# SUL PRODOTTO TENSORIALE DI UNA INFINITÀ DI $K$-SPAZI VETTORIALI (*)

di SILVANO HOLZER (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si determinano le famiglie infinite di $K$-spazi vettoriali* $(V_i)_{i \in I}$ *tali che* $\dim \bigotimes_{i \in I} V_i = \Pi_{i \in I} \dim V_i$, $\psi(\Pi_{i \in I} B_i) = B$, *ove* $\psi$ *è l'applicazione tensoriale,* $B_i$ *una base di* $V_i$ *e* $B$ *una base di* $\bigotimes_{i \in I} V_i$. *Viene inoltre assegnata una caratterizzazione, analoga a quella espressa dalla proprietà universale, del $K$-spazio vettoriale avente per dimensione il prodotto di una qualsiasi famiglia di numeri cardinali assegnati.*

SUMMARY. - *All infinite families of $K$-vector spaces* $(V_i)_{i \in I}$ *with the following properties are determinated:* $\dim \bigotimes_{i \in I} V_i = \Pi_{i \in I} \dim V_i$, $\psi(\Pi_{i \in I} B_i) = B$, *where* $\psi$ *is the tensor mapping,* $B_i$ *is a basis of* $V_i$ *and* $B$ *a basis of* $\bigotimes_{i \in I} V_i$. *A characterization, which is formally equal to that stated by the universal tensor product property, is, moreover, given for the $K$-vector space with dimension equal to the product of an arbitrary family of fixed cardinal numbers.*

È ben noto che il prodotto tensoriale $\bigotimes_{i \in I} V_i$ di un numero finito di $K$-spazi vettoriali $V_i (i \in I)$ gode delle seguenti proprietà:

$a$) $\dim \bigotimes_{i \in I} V_i = \Pi_{i \in I} \dim V_i$;

$b$) l'immagine, nell'applicazione tensoriale di $\Pi_{i \in I} V_i$ in $\bigotimes_{i \in I} V_i$, del prodotto di basi dei $V_i (i \in I)$, è una base di $\bigotimes_{i \in I} V_i$.

La $a$) permette di affermare che se $(\alpha_i)_{i \in I}$ è una famiglia finita di numeri cardinali (finiti o transfiniti), il $K$-spazio vettoriale $V$ avente dimensione $\Pi_{i \in I} \alpha_i$ è prodotto tensoriale della famiglia di $K$-spazi vettoriali $(V_i)_{i \in I}$ tali che $\dim V_i = \alpha_i$.

(*) Pervenuto in Redazione il 22 giugno 1971.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

Se ora si considerano anche famiglie infinite di $K$-spazi vettoriali, non mi risulta che siano state affrontate questioni riguardanti la validità o meno delle condizioni $a)$ e $b)$ e la loro eventuale interdipendenza, all'infuori del fatto, già noto, che non è necessariamente verificata la $b)$ ([1], appendice I, n. 1).

In quest'ordine di idee, si determinano, nella presente nota, le famiglie infinite di $K$-spazi vettoriali che soddisfano la $b)$ e si prova che per esse è allora vera anche la $a)$ (n. 3); restano così caratterizzate le famiglie infinite che, relativamente al loro prodotto tensoriale, presentano un comportamento analogo a quello delle famiglie finite.

Per giungere a tale risultato, si introduce, per una arbitraria famiglia $(V_i)_{i \in I}$ non vuota di $K$-spazi vettoriali non nulli, una particolare classe di applicazioni (dette $B$-multilineari) definite su un opportuno sottoinsieme $\Pi^B_{i \in I} V_i$ di $\Pi_{i \in I} V_i$ ed aventi immagine in un $K$-spazio vettoriale; si studiano poi alcune proprietà di tali applicazioni (n. 1).

Nel n. 2, dopo aver mostrato che le applicazioni $B$-multilineari di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in un $K$-spazio vettoriale $V$, comunque fissato, sono tutte e sole le restrizioni a $\Pi^B_{i \in I} V_i$ delle applicazioni multilineari di $\Pi_{i \in I} V_i$ in $V$, si trovano tutte quelle famiglie di $K$-spazi vettoriali, finite od infinite, per le quali ogni applicazione $B$-multilineare è univocamente estendibile in forma multilineare. Ed è proprio questa unicità dell'estensione che assicura, in modo necessario e sufficiente, la validità della $b)$ (n. 3). Di qui si deduce che tutte e sole le famiglie di $K$-spazi vettoriali soddisfacenti la $b)$ sono, oltre a quelle finite, le famiglie infinite che contengono almeno uno spazio nullo o che sono costituite da spazi vettoriali sul campo d'ordine due e « quasi tutti » di dimensione uno. Tali famiglie sono poi tutte e sole quelle il cui prodotto tensoriale verifica la $a)$ e la $b)$ in quanto (come si prova nello stesso n. 3) la $b)$ implica la $a)$.

