QUASICOLLINEAZIONI IN GEOMETRIE SOPRA UN INSIEME QUALUNQUE (*)

di FABIO ROSSI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si introduce e si studia il concetto di quasicollineazione fra due geometrie e si perviene ad una caratterizzazione degli spazi affini irriducibili nell'ambito degli spazi quasigrafici.*

SUMMARY. - *The notion of quasicollineation in geometries is introduced and a characterization of the affine irriducible spaces in the set of quasigrafic spaces is assigned.*

Introduzione.

Seguendo J. Hartmanis [1] intenderemo per *geometria* un insieme non vuoto i cui elementi sono detti «punti» ed in cui si distinguono determinati sottoinsiemi, detti «rette», tali che:

a_1) Per due punti distinti passi una ed una sola retta;
a_2) Ogni retta contenga almeno due punti distinti.

Nel presente lavoro si introduce anzitutto la nozione di *quasicollineazione* di una geometria G in una geometria G', come applicazione del sostegno di G nel sostegno di G' tale che:

b_1) L'immagine di una retta di G sia o una retta oppure un punto di G';

b_2) L'immagine reciproca di un punto di G' sia un sottospazio (eventualmente vuoto) di G.

(*) Pervenuto in Redazione il 4 settembre 1971.
Lavoro eseguito nel periodo di godimento di una borsa di studio del C. N. R.
(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

Nel n. 1 si stabiliscono delle relazioni fra le quasicollineazioni di G in G' e certi omomorfismi superiori completi del reticolo dei sottospazi di G nel reticolo dei sottospazi di G'; relazioni che permettono di interpretare molti dei risultati geometrici dal punto di vista reticolare.

Nel n. 2 si introduce la nozione di *partizione geometrica* di G, pervenendo a caratterizzare le quasicollineazioni mediante tali partizioni: ad una quasicollineazione di G in G' rimane associata una ben determinata partizione geometrica di G ed ogni partizione geometrica di G individua, a meno di collineazioni, una quasicollineazione di G in una opportuna geometria G'.

Nei nn. seguenti si tratta il caso che la geometria sia uno spazio quasigrafico S ([5]) mostrando (n. 3) che l'immagine di S in una quasicollineazione f è ancora uno spazio quasigrafico e che esiste un sottospazio $\overline{S}$ di S tale che la restrizione di f ad $\overline{S}$ sia una collineazione fra $\overline{S}$ ed $f(S)$: pertanto ogni immagine quasicollineare di S è immergibile in S stesso.

Ogni partizione geometrica di uno spazio quasigrafico S, privo di rette con due soli punti, risulta poi costituita da sottospazi che hanno o tutti la stessa dimensione finita oppure tutti dimensione infinita (n. 4); ciò permette di definire il *rango* di una quasicollineazione f di S come dimensione di uno (qualunque) dei sottospazi della partizione geometrica associata ad f. Si stabiliscono successivamente delle relazioni fra il rango di f, la dimensione di $f(S)$ e la dimensione di S stesso, supposta finita (n. 5).

Nel n. 6 si assegna una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di quasicollineazioni « proprie » di uno spazio quasigrafico (cioè né collineazioni né tali da mutare tutto lo spazio in un medesimo punto). In base a tale condizione si caratterizzano (nn. 7, 8) gli spazi quasigrafici, privi di rette con due soli punti, per i quali esistono « tutte le possibili » quasicollineazioni di rango uno; l'esistenza di queste comporta poi l'esistenza di tutte le possibili quasicollineazioni di rango qualunque. Si riconosce, in tal modo (n. 9), che i predetti spazi sono tutti e soli gli spazi affini irriducibili; essi restano così caratterizzati, nell'ambito degli spazi quasigrafici, mediante le quasicollineazioni.

I risultati del n. 6 permettono infine di determinare una famiglia di spazi quasigrafici per i quali ogni quasicollineazione che non muti tutto lo spazio in un medesimo punto è una collineazione (n. 10). A tale famiglia appartengono, in particolare, gli spazi grafici irriducibili (di dimensione qualunque).

1. Quasicollineazioni e prime proprietà.

Data una quasicollineazione f di una geometria G in una geometria G' (nel senso precisato nell'introduzione), valgono le seguenti proposizioni:

α_1) Se $\overline{G}$ è un sottospazio di G, $f(\overline{G})$ è un sottospazio di G';

α_2) Se $\overline{G}'$ è un sottospazio di G', $f^{-1}(\overline{G}')$ è un sottospazio di G;

α_3) Se X è un sottoinsieme di G e $\langle X \rangle$ è il sottospazio di G generato da X, si ha $f(\langle X \rangle) = \langle f(X) \rangle$;

α_4) Se l'immagine di una retta r è ancora una retta r', la f subordina una biiezione fra r e r'.

La α_1) segue immediatamente dalla definizione di quasicollineazione.

Per la α_2) possiamo supporre che $f^{-1}(\overline{G}')$ contenga almeno due punti distinti. Se $P \neq Q$ sono due punti di $f^{-1}(\overline{G}')$ e se $f(P) \neq f(Q)$, poiché la retta $r' = f(P) \cup f(Q)$ è contenuta in $\overline{G}'$, la retta $r = P \cup Q$ è contenuta in $f^{-1}(\overline{G}')$. Se poi $f(P) = f(Q)$, la b_2) porta immediatamente a concludere che r è contenuta in $f^{-1}(\overline{G}')$, onde in ogni caso, $f^{-1}(\overline{G}')$ è un sottospazio di G.

Detto X un qualunque sottoinsieme di G se $\overline{G}'$ è un sottospazio di G' contenente $f(X)$ sarà:

$$\overline{G}' \supseteq f(X) \Longrightarrow \overline{G}' \cap f(G) = \overline{G}^* \supseteq f(X) \Longrightarrow f^{-1}(\overline{G}^*) \supseteq X.$$

Ma, dall'essere $f^{-1}(\overline{G}^*)$ sottospazio di G, si ha:

$$f^{-1}(\overline{G}^*) \supseteq \langle X \rangle \Longrightarrow f[f^{-1}(\overline{G}^*)] \supseteq f(\langle X \rangle) \Longrightarrow \overline{G}^* \supseteq$$
$$\supseteq f(\langle X \rangle \Longrightarrow \overline{G}' \supseteq f(\langle X \rangle)).$$

Essendo $\langle f(X) \rangle$ un sottospazio di G' contenente $f(X)$, risulta $\langle f(X) \rangle \supseteq f(\langle X \rangle)$; ed avendosi $f(\langle X \rangle) \supseteq f(X)$, sarà anche $f(\langle X \rangle) \supseteq \langle f(X) \rangle$, onde la α_3).

La α_4) è immediata.

Seguendo [2] diremo *collineazione* di una geometria G su una geometria G' ogni applicazione f di G in G' tale che:

a) f sia biiettiva;

b) Se A, B, C sono punti allineati di G, $f(A), f(B), f(C)$ sono punti allineati di G';

c) Se A', B', C' sono punti allineati di G', $f^{-1}(A'), f^{-1}(B')$, $f^{-1}(C')$ sono punti allineati di G.

