente, per la seconda delle (39) e per la (10), si ha:

$$v_2(x) = \int_0^x (x - \xi)\, \varphi^{(2)}(\xi)\, d\xi + x \tag{41}$$

e quindi, essendo $E(v_2) = 0$, $\varphi^{(2)}$ è soluzione dell'equazione

$$\varphi^{(2)}(x) = \int_0^x [\alpha(x) + (x - \xi)\gamma(x)]\, \varphi^{(2)}(\xi)\, d\xi + x\gamma(x) + \alpha(x).$$

Pòsto:

$$K(x, \xi) = \alpha(x) + (x - \xi)\gamma(x), \quad g_1(x) = (1 - x)\gamma(x) - \alpha(x),$$

$$g_2(x) = x\gamma(x) + \alpha(x)$$

si ottengono allora le due seguenti equazioni integrali del tipo di Volterra:

$$\varphi^{(1)}(x) = \int_1^x K(x, \xi)\, \varphi^{(1)}(\xi)\, d\xi + g_1(x), \qquad \varphi^{(1)} \in \mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$$

$$\varphi^{(2)}(x) = \int_0^x K(x, \xi)\, \varphi^{(2)}(\xi)\, d\xi + g_2(x), \qquad \varphi^{(2)} \in \mathcal{L}^{(2)}(0, 1)$$

con il nucleo $K(x, \xi)$ continuo nel quadrato $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$ e le funzioni $g_i(x)$ continue in $[0, 1]$.

Pòsto

$$|K(x, \xi)| \leq M, \qquad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq \xi \leq 1, \tag{42}$$

$$|g_i(x)| \leq N^{(i)}, \qquad 0 \leq x \leq 1, \ (i = 1, 2), \tag{43}$$

e: $K^{(0)}(x,\xi) = K(x,\xi)$, $K^{(n)}(x,\xi) = \int\limits_{\xi}^{x} K(x,t)\, K^{(n-1)}(t,\xi)\, dt$, si ha allora:

(44) $$\varphi^{(1)}(x) = g_1(x) + \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h^{(1)}(x) = g_1(x) + \sum_{h=1}^{\infty} \int\limits_{1}^{x} K^{(h-1)}(x,\xi)\, g_1(\xi)\, d\xi$$

(45) $$\varphi^{(2)}(x) = g_2(x) + \sum_{h=1}^{\infty} \varphi_h^{(2)}(x) = g_2(x) + \sum_{h=1}^{\infty} \int\limits_{0}^{x} K^{(h-1)}(x,\xi)\, g_2(\xi)\, d\xi,$$

con:

(46) $$|\varphi_n^{(1)}(x)| \leq \frac{N^{(1)} M^n\, |x-1|^n}{n!}$$

(47) $$|\varphi_n^{(2)}(x)| \leq \frac{N^{(2)} M^n x^n}{n!}.$$

Poniamo:

(48) $$\psi_n^{(i)}(x) = g_i(x) + \sum_{h=1}^{n} \varphi_h^{(i)}(x) \qquad (i=1,2),$$

(49) $$\sigma_n^{(i)}(x) = \sum_{h=n+1}^{\infty} \varphi_h^{(i)}(x) \qquad (i=1,2),$$

quindi:

(50) $$\varphi^{(i)}(x) = \psi_n^{(i)}(x) + \sigma_n^{(i)}(x) \qquad (i=1,2).$$

Dalle (46) e (47) si ha facilmente:

(51) $$|\sigma_n^{(1)}(x)| \leq \frac{N^{(1)} M^{n+1} (1-x)^{n+1} e^{M(1-x)}}{(n+1)!}$$

(52) $$|\sigma_n^{(2)}(x)| \leq \frac{N^{(2)} M^{n+1} x^{n+1} e^{Mx}}{(n+1)!}.$$

Ricordando le (50), (40) e (41), le funzioni $v_1(x)$ e $v_2(x)$ si possono scrivere:

(53) $$v_1(x) = f_1^{(n)}(x) + \varepsilon_1^{(n)}(x)$$

(54) $$v_2(x) = f_2^{(n)}(x) + \varepsilon_2^{(n)}(x)$$

con :

$$f_1^{(n)}(x) = 1 - x + \int_1^x (x - \xi)\, \psi_n^{(1)}(\xi)\, d\xi \tag{55}$$

$$f_2^{(n)}(x) = x + \int_0^x (x - \xi)\, \psi_n^{(2)}(\xi)\, d\xi \tag{56}$$

$$\varepsilon_1^{(n)}(x) = \int_1^x (x - \xi)\, \sigma_n^{(1)}(\xi)\, d\xi \tag{57}$$

$$\varepsilon_2^{(n)}(x) = \int_0^x (x - \xi)\, \sigma_n^{(2)}(\xi)\, d\xi. \tag{58}$$

V. *Riesce* :

$$|\varepsilon_1^{(n)}(x)| \leq \frac{N^{(1)}}{M}\left\{ e^{M(1-x)} \sum_{h=1}^{n+1} (-1)^{n+h+1}(n+2-h)\frac{M^{h-1}(1-x)^h}{h\,!} + \right.$$
$$\left. + (-1)^n \left[1 - x + \frac{n+2}{M}\left(1 - e^{M(1-x)}\right)\right]\right\} \tag{59}$$

$$|\varepsilon_2^{(n)}(x)| \leq \frac{N^{(2)}}{M}\left\{ e^{Mx} \sum_{h=1}^{n+1} (-1)^{n+h+1}(n+2-h)\frac{M^{h-1}\, x^h}{h\,!} + \right.$$
$$\left. + (-1)^n \left[x + \frac{n+2}{M}\left(1 - e^{Mx}\right)\right]\right\} \tag{60}$$