Per le famiglie infinite che non verificano simultaneamente la $a)$ e la $b)$, si verifica, con opportuni esempi, che esistono dei casi in cui vale la $a)$, ed altri in cui non vale (n. 4).

La non validità incondizionata della $a)$ suggerisce allora il problema di assegnare una caratterizzazione degli spazi vettoriali aventi per dimensione il prodotto di una famiglia, comunque assegnata, di numeri cardinali (finiti o transfiniti); caratterizzazione che, nel caso di una famiglia finita, coincida con quella sopra ricordata. Tale caratterizzazione è conseguita nel n. 5 e viene espressa dalla solita proprietà universale del prodotto tensoriale, qualora al posto di $\Pi_{i \in I} V_i$ e delle applicazioni multilineari vengano considerati, rispettivamente, l'insieme $\Pi^B_{i \in I} V_i$ e le applicazioni $B$-multilineari.

1. Sia $(V_i)_{i \in I}$ un'arbitraria famiglia non vuota di $K$-spazi vettoriali non nulli e, per ogni $i \in I$, sia $B_i = (a_{ij(i)})_{j(i) \in J_i}$ una base di $V_i$.

Posto $B = (B_i)_{i \in I}$ si consideri il seguente sottoinsieme dello spazio prodotto $\Pi_{i \in I} V_i$:

$$\Pi^B_{i \in I} V_i = \{(x_i)_{i \in I} \in \Pi_{i \in I} V_i \mid \exists\, I' \subset I,\ \mathrm{card}\,(I - I') < \aleph_0,\ x_i \in B_i\ \forall\ i \in I'\},$$

cioè l'insieme degli elementi $(x_i)_{i \in I}$ tali che, escluso al più un insieme finito di indici $i$, $x_i$ appartenga alla base $B_i$ di $V_i$.

Dalla definizione di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ discende, in modo ovvio, che $\Pi_{i \in I} B_i \subset \Pi^B_{i \in I} V_i$ e che si ha $\Pi^B_{i \in I} V_i = \Pi_{i \in I} V_i$ se e solo se $I$ è finito.

Fissato ora un qualunque $K$-spazio vettoriale $V$, consideriamo una particolare classe di applicazioni di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V$ dando la seguente:

DEFINIZIONE. Una applicazione $\varphi$ di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V$ si dirà *$B$-multilineare* se gode della seguente proprietà: preso un elemento $(x_i)_{i \in I}$ di $\Pi^B_{i \in I} V_i$, e posto $x_i = \sum_{j(i) \in J_i} \alpha_{ij(i)}\, a_{ij(i)}$ per ogni $i \in I$, si abbia:

$$\varphi\,((x_i)_{i \in I}) = \sum_{(j(i))_{i \in I} \in \Pi_{i \in I} J_i} (\Pi_{i \in I}\, \alpha_{ij(i)})\, \varphi\,((a_{ij(i)})_{i \in I}).$$

L'espressione al secondo membro ha senso qualora (come nella teoria dei prodotti infiniti di numeri reali) s'intenda che il prodotto di infiniti zero o di infiniti uno è zero, rispettivamente, uno.

PROPOSIZIONE 1.1. *Se $\varphi_0$ è una qualunque applicazione dell'insieme $\Pi_{i \in I} B_i$ in $V$, esiste una ed una sola applicazione $B$-multilineare $\varphi$ di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V$ la cui restrizione a $\Pi_{i \in I} B_i$ coincide con $\varphi_0$.*

DIM. Immediata.