È evidente che:

1.1. *Una quasicollineazione f di G in G' è una collineazione, se e solo se è biiettiva.*

Se $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ è una famiglia di sottospazi di G, indicheremo con $\bigvee_{\alpha \in I} G_\alpha$ l'unione insiemistica dei G_α. Indicando, come in [1], con $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$ il sottospazio congiungente dei G_α, sarà allora $\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha = \langle \bigvee_{\alpha \in I} G_\alpha \rangle$. Dalla α_3) discende quindi:

$$\alpha_5)\ f(\bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha) = f(\langle \bigvee_{\alpha \in I} G_\alpha \rangle) = \langle f(\bigvee_{\alpha \in I} G_\alpha) \rangle =$$

$$= \langle \bigvee_{\alpha \in I} f(G_\alpha) \rangle = \bigcup_{\alpha \in I} f(G_\alpha).$$

Indichiamo ora con $\mathcal{R}_G$ ed $\mathcal{R}'_{G'}$ rispettivamente il reticolo dei sottospazi della geometria G e quello della geometria G'. Essi, come è noto (cfr. [1]), sono reticoli completi, atomici e dotati di massimo e minimo assoluti.

Proveremo che:

1.2. *Una quasicollineazione f di G in G' determina un omomorfismo superiore completo φ di $\mathcal{R}_G$ in $\mathcal{R}'_{G'}$ verificante le:*

α_6) *Se $G'_\alpha = \varphi(G_\alpha)$ per ogni $G'_\beta \subseteq G'_\alpha$ di $\mathcal{R}'_{G'}$ esiste un $G_\beta \subseteq G_\alpha$ di $\mathcal{R}_G$ tale che $\varphi(G_\beta) = G'_\beta$:*

α_7) $G_\alpha \neq \emptyset \Longrightarrow \varphi(G_\alpha) \neq \emptyset$.

Viceversa, ogni tale omomorfismo proviene da una quasicollineazione.

Le proposizioni α_1) — α_5) implicano, chiaramente, che ogni quasicollineazione f di G in G' determina un omomorfismo superiore completo di $\mathcal{R}_G$ in $\mathcal{R}'_{G'}$ (cfr. [4], [3]) verificante la α_6), α_7). Viceversa, se φ è un omomorfismo superiore completo di $\mathcal{R}_G$ in $\mathcal{R}'_{G'}$ verificante le α_6), α_7), l'immagine in φ di un punto P di G è un punto di G'. Infatti $\varphi(P)$ è un sottospazio non vuoto di G' onde, se P' è un punto di $\varphi(P)$, segue $\varphi(P) = P'$ poiché, come si verifica subito, risulta $\varphi(\emptyset) = \emptyset$. La φ determina allora una applicazione f di G in G', ponendo $f(P) = \varphi(P)$ per ogni $P \in G$.

Se r è una retta di G, $\varphi(r)$ o è un punto o una retta di G'; poiché φ è un omomorfismo superiore, il sottoinsieme

$$f(r) = \{P' \mid P' \in G', P' = \varphi(P), P \in r\}$$

di G' è contenuto in $\varphi(r)$; ma α_6) implica $\varphi(r) \subseteq f(r)$, onde $\varphi(r) = f(r)$ e la f verifica la b_1). Se P' è un punto di G' consideriamo il sottoinsieme

$$f^{-1}(P') = \{P \mid P \in G, \varphi(P) = P'\}$$

di G. Supponendo che $f^{-1}(P') \neq \emptyset$, poniamo $f^{-1}(P') = \{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$, $\overline{G} = \bigcup_{\alpha \in I} P_\alpha$. Risulta allora $\varphi(\overline{G}) = \bigcup_{\alpha \in I} \varphi(P_\alpha) = P'$; ma per ogni $P \in \overline{G}$ è $\varphi(P) = P'$, onde $\overline{G} \subseteq f^{-1}(P')$; avendosi d'altra parte $\overline{G} \supseteq f^{-1}(P')$, segue $\overline{G} = f^{-1}(P')$; la tesi è così provata.

Osserviamo che le applicazioni di una geometria G in una geometria G' ciascuna delle quali muta G in un punto di G', sono quasicollineazioni; esse saranno dette *banali.*

Diremo poi quasicollineazione *propria* di G in G' ogni quasicollineazione che non sia nè banale nè una collineazione (fra G ed $f(G)$). Notiamo che esistono effettivamente quasicollineazioni proprie per (particolari) geometrie G e G'. Se infatti G è uno spazio grafico riducibile di dimensione $n \geq 2$ o infinita, ed S', S'' sono suoi sottospazi costituenti una partizione di G, l'applicazione f di G in G così definita:

$$f(x) = \begin{cases} P & \text{se } x \in S' \\ Q & \text{se } x \in S'' \end{cases}$$

con P, Q punti fissati di S', S'' rispettivamente, è una quasicollineazione propria di G in $G' = G$.

2. Quasicollineazioni e g-partizioni.

Sia G una geometria. Diremo *partizione geometrica* o *g-partizione* di G una famiglia π di sottospazi (non vuoti) di G verificante le proprietà:

α') π costituisce una partizione di G;

α'') Se esistono tre elementi distinti A_P, A_Q, A_R di π ed una retta r di G che intersechi A_P, A_Q, A_R, ogni retta intersecante due di essi, interseca anche il terzo. (1)

Per ogni geometria G esistono g-partizioni di G: tali sono almeno quella costituita dai singoli punti di G e quella formata da G stesso; quest'ultima la chiameremo *banale.*

Diremo g-partizione *propria* di G ogni g-partizione π di G alla quale appartiene almeno un sottospazio proprio contenente più di un punto.

(1) Converremo di indicare con A_P l'elemento di π che contiene il punto P.

Verifichiamo che:

2.1. *Ogni quasicollineazione f di una geometria G in una geometria G' dà luogo ad una g-partizione di G, univocamente individuata da f.*

L'insieme delle controimmagini in f dei punti di $f(G)$ è infatti una g-partizione di G, ben individuata da f, che chiameremo g partizione *determinata* da f.

2.2. *Ogni g-partizione π di G dà luogo ad una quasicollineazione f di G, su una opportuna geometria G', che determina la π stessa.*

Se infatti π è la g-partizione data, per ogni retta r di G si consideri il sottoinsieme $\overline{r} = \{A_P\}_{P \in r}$ di π. Chiamando « punti » gli elementi di π e « rette » i sottoinsiemi predetti qualora contengano almeno due punti distinti, si ottiene, con facile verifica, una geometria G' su π. L'applicazione canonica f di G su $\pi = G'$ fornisce allora la quasicollineazione richiesta.

Inoltre, se G, G', G'' sono tre geometrie qualsiasi si ha che:

2.3. *Due quasicollineazioni f, g di G su G' e G'' rispettivamente, determinano la stessa g-partizione di G se e solo se esiste una collineazione λ di G' su G'' tale che $g = \lambda \circ f$.*

Detta infatti π la g-partizione determinata da f e g e considerata la geometria indotta su π da G, sia h la quasicollineazione canonica di G su π. Esistono allora due collineazioni λ_1, λ_2 di π su G', G'' rispettivamente, tali che $f = \lambda_1 \circ h, g = \lambda_2 \circ h$. Posto allora $\lambda = \lambda_2 \circ \lambda_1^{-1}$, si ottiene $g = \lambda \circ f$. Il viceversa è immediato.