*e quindi* :

$$|\varepsilon_n^{(i)}(x)| \leq \frac{e^M\, N^{(i)}\, M^{n+1}}{(n+3)\,!} \qquad (i = 1, 2). \tag{61}$$

Si ha infatti dalle (57) e (51) e, rispettivamente, dalle (58) e (52):

$$|\varepsilon_1^{(n)}(x)| \leq \int_x^1 (\xi - x)\, |\sigma_n^{(1)}(\xi)|\, d\xi \leq$$
$$\leq \frac{N^{(1)}\, M^{n+1}}{(n+1)\,!}\int_x^1 (\xi - x)(1-\xi)^{n+1} e^{M(1-\xi)}\, d\xi \tag{62}$$

$$(63)\qquad |\varepsilon_2^{(n)}(x)| \leq \int_0^x (x-\xi)\,|\sigma_n^{(2)}(\xi)|\,d\xi \leq$$

$$\leq \frac{N^{(2)} M^{n+1}}{(n+1)!} \int_0^x (x-\xi)\,\xi^{n+1} e^{M\xi}\,d\xi.$$

Poniamo : $h(x) = \int_0^x (x-\xi)\,\xi^{n+1} e^{M\xi}\,d\xi$ ; risulta :

$$\int_x^1 (\xi - x)(1-\xi)^{n+1} e^{M(1-\xi)}\,d\xi = \int_0^{1-x} (1-x-t)\,t^{n+1} e^{Mt}\,dt$$

e, pertanto, le (62) e (63) si scrivono :

$$(64)\qquad |\varepsilon_1^{(n)}(x)| \leq \frac{N^{(1)} M^{n+1}}{(n+1)!} h(1-x)\,;\ |\varepsilon_2^{(n)}(x)| \leq \frac{N^{(2)} M^{n+1}}{(n+1)!} h(x).$$

Essendo, detta $C$ una costante arbitraria, $I_s = \int t^s e^t\,dt =$ $= s!\,e^t \sum_{h=0}^{s} (-1)^{s+h} \frac{t^h}{h!} + C$, si ha :

$$h(x) = \frac{x}{M^{n+2}} \int_0^{Mx} t^{n+1} e^t\,dt - \frac{1}{M^{n+3}} \int_0^{Mx} t^{n+2} e^t\,dt =$$

$$= \frac{x}{M^{n+2}} [I_{n+1}]_0^{Mx} - \frac{1}{M^{n+3}} [I_{n+2}]_0^{Mx} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{M^{n+2}} \left\{ (-1)^n + e^{Mx} \sum_{h=0}^{n+1} (-1)^{n+h+1} \frac{M^h x^{h+1}}{h!} \right\} -$$

$$- \frac{(n+2)!}{M^{n+2}} \left\{ (-1)^{n+1} + e^{Mx} \sum_{h=0}^{n+2} (-1)^{n+h} \frac{M^{h-1} x^h}{h!} \right\}.$$

Da cui :

$$(65)\quad h(x) = \frac{(n+1)!}{M^{n+2}} \left\{ e^{Mx} \sum_{h=1}^{n+1} (-1)^{n+h+1} (n+2-h) \frac{M^{h-1} x^h}{h!} + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \left[ x + \frac{n+2}{M} (1 - e^{Mx}) \right] \right\}$$

$$(66) \qquad h(1-x) = \frac{(n+1)!}{M^{n+2}} \Big\{ e^{M(1-x)} \sum_{h=1}^{n+1} (-1)^{n+h+1} (n+2-h) \cdot$$

$$\cdot \frac{M^{h-1}(1-x)^h}{h!} + (-1)^n \left[ 1 - x + \frac{n+2}{M} (1 - e^{M(1-x)}) \right] \Big\}.$$

Sostituendo le (65) e la (66) nelle (62) e (63) si ottengono le (59) e (60).

Essendo:

$$h(x) \leq \frac{e^M}{(n+2)(n+3)}, \qquad h(1-x) \leq \frac{e^M}{(n+2)(n+3)};$$

dalle (64) seguono le (61).

## BIBLIOGRAFIA


[1] M. P. Colautti: *Sulle vibrazioni trasversali di una biella cuneiforme appoggiata agli estremi*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, serie VIII, vol. XLIV, fasc. 2 1968.

[2] G. Fichera: *Linear elliptic differential systems and eigenvalue problems*, Lecture Notes in Mathem. N. 8, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.

[3] G. Fichera: *Approximation and Estimates for Eigenvalues*, Numerical solution of Partial Differential Equations, Academic Press, 1966.

[4] G. Fichera: *Upper Bounds for Orthogonal Invariants of some Positive Linear Operators*, Rend. Istituto Matem. Università Trieste, Vol. I, fasc. I, 1969.

[5] G. Fichera: *Further developments in the approximation theory of eigenvalues*, Numerical Solution of Partial Differential Equations II, Synspade 1970, Academic Press, New York, London, 1971.

[6] G. Fichera: *Sul calcolo degli autovalori*, Atti del Convegno sulle Applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matematica, Cagliari-Sassari, 1964, Ediz. Cremonese, Roma.

[7] E. Goursat: *Cours d'Analyse Mathématique*, vol. III, Gauthier-Villars, Paris 1927.

[8] S. G. Michlin *Metodi variazionali della Fisica Matematica*, (in russo), Libreria scientifica di Stato, Letteratura Fisico-Matematica, Mosca, 1970.

[9] M. Picone: *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 1940.

[10] E. Trefftz: *Über Fehlerschätzung bei Berechnung von Eigenwerten*, Mathem. Annalen Bd. 108, 1933.