Data allora una g-partizione π di G diremo quasicollineazione *associata* alla π, la quasicollineazione f di G, individuata a meno di collineazioni, che determina la π stessa.

Osserviamo ancora che, ricordando la definizione di quasicollineazione propria di G, si ha:

2.4. *Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una quasicollineazione propria di G è l'esistenza di una g-partizione propria di G.*

3. Quasicollineazioni negli spazi quasigrafici.

Uno spazio quasigrafico S è come noto [5], una geometria G i cui sottospazi verificano la ulteriore proprietà:

a_3) Se $\overline{S}$ è un sottospazio e P un punto non in $\overline{S}$ accade che $\overline{S} \cup P$ copre $\overline{S}$ (in simboli: $\overline{S} \cup P \vdash \overline{S}$).

In questo numero e nei seguenti ci occuperemo delle quasicollineazioni di uno spazio quasigrafico S con particolare riferimento alle quasicollineazioni proprie.

Sia dunque S uno spazio quasigrafico, G una geometria arbitraria ed f una quasicollineazione di S in G. Mostriamo anzitutto che:

3.1. *Se la restrizione di f ad un sottospazio S^* di S è una collineazione di S^* su $f(S^*)$ e se esiste un punto $P' \in G$ tale che $P' \in f(S)$, $P' \notin f(S^*)$, allora per ogni $P \in S$ con $f(P) = P'$ la restrizione della f ad $S^* \cup P$ è una collineazione di $S^* \cup P$ su $f(S^* \cup P) = f(S^*) \cup P'$.*

La proposizione è evidente se la f è una collineazione di S su $f(S)$. Supponiamo dunque che la f sia una quasicollineazione propria di S in G e procediamo per assurdo. Esisterà allora un punto $P \in S$ tale che $f(P) = P'$ e la restrizione della f al sottospazio $S^* \cup P$ sia una quasicollineazione propria di $S^* \cup P$ su $f(S^*) \cup P'$. In altri termini, esisterà qualche punto $Q' \in f(S^*) \cup P'$ proveniente, tramite la f, da almeno due punti distinti di $S^* \cup P$. Poniamo ora $\overline{S} = S^* \cup P$, $S'' = f^{-1}(Q') \cap \overline{S}$. S'' è ovviamente un sottospazio di S; verifichiamo che $S'' \cap S^* = \emptyset$. Infatti, se esistesse un punto $Q \in S'' \cap S^*$, si avrebbe $Q \in S'' \cap S^* \Longrightarrow f(Q) = Q' \Longrightarrow Q' \in f(S^*)$. Ma per le ipotesi fatte su Q', esisterà un punto $Q^* \neq Q$ in $\overline{S}$ tale che $f(Q^*) = Q'$; pertanto $Q^* \notin S^*$. Poichè $P \notin S^*$ ed essendo S uno spazio quasigrafico, sarà $\overline{S} \vdash S^*$ onde, avendosi $\overline{S} \supseteq S^* \cup Q^* \supset S^*$, dovrà necessariamente accadere che $\overline{S} = S^* \cup Q^*$. Quindi:

$$P' \cup f(S^*) = f(P) \cup f(S^*) = f(P \cup S^*) = f(\overline{S}) =$$
$$= f(S^* \cup Q^*) = f(S^*) \cup f(Q^*) = f(S^*)$$

ossia $P' \in f(S^*)$ il che è contro l'ipotesi.

Quanto fin qui dimostrato assicura inoltre che per ogni punto $R \in \overline{S}$, $R \notin S^*$ è $f(R) \notin f(S^*)$. Fissato poi un punto $Q \in S''$, essendo $\{Q\} \subset S'' \subseteq \overline{S}$, esiste un sottospazio X di S tale che $X \cap S'' = \{Q\}$, $X \cup S'' = \overline{S}$. Non può aversi $S^* = X$ altrimenti risulterebbe $X \cap S'' = S^* \cap S'' = \emptyset$; nè può essere $X \supset S^*$ perchè, diversamente, $X \supset S^*$, $X \subseteq \overline{S} \Longrightarrow X = \overline{S} \Longrightarrow X \cap S'' = \overline{S} \cap S'' = S'' \supset \{Q\}$. Segue che $X \not\supseteq S^*$.

Esiste allora un punto $H \in S^*$ con $H \notin X$. Ma:

$$f(X) \cap f(S'') \supseteq f(X \cap S'') = f(Q) = Q' = f(S'') \Longrightarrow f(X) \cap f(S'') = f(S'');$$

ossia $f(X) \supseteq f(S'')$. Si ha allora:

$$f(X \cup S'') = f(\bar{S}) = f(S^* \cup P) \Longrightarrow f(X) \cup f(S'') =$$

$$= f(S^*) \cup P' \Longrightarrow f(X) = f(S^*) \cup P' \Longrightarrow f(X) \supseteq f(S^*).$$

In particolare, poiché $f(H) \in f(S^*) \subseteq f(X)$, esisterà un punto $K \in X$ tale che $f(K) = f(H)$. Ma K è necessariamente distinto da H, onde K non può essere in S^*. Ciò contrasta con una affermazione precedente e la 3.1. è così dimostrata.

Siamo ora in grado di provare la proposizione:

3.2. *Se f è una quasicollineazione di uno spazio quasigrafico S in una geometria G, esiste un sottospazio S^* di S tale che la restrizione di f ad S^* sia una collineazione fra S^* ed $f(S)$.*

La proposizione è evidente se la f è già una collineazione fra S ed $f(S)$. Altrimenti, indichiamo con $\mathscr{A}$ l'insieme dei sottospazi $\bar{S}$ di S tali che la restrizione della f ad $\bar{S}$ sia una collineazione fra $\bar{S}$ ed $f(\bar{S})$ $(\subseteq f(S))$. È $\mathscr{A} \neq \emptyset$ contenendo almeno i punti di S (e qualche retta, se $f(S)$ non è un punto). Rispetto all'ordinamento per inclusione l'insieme $\mathscr{A}$ è, come si verifica facilmente, induttivo; onde esiste in $\mathscr{A}$ almeno un elemento massimale S^*. La restrizione di f ad S^* sarà quindi una collineazione fra S^* ed $f(S^*)$. Verifichiamo che $f(S^*) = f(S)$. Infatti, se ciò non fosse vero, esisterebbe un punto P' con $P' \in f(S)$, $P' \notin f(S^*)$. In virtù della 3.1., detto P un punto di S tale che $f(P) = P'$, la restrizione di f a $P \cup S^*$ è una collineazione di $P \cup S^*$ su $f(P \cup S^*)$ $(\subseteq f(S))$. Ma $P \cup S^* \supset S^*$ e ciò contraddice la massimalità di S^*.

Dalla proprietà 3.2., tenuto anche conto di [5], discende la:

3.3. *L'immagine $f(S)$ di uno spazio quasigrafico S in una quasicollineazione f verifica le seguenti proprietà:*

β_1) *$f(S)$ è uno spazio quasigrafico;*

β_2) *$f(S)$ è immergibile in S;*

β_3) $d(f(S)) \leq d(S)$; *se S ha dimensione finita n si ha $d(f(S)) = d(S)$ se e solo se f è una collineazione.*

Osserviamo che, in forza alla β_2), ogni quasicollineazione f di S in una geometria G determina una quasicollineazione di S in S associata (cfr. n. 2) alla g-partizione determinata da f. Per lo studio di ulteriori proprietà delle quasicollineazioni di uno spazio quasigrafico S in una geometria G sarà dunque sufficiente ridursi al caso $G = S$.

4. g-partizioni negli spazi quasigrafici. Rango di una quasicollineazione.

Siano, S uno spazio quasigrafico di dimensione qualsiasi (finita o no) e π una g-partizione non banale di S. Fissati due elementi distinti A_P ed A_Q di π, si ha che:

4.1. *Se la retta $r = P \cup Q$ contiene almeno tre punti distinti, la dimensione di A_P coincide con quella di A_Q.*

Poniamo $A = \bigvee_{R \in r} A_R$. Tenuto conto che π è una g-partizione si verifica facilmente che A è un sottospazio di S. Mostriamo ora che, fissati arbitrariamente due punti distinti H e K di r si ha $A = A_H \cup K$.

Sia T un punto di A. Esiste allora un punto U di r tale che $T \in A_U$. Indicato con L un punto di r distinto da H e da U, esistente per ipotesi, la retta $T \cup L$ interseca A_H in un punto distinto da L. Poiché $L \in A_H \cup K$ si conclude che anche $T \in A_H \cup K$ onde $A \subseteq A_H \cup K$. Evidentemente $A \supseteq A_H \cup K$; pertanto $A = A_H \cup K$; ed essendo $K \notin A_H$, è $A \vdash A_H$. Per ogni $R \in r$ è dunque $A \vdash A_R$ quindi $d(A_P) = d(A_Q)$.

Supponendo allora che S non contenga rette con due soli punti, la 4.1. implica che:

4.2. *Gli elementi di π hanno o tutti la stessa dimensione finita o tutti dimensione infinita.*

Dalle 2.1., 4.2. discende che ad ogni quasicollineazione f di S può associarsi o un intero $r \geq 0$ univocamente determinato da f, oppure il simbolo infinito; vale a dire, la dimensione di un (qualunque) sottospazio appartenente alla g-partizione determinata da f. Diremo allora, rispettivamente, che f ha *rango* (finito) r o *rango infinito*.

Sempre nell'ipotesi che S sia uno spazio quasigrafico in cui ogni retta contenga almeno tre punti, dalla 4.2. discende ancora che:

4.3. *Una quasicollineazione di S su uno spazio quasigrafico S' è una collineazione se e solo se esiste un punto di S' la cui controimmagine sia un punto di S.*

5. Relazione fra rango di una quasicollineazione e dimensione dello spazio immagine.

Sia S uno spazio quasigrafico qualsiasi e π una g-partizione di S. Verifichiamo che:

5.1. *Esiste un sottospazio S^* di S che interseca in uno ed un solo punto tutti gli elementi di π. Esso, a meno di collineazioni, coincide con $f(S)$ dove f è la quasicollineazione associata a π.*

Infatti π dà luogo, a norma della 2.2., ad una quasicollineazione f di S. Esiste allora per la 3.2., un sottospazio S^* di S tale che la restrizione di f ad S^* sia una collineazione di S^* su $f(S)$; tale S^* è, come si verifica subito, il sottospazio cercato.

Se S è privo di rette con due soli punti ed f è una quasicollineazione di S, ci proponiamo di determinare la dimensione di $f(S)$, determinazione che in virtù della 5.1., è ricondotta a quella della dimensione di S^*. Premettiamo le seguenti proprietà.

Siano dati una g-partizione π ed un sottospazio $\overline{S}\,(\neq \emptyset)$ di S.

5.2. *Se $A = \bigvee_{P \in \overline{S}} A_P$, si ha:*

γ_1) *A è un sottospazio di S;*

γ_2) *$A = A_P \cup \overline{S}$, qualunque sia $P \in \overline{S}$.*

La γ_1) è immediata conseguenza del fatto che π è una g-partizione di S. Per provare la γ_2) basta far vedere che per ogni $P \in \overline{S}$ è $A_P \cup \overline{S} \supseteq A$. Se infatti $Q \in A$ esiste un punto $R \in \overline{S}$ tale che $Q \in A_R$. Supponendo, per evitare casi banali, che $A_P \neq A_R$, poiché sulla retta $r = R \cup P$ si trova, per ipotesi, un punto $T \neq R, P$, la retta $Q \cup T$ interseca A_P in un punto distinto da T. Essendo $T \in \overline{S}$ si conclude che $Q \in A_P \cup \overline{S}$, onde $A_P \cup \overline{S} \supseteq A$.

Sia ora $\overline{S}$ di dimensione finita ed esista un elemento di π di dimensione pure finita (da cui tutti gli elementi di π hanno la stessa dimensione di quello).

5.3. *Se per qualche $A_R \in \pi$, $A_R \cap \overline{S}$ è un punto Q, allora:*

γ_3) *Per ogni $P \in \overline{S}$ è $A_P \cap \overline{S} = \{P\}$;*

γ_4) *Posto* $A = \bigvee_{P \in \bar{S}} A_P$ *si ha* $d(A) = d(A_P) + d(\bar{S})$ *qualunque sia* $A_P \in \pi$.

Per dimostrare la γ_3) osserviamo che se esistessero due punti distinti H, K di $\bar{S}$ tali che $A_H = A_K$, poiché la retta $H \cup Q$ contiene un punto $L \neq H, Q$, anche la retta $L \cup K$ dovrebbe intersecare A_R in un punto di $\bar{S}$ diverso da Q.

Per la γ_4) procediamo per induzione su $d(\bar{S})$. Se $d(\bar{S}) = 0$ l'affermazione è certamente vera. Sia allora $d(\bar{S}) > 0$ e supponiamo vera la proposizione per ogni sottospazio S^* di S, per cui è $A_P \cap S^* = \{P\}$ per qualche P di S^*, ogni qualvolta si abbia $d(S^*) < d(\bar{S})$. Poiché S è uno spazio quasigrafico, fissato un punto $L \in \bar{S}$ esiste un sottospazio S^* di S tale che $S^* \subset \bar{S}$, $L \notin S^*$, $S^* \cup L = \bar{S}$. Dall'essere $d(\bar{S}) \geq 1$, sarà $d(S^*) = d(\bar{S}) - 1 \geq 0$ (cfr. [5]), quindi $S^* \neq \emptyset$; inoltre, per le ipotesi fatte su $\bar{S}$, per ogni $P \in S^*$ risulterà $A_P \cap S^* = \{P\}$. Posto allora $A^* = \bigvee_{P \in S^*} A_P$, dall'ipotesi induttiva segue $d(A^*) = d(A_P) + d(S^*)$: la dimensione di A^* è pertanto finita. Verifichiamo ora che $A = A^* \cup L$. Dalla 5.2, per ogni $P \in S^*$ si ha $A_P \cup S^* = A^*$; onde, fissato un punto $P \in S^*$, risulta:

$$A = A_P \cup \bar{S} = A_P \cup (S^* \cup L) = (A_P \cup S^*) \cup L = A^* \cup L.$$

Essendo A^* di dimensione finita ed $L \notin A^*$ (cfr. γ_3) è necessariamente $d(A) = d(A^*) + 1$. Dunque $d(A) = d(A_P) + d(\bar{S}) - 1 + 1 = d(A_P) + d(\bar{S})$.

Siamo ora in grado di assegnare una relazione fra il rango di una quasicollineazione f di S, la dimensione di $f(S)$ e la dimensione di S stesso supposta finita ed uguale ad n. Si ha infatti che:

5.4. *Se* r *è il rango di* f, $r = d(S) - d(f(S))$.

Indicando con m la dimensione di $f(S)$, esiste, per la 5.1, un sottospazio S^* di S di dimensione m intersecato in uno ed un solo punto da ogni elemento della partizione π determinata da f. Posto allora $A = \bigvee_{P \in S^*} A_P$, la 5.3. porge $d(A) = d(A_P) + m$ qualunque sia $A_P \in \pi$, onde, osservando che $A = S$, segue $r = d(A_P) = n - m$.

Come corollario della proprietà 5.4., potremo affermare che:

5.5. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una quasicollineazione di* S *su qualche spazio quasigrafico di dimensione* m

$(n \geq m)$, è che esista almeno una g-partizione di S contenente un sottospazio di dimensione $n - m$.

6. Condizione per l'esistenza di una g-partizione propria di uno spazio quasigrafico S.

Sia S uno spazio quasigrafico di dimensione > 1 (finita o no) non contenente rette con due soli punti.

Diremo che due rette a, b di S sono *parallele* ($\|$) se:

$$a = b \text{ o } a \cap b = \emptyset, \; d(a \cup b) = 2.$$

È noto allora che la relazione binaria $\mathcal{T}$ definita nell'insieme delle rette di S da $a \mathcal{T} b \Longleftrightarrow a \| b$ è riflessiva e simmetrica.

Diremo che $\mathcal{T}$ è $\overline{S}$ *debolmente transitiva* se esiste un sottospazio proprio $\overline{S}$ di S, di dimensione ≥ 1, tale che: comunque si fissi una retta a in $\overline{S}$, o $\overline{S}$ contiene tutte le parallele alla retta a oppure, dall'essere $a \| b$, $b \| c$, con b e c non contenute in $\overline{S}$, accade che per ogni punto P di a passi una parallela h alla retta c, contenuta in $\overline{S}$.

Dalla definizione appare evidente che:

6.1. *$\mathcal{T}$ è transitiva se e solo se $\mathcal{T}$ è a-debolmente transitiva con a qualunque retta di S.*

Indichiamo ora con $\overline{S}$ un (eventuale) sottospazio proprio di S, di dimensione ≥ 1, verificante le proprietà:

δ_1) Se h è una retta qualunque di S che non ammette parallela in $\overline{S}$ e se, per un punto Q di h, passa una parallela b a qualche retta di $\overline{S}$, allora per ogni punto di h passa una ed una sola retta parallela alla b;

δ_2) La relazione $\mathcal{T}$ di parallelismo è $\overline{S}$-debolmente transitiva; e, se $d(\overline{S}) > 1$:

δ_3) Considerati comunque tre punti non allineati H, K, L in $\overline{S}$, se due lati del triangolo di vertici H, K, L ammettono parallela in $\overline{S}$, esiste in $\overline{S}$ anche una retta parallela al terzo lato.

6.2. *Un sottospazio $\overline{S}$ di S è del tipo predetto se e solo se appartiene a qualche g-partizione propria di S.*

Sia $\overline{S}$ un sottospazio proprio di S verificante le $\delta_1), \delta_2), \delta_3)$ (questa ultima se $d(\overline{S}) > 1$); proveremo che esiste una g-partizione propria π di S contenente $\overline{S}$. Anzitutto si verificano facilmente le seguenti proposizioni:

$\xi_1)$ Per ogni punto $P \in S, P \notin \overline{S}$ passa una ed una sola retta r parallela ad una qualsiasi retta data in $\overline{S}$.

$\xi_2)$ Se a è una qualunque retta di $\overline{S}$ ed r la parallela per un punto $P \notin \overline{S}$, per ogni punto $Q \in \overline{S}$ passa una ed una sola retta parallela alla retta r; tale retta è inoltre contenuta in $\overline{S}$.

Considerando poi per ogni $P \in S$, $P \notin \overline{S}$ il sottoinsieme (non vuoto) A_P di S:

$$A_P = \{Q \mid Q \neq P : \exists\, a \subseteq \overline{S}, a \parallel r = P \cup Q\} \dotplus \{P\}$$

si ha che:

$\xi_3)$ $\forall P \in S, P \notin \overline{S} \Longrightarrow A_P$ è un sottospazio di S.

Siano Q_1, Q_2 due punti distinti di A_P. Se $P \in Q_1 \cup Q_2$ è evidente che $Q_1 \cup Q_2 \subseteq A_P$; altrimenti è $Q_1 \neq P, Q_2 \neq P$, $Q_1 \cup P \neq Q_2 \cup P$. Pertanto a norma delle proprietà $\xi_1), \xi_2)$ e della definizione di A_P, esistono due rette $a_1 \neq a_2$ di $\overline{S}$, uscenti da uno stesso punto $R \in \overline{S}$, tali che $a_1 \parallel Q_1 \cup P, a_2 \parallel Q_2 \cup P$. Contenendo $\overline{S}$ le rette a_1, a_2 deve essere $d(\overline{S}) > 1$; onde, per la $\delta_3)$, $\overline{S}$ contiene una retta a parallela alla retta $Q_1 \cup Q_2$. Per ogni punto $Q \in Q_1 \cup Q_2$ esisterà allora, sempre per la $\delta_3)$, una retta $r \subseteq \overline{S}$ parallela alla retta $Q \cup P$. Quindi $Q \in A_P$.

$\xi_4)$ $\forall\, P \in S, P \notin \overline{S} \Longrightarrow A_P \cap \overline{S} = \emptyset$; $A_P = A_R \Longleftrightarrow R \in A_P$.

La prima affermazione è ovvia. Per la seconda dimostriamo che $R \in A_P \Longrightarrow A_P = A_R$, risultando del tutto evidente il viceversa. Se infatti $Q\, (\neq R)$ è un punto di A_R esiste una retta $a \subseteq \overline{S}$ tale che $a \parallel Q \cup R$. Ma $R \in A_P$, pertanto $\overline{S}$ contiene anche una retta b parallela alla retta $R \cup P$. Se $Q \cup R \neq R \cup P$ (il che, come abbiamo visto in precedenza, implica $d(\overline{S}) > 1$), la $\delta_3)$ porta subito a concludere che $Q \in A_P$; se $Q \in R \cup P$ tale affermazione è ovvia. Pertanto $A_R \subseteq A_P$. Analogamente si prova che $A_P \subseteq A_R$, onde la $\xi_4)$.

$\xi_5)$ $A_P \neq A_R \Longrightarrow A_P \cap A_R = \emptyset$.

Infatti $A_P \cap A_R \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, Q \in A_P, A_R \Longrightarrow A_P = A_Q, A_Q = A_R \Longrightarrow A_P = A_R$.

Da ξ_3), ξ_4), ξ_5) segue che la famiglia

$$\pi = \{\{A_P\}_{P \in S,\, P \notin \overline{S}}\ ;\ \overline{S} = A_H,\, H \in \overline{S}\}$$

di sottospazi di S costituisce una partizione di S.

Fissati ora tre elementi distinti A_P, A_Q, A_R di π con P, Q, R appartenenti ad una medesima retta r, mostriamo infine che:

ξ_6) Se M è un punto di $A_P\,(A_Q; A_R)$ le rette $M \cup Q, M \cup R$ $(M \cup P, M \cup R;\ M \cup P, M \cup Q)$ intersecano rispettivamente A_R, A_Q $(A_R, A_P;\ A_Q, A_P)$.

Se $M = P$ la ξ_6) è ovvia. Supposto $M \neq P$, poiché r non ammette parallela in $\overline{S}$, per R passa una retta s parallela alla $M \cup P$ contenuta in A_R(²). Ma la retta $M \cup Q$ non è parallela ad s perché non contenuta in A_P (cfr. (²) con $A_P = A_M$); onde, essendo complanare con s, la interseca in un punto necessariamente di A_R. Analogamente si procede negli altri casi.

Sia h una retta intersecante A_P, A_Q in due punti L, M rispettivamente. Se almeno uno dei due punti coincide con P o Q, h interseca, per la ξ_6), anche A_R. Supposto dunque $L \neq P, M \neq Q$, la retta $L \cup Q$ interseca A_R in un punto T. Ma essendo $A_P = A_L$, $A_R = A_T$, si conclude che anche la retta h interseca A_R. Dall'arbitrarietà di A_P, A_Q, A_R segue che la π è una g-partizione (propria) di S.

Supponiamo ora data una g-partizione propria di S e proviamo che ogni suo elemento verifica le condizioni δ). A tale scopo fissiamo arbitrariamente un elemento A_P di π. Si ha:

$\overline{\xi}_1$) Per ogni punto $Q \notin A_P$ passa una ed una sola retta r parallela ad una qualsiasi retta data di A_P; tale retta è, inoltre, contenuta in A_Q.

Osserviamo che, essendo π una g-partizione propria di S ed S uno spazio quasigrafico privo di rette con due soli punti, a norma della proposizione 4.2. per ogni $A_P \in \pi$ è $d(A_P) \geq 1$. Sia allora a una retta di A_P. Poichè la retta $b = Q \cup H$ con H un punto qualsiasi di a, possiede un ulteriore punto $K \neq Q, H$, i sottospazi $A_H (= A_P)$, A_K, A_Q sono distinti. Pertanto la retta $K \cup H_1$, con H_1 punto di a diverso da H, incide A_Q in un punto Q_1 distinto da Q. La retta $r = Q_1 \cup Q\ (\subseteq A_Q)$ è, manifestamente, parallela alla

(²) L'esistenza di s è manifestamente una conseguenza di δ_1). Se $A_R = \overline{S}$ o $A_P = \overline{S}$ la ξ_2) e la definizione di A_R implicano $s \subseteq A_R$. Altrimenti, esiste una retta a di $\overline{S}$ tale che $a \parallel M \cup P$, $M \cup P \parallel s$ con $M \cup P$ ed s non in $\overline{S}$; onde è ancora $s \subseteq A$. poiché $\overline{S}$ contiene certamente una retta parallela ad s (cfr. δ_2)).

retta a. Per ogni punto $R \in b$, pertanto, passa almeno una parallela r_R alla retta a tale che $r_R \subseteq A_R$. Inoltre, detto σ il piano $a \cup b$ è, evidentemente $A_R \cap \sigma = r_R$. Sarà allora:

$$\bigvee_{R \in b} r_R = \bigvee_{R \in b} (A_R \cap \sigma) = (\bigvee_{R \in b} A_R) \cap \sigma = (A_P \cap b) \cap \sigma = \sigma ;$$

essendo, in forza alla proposizione 5.2., $\bigvee_{R \in b} A_R = A_P \cup b$; $A_p \cup b \supseteq \sigma$. Vediamo ora che per il punto Q passa solamente la retta r parallela alla retta a. Supponiamo infatti che per Q passi un'altra retta r_1, distinta da r, parallela ad a. Dovrà allora essere $r_1 \subseteq \sigma$, $r_1 \not\subseteq A_Q$. Se $\overline{Q} \neq Q$ è un punto di r_1 sarà allora:

$$\overline{Q} \notin A_Q, \overline{Q} \notin A_P \Longrightarrow A_{\overline{Q}} \neq A_Q (\neq A_P), A_{\overline{Q}} \neq A_P .$$

Ma poiché $\overline{Q} \in \sigma$ e $\sigma = \bigvee_{R \in b} r_R$, esiste qualche $\overline{R} \in b$ tale che $\overline{Q} \in r_{\overline{R}}$. Ricordando che $r_{\overline{R}} = A_{\overline{R}} \cap \sigma$ si ha:

$$\overline{Q} \in r_{\overline{R}} \Longrightarrow \overline{Q} \in A_{\overline{R}} \Longrightarrow A_{\overline{Q}} = A_{\overline{R}}.$$

La retta b, pertanto, interseca $A_{\overline{Q}}$, A_Q, A_P, onde r_1 deve intersecare necessariamente A_P e quindi a, essendo $A_P \cap \sigma = a$; il che è assurdo.

È poi del tutto evidente che:

$\overline{\xi}_2$) Per ogni punto di A_P passa una ed una sola retta parallela ad una qualsiasi retta di A_Q, con Q arbitrario punto di S non appartenente ad A_P. Tale retta è inoltre contenuta in A_P.

Se h è una retta qualunque di S che non ammette parallela in A_P e se b è una retta per $Q \in h$ parallela a qualche retta di A_P, risulta $b \subseteq A_Q$, $A_Q \cap h = \{Q\}$; l'affermazione è ovvia se $A_P = A_Q$; altrimenti si ottiene immediatamente dalle $\overline{\xi}_1$), $\overline{\xi}_2$). Pertanto, sempre per la $\overline{\xi}_1$), per ogni punto di h passa una ed una sola retta parallela alla retta b. La δ_1) è così dimostrata. Se b, c sono due rette non contenute in A_P ed a è una retta qualunque di A_P in modo da aversi $a \parallel b$, $b \parallel c$, la retta c è contenuta in A_Q essendo Q un punto di c stessa; inoltre $A_Q \neq A_P$. Quindi, a norma della $\overline{\xi}_2$), per ogni punto di a passa una parallela alla retta c contenuta in A_P, onde la δ_2). Supposto poi $d(A_P) > 1$, se H, K, L sono tre punti non allineati di S, siano $H \cup K$ ed $H \cup L$ due rette ammettenti parallela in A_P. Supponendo ancora $H \notin A_P$ (altrimenti la δ_3) sarebbe ovvia), dalla $\overline{\xi}_1$) si ha $H \cup K \subseteq A_H$, $H \cup L \subseteq A_H$. Sarà allora anche $L \cup K \subseteq A_H$ onde, per la $\overline{\xi}_2$), esiste in A_P una parallela alla retta $L \cup K$. Ne segue la δ_3) e la 6.2. è così completamente dimostrata.

Fissato arbitrariamente un elemento A_P di una g-partizione propria π di S, si consideri la famiglia $\{r_\alpha\}_{\alpha \in I}$ di tutte le rette di A_P passanti per P. Da $\overline{\xi}_1$), $\overline{\xi}_2$) segue immediatamente che:

6.3. *Per ogni $R \notin A_P$ risulta $A_R = \bigvee_{\alpha \in I} r'_\alpha$, essendo r'_α la parallela per R alla retta r_α.*

Ciò è come affermare che:

6.4. *Due g-partizioni π e π' distinte di S, non possono contenere uno stesso elemento. Ossia: ogni elemento A_P di una g-partizione π determina, in modo univoco, la π stessa.*

7. Condizione per l'esistenza di quasicollineazioni di rango $r = 1$.

Sia S uno spazio quasigrafico privo di rette con due soli punti, di dimensione > 1 (finita o no).

7.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista una quasicollineazione di S (su qualche spazio quasigrafico) di rango $r = 1$ è che esista una retta s di S tale che:*

d_1) Per ogni punto P di S passi una ed una sola parallela alla s;

d_2) Per ogni retta $a \parallel s$, dall'essere $a \parallel b$, $b \parallel c$ segue $a \parallel c$, quali che siano le rette b, c.

La 7.1. segue subito dalla:

7.2. *Una retta s di S appartiene ad una g-partizione di S se e solo se verifica le d_1), d_2).*

Se esiste una g-partizione π di S contenente s essa è certamente propria. Pertanto, a norma della proposizione $\overline{\xi}_1$) di cui alla 6.2., segue subito la validità della d_1); poiché, in virtù della 6.3., ogni retta a parallela ad s appartiene a π, applicando alla retta a la δ_2), si ottiene la d_2). Viceversa, esista in S una retta s soddisfacente le d_1), d_2). Se h è una qualsiasi retta di S non parallela ad s e se b è la parallela alla retta s per un punto $Q \in h$, poiché per ogni punto di h passa una (ed una sola) parallela c alla retta s, a norma della d_2) si ha allora:

$c \parallel s, s \parallel b \Longrightarrow c \parallel b$; e, supposto $c' \parallel b$; $c' \parallel b, b \parallel s \Longrightarrow c' \parallel s$;

onde s verifica la δ_1). È poi manifesto che s verifica la δ_2). La proposizione 6.2. assicura pertanto l'esistenza di una g partizione π, contenente s, costituita da rette di S.

8. Condizione per l'esistenza di tutte le possibili quasicollineazioni di uno spazio quasigrafico S.

Supponiamo sempre di operare in uno spazio quasigrafico S di dimensione > 1 e privo di rette con due soli punti. Detto allora $\overline{S}$ un sottospazio proprio di S di dimensione ≥ 1 si ha che:

8.1. *Se ogni retta di* $\overline{S}$ *appartiene ad una g-partizione di* S *esiste una g-partizione (propria) di* S *cui appartiene* $\overline{S}$.

Se la dimensione di $\overline{S}$ è uno, la proprietà è evidente. Sia allora tale dimensione ≥ 2 e verifichiamo che $\overline{S}$ soddisfa alla δ_3) di cui alla 6.2. Pertanto, indichiamo con H, K, L tre punti non allineati di S tali che le rette $H \cup K$, $L \cup K$ ammettano parallela in $\overline{S}$. Se almeno uno dei tre punti appartiene ad $\overline{S}$, si vede immediatamente che la retta $H \cup L$ ammette parallela in $\overline{S}$ poiché vi è contenuta; supponiamo perciò che i tre punti non siano in $\overline{S}$. Se r è una retta di $\overline{S}$ parallela alla $H \cup K$, fissato un punto T di r, per T passa una ed una sola retta s di $\overline{S}$ distinta da r e parallela alla retta $L \cup K$; ciò perché $L \cup K$ appartiene alla g-partizione di S determinata da una retta di $\overline{S}$. Verifichiamo che i piani σ_1, σ_2, congiungenti le rette $L \cup K$, $K \cup H$ e, rispettivamente, r, s, sono disgiunti. Se così non fosse per un punto Q dell'intersezione passerebbero, a norma della 7.2., due rette distinte s_1, r_1, rispettivamente parallele alle rette s ed r. La 7.2. assicura allora che s_1 ed r_1 sono contenute nell'intersezione dei piani anzidetti ciò che, essendo i due piani distinti, non può verificarsi. Fissato ora un punto $R \neq T$ di r ed indicati con γ il piano $(L \cup H) \cup R$ e, per ogni $P \in \gamma$, con r_P la retta per P appartenente alla g-partizione individuata da r, si ha che $A = \bigvee_{P \in \gamma} r_P = r \cup \gamma$ (cfr. 5.2). Quindi $A \subseteq \sigma_1 \cup \sigma_2$ ed essendo $r \cap \gamma = \{R\}$ segue $d(A) = 3$ (cfr. 5.3); onde, poiché $d(\sigma_1 \cup \sigma_2) = 3$ risulta $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \bigvee_{P \in \gamma} r_P$. Se M è un punto di σ_2 non appartenente ad r, esiste allora un punto $\overline{P} \in \gamma$, $\overline{P} \neq R$ tale che $M \in r_{\overline{P}}$; ma, tenuto conto che $r_{\overline{P}}$ è parallela alla retta r (cfr. ad es. 6.3), si conclude che $\overline{P} \in \sigma_2$. La retta $\overline{P} \cup R$ è pertanto contenuta in σ_2 ed essendo complanare con la $L \cup H$ è ad essa parallela. Il sottospazio $\overline{S}$ verifica quindi la δ_3); verificando inoltre, come si prova subito, le δ_1), δ_2), dalla 6.2 segue la 8.1.

Diamo, a questo punto, le seguenti definizioni.

Diremo che esistono *tutte le possibili quasicollineazioni di rango* n di S (con $n \geq 0$ o infinito) se ogni sottospazio di dimensione n appartiene ad una (ed una sola) g-partizione di S. Se tale proprietà è verificata da tutti i sottospazi non vuoti di S diremo allora che esistono *tutte le possibili quasicollineazioni* di S.

La proposizione 8.1. implica allora che:

8.2. *Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di tutte le possibili quasicollineazioni di* S *è che esistano tutte le possibili quasicollineazioni di rango* $r = 1$.

9. Caratterizzazione degli spazi affini irriducibili mediante le quasicollineazioni.

Se S è uno spazio quasigrafico di dimensione > 1 privo di rette con due soli punti, a norma della 7.2 segue la:

9.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinché esistano tutte le possibili quasicollineazioni di rango* $r = 1$ *di* S *è che*:

$\overline{d}_1$) *Comunque si fissino in* S *una retta* r *ed un punto* P *vi è una ed una sola retta per* P *parallela ad* r;

$\overline{d}_2$) *La relazione* $\mathcal{T}$ *di parallelismo è transitiva.*

Verifichiamo ora che:

9.2. *Lo spazio quasigrafico* S *è uno spazio affine (della stessa dimensione) se e solo se verifica le* $\overline{d}_1$), $\overline{d}_2$).

É ovvio che, se S è affine, le $\overline{d}_1$), $\overline{d}_2$) sono verificate. Per dimostrare il viceversa ricordiamo ([6]) che uno spazio affine $\mathcal{A}$ (di dimensione ≥ 3) è un insieme di elementi, da dirsi *punti*, in cui si distinguono certi sottoinsiemi, da dirsi *rette*, ed una relazione di equivalenza (« parallelismo » $\|$) definita nell'insieme delle rette, per modo che valgano le seguenti proprietà:

I_1) Per due punti distinti P, Q di $\mathcal{A}$ passa una ed una sola retta $P \cup Q$ di $\mathcal{A}$;

I_2) Ogni retta contiene almeno due punti distinti;

I_3) Comunque si fissino una retta r ed un punto P di $\mathcal{A}$, per P passa una ed una sola retta r' di $\mathcal{A}$ tale che $r \parallel r'$;

I_4) Se P, Q, R, T sono dei punti tali che $P \cup Q \parallel R \cup T$ ed H è un punto di $P \cup R$ si ha $H \in R \cup T$ oppure $P \cup Q$ ed $H \cup T$ hanno un punto in comune;

I_5) Se ogni retta contiene due punti soltanto, presi comunque tre punti A, B, C la parallela ad $A \cup B$ per C incontra la parallela ad $A \cup C$ per B.

I_6) Esistono due rette disgiunte r ed r' tali che $r \nparallel r'$.

Ciò posto, se lo spazio quasigrafico S ha dimensione ≥ 3 e verifica le $\overline{d}_1$), $\overline{d}_2$), proviamo anzitutto che le rette di S ed il parallelismo fra tali rette muniscono il sostegno di S di struttura di spazio affine. Si verifica infatti facilmente che sono soddisfatti gli assiomi I_1)-I_4). L'assioma I_6) si prova subito osservando che, fissato arbitrariamente un piano σ dello spazio quasigrafico S e tenuto conto che $d(S) \geq 3$, esiste un punto P di S e $P \notin \sigma$; ma verificando S le $\overline{d}_1$), $\overline{d}_2$) esistono, per le 9.1, 8.2, tutte le possibili quasicollineazioni di S onde σ determina una g-partizione (propria). Pertanto, se r è una qualsiasi retta di σ ed s è una retta di σ incidente r, la parallela r' alla retta s per P non è, evidentemente, parallela ad r ed è disgiunta da r stessa dovendo essere contenuta in A_P (cfr. 6.2 — $\overline{\xi}_1$).

Poiché ogni retta di S contiene almeno tre punti, lo spazio affine così costruito è irriducibile. È allora noto ([5]) che esso è anche uno spazio quasigrafico, onde la sua struttura coincide con quella di S stesso (3); inoltre, come si vede subito, esso ha la stessa dimensione di S (cfr. anche [5]). Se poi S ha dimensione $n = 2$, la nota definizione assiomatica di piano affine ([4], [7]) porta immediatamente alla tesi.

Le 9.1, 9.2 e [5] (prop. 7.1.), permettono di concludere che:

9.3 *Gli spazi affini irriducibili di dimensione* > 1 *sono tutti e soli gli spazi quasigrafici (della stessa dimensione), privi di rette con due soli punti, che possiedono tutte le possibili quasicollineazioni di rango* $r = 1$ (*e quindi, per la* 8.2, *tutte le possibili quasicollineazioni*).

(3) Si ricordi che nella definizione di spazio quasigrafico intervengono, in modo essenziale, non solo le rette ma anche i sottospazi di dimensione superiore.

10. Non esistenza di quasicollineazioni proprie per una certa classe di spazi quasigrafici.

Sia S uno spazio quasigrafico privo di rette con due soli punti di dimensione qualsiasi > 1. Dalle proposizioni 2.4, 6.2 deriva che:

10.1. *Condizione necessaria per l'esistenza di quasicollineazioni proprie di S è che esistano in S una retta r ed un punto $P \notin r$ per il quale passi una ed una sola parallela ad r.*

Se indichiamo allora con $\mathcal{F}$ l'insieme degli spazi quasigrafici S, di dimensione $n > 1$ o infinita e verificanti le seguenti proprietà:

f_1) Ogni retta di S contiene almeno tre punti;

f_2) Per ogni retta r di S e per ogni punto $P \notin r$ o tutte le rette per P contenute in $P \cup r$ incidono r, oppure per P passa più di una retta parallela ad r;

dalla 10.1 segue, evidentemente, che:

10.2. *Per ogni $S \in \mathcal{F}$ non esiste alcuna quasicollineazione propria di S (in nessuna geometria), ossia: se f è una quasicollineazione di S su uno spazio quasigrafico S' di dimensione ≥ 1, f è una collineazione.*

Osserviamo esplicitamente che appartengono ad $\mathcal{F}$ tutti gli spazi grafici irriducibili di dimensione finita $n > 1$ oppure infinita e di ordine qualsiasi (purché naturalmente, ≥ 2), anche non finito. Come ulteriore esempio di elementi di $\mathcal{F}$ citiamo gli spazi quasigrafici che sono anche (n, m)-strutture ([8]) con $n \geq 3$ ed $m \geq 2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. HARTMANIS: *Generalized partitions and lattice embedding theorems*. Proc. Sympos. pure Math. 2, 22-30 (1961).

[2] B. SEGRE: *Lectures on modern geometry*, with an Appendix by L. Lombardo Radice. Roma, Cremonese, 1961. (CNR: Monografie Matematiche », 7).

[3] G. BIRKHOFF: *Lattice theory*. Revised edition. American Mathematical Society Colloquium Pubblications (vol. XXV) 1948.

[4] G. ZAPPA: *Reticoli e geometrie finite*. Ed. Liguori, Napoli, 1952.

[5] P. V. CECCHERINI: *Sulla nozione di spazio grafico*. Rendiconti di Matematica dell'Univ. di Roma, (1-2) Vol. 26, (1967).

[6] H. LENZ: *Zur Begründung der analytischen Geometrie*. Sitzber. Bayer. Akad. Wiss, Math. - Naturw. K 1, 17-72 (1954).

[7] R. PERMUTTI: *Spazi affini generalizzati e relative proprietà reticolari*. Ricerche di Matematica, 2 (1953).

[8] P. QUATTROCCHI: *Un metodo per la costruzione di certe strutture che generalizzano la nozione di piano grafico*. « Le Matematiche » Vol. XXI, Fasc. 2 (1966).