La Prop. 1.1., tra l'altro, assicura *l'effettiva esistenza di applicazioni $B$-multilineari per qualunque $B$.*

PROPOSIZIONE 1.2. *Se esiste un'applicazione $B$-multilineare $\psi$ di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V$ godente della proprietà: comunque si fissino un $K$-spazio* *vettoriale $V'$ ed un'applicazione B-multilineare $\varphi$ di $\Pi^B_{i\in I} V_i$ in $V'$, esista una ed una sola applicazione lineare $f$ di $V$ in $V'$ tale che $\varphi = f \circ \psi$, allora $\psi(\Pi^B_{i\in I} V_i)$ è un sistema di generatori di $V$.*

DIM. Sia $V''$ il sottospazio di $V$ generato da $\psi(\Pi^B_{i\in I} V_i)$ e sia $\varphi'$ l'applicazione di $\Pi^B_{i\in I} V_i$ in $V''$ tale che per ogni $x \in \Pi^B_{i\in I} V_i$, $\varphi'(x) = \psi(x)$. Allora, essendo $\varphi'$ banalmente $B$-multilineare, per le ipotesi fatte sulla $\psi$, si ha che esiste un'applicazione lineare $f'$ di $V$ in $V''$ tale che $\varphi' = f' \circ \psi$. Indicata con $g$ l'applicazione d'immersione di $V''$ in $V$ si ha che $\psi = g \circ \varphi'$ e quindi $\psi = g \circ (f' \circ \psi) = (g \circ f') \circ \psi$.

D'altra parte, indicata con $J$ l'identità di $V$, si ha che $\psi = J \circ \psi$ per cui $J \circ \psi = (g \circ f') \circ \psi$. Essendo $J$ e $g \circ f'$ applicazioni lineari, tenuto conto dell'unicità della $f$, presi $V' = V$, $\varphi = \psi$, si ha che $J = g \circ f'$. Di qui discende che $g$ è suriettiva; pertanto $V'' = V$.

2. Le applicazioni introdotte nel n. 1 possono venir caratterizzate mediante le applicazioni multilineari dello spazio $\Pi_{i\in I} V_i$; più precisamente proveremo la:

PROPOSIZIONE 2.1. *Le applicazioni B-multilineari di $\Pi^B_{i\in I} V_i$ in $V$ sono tutte e sole le restrizioni a $\Pi^B_{i\in I} V_i$ delle applicazioni multilineari di $\Pi_{i\in I} V_i$ in $V$.*

DIM. *a*) Se $\varphi_0$ è una qualunque applicazione $B$-multilineare di $\Pi^B_{i\in I} V_i$ in $V$, l'applicazione $\varphi$ di $\Pi_{i\in I} V_i$ in $V$ definita da:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) \text{ per } x \in \Pi^B_{i\in I} V_i, \quad \varphi(x) = 0 \text{ per } x \notin \Pi^B_{i\in I} V_i$$

è ovviamente una estensione di $\varphi_0$ su $\Pi_{i\in I} V_i$ e risulta, come facilmente si verifica, multilineare.

*b*) Sia $(x_i)_{i\in I} \in \Pi^B_{i\in I} V_i - \Pi_{i\in I} B_i$. Esisterà allora un sottoinsieme $I' \subset I$ tale che $x_i \in B_i$ per ogni $i \in I'$ e $x_i \notin B_i$ per ogni $i \notin I'$; inoltre è $0 < \operatorname{card}(I - I') < \aleph_0$. Detta allora $\varphi$ una qualsiasi applicazione multilineare di $\Pi_{i\in I} V_i$ in $V$, si può scrivere, in base a [2], Cap. III, n. 10, lemma 3:

$$\varphi((x_i)_{i\in I}) = \sum_{(j(i))_{i\in I-I'} \in \Pi_{i\in I-I'} J_i} (\Pi_{i\in I-I'} \alpha_{ij(i)}) \, \varphi((a_{ij(i)})_{I'})$$

ove la $I'$ posta accanto ad $a_{ij(i)}$ sta per indicare che $a_{ij(i)}$ coincide con $x_i$ per ogni $i \in I'$.

Osservando che le famiglie di scalari $(\alpha_{ij(i)})_{i \in I}$, associate a elementi di $\Pi_{i \in I} B_i$ aventi almeno una coordinata relativa ad $I'$ diversa dalla corrispondente coordinata di $(x_i)_{i \in I}$, hanno necessariamente almeno un elemento nullo, la precedente uguaglianza può scriversi:

$$\varphi\left((x_i)_{i \in I}\right) = \sum_{(j(i))_{i \in I} \in \Pi_{i \in I} J_i} \left(\Pi_{i \in I}\, \alpha_{ij(i)}\right) \varphi\left((a_{ij(i)})_{i \in I}\right).$$

Data l'arbitrarietà di $(x_i)_{i \in I}$ in $\Pi^B_{i \in I} V_i - \Pi_{i \in I} B_i$, e atteso che per qualunque $(x_i)_{i \in I}$ appartenente a $\Pi_{i \in I} B_i$ si ha banalmente:

$$\varphi\left((x_i)_{i \in I}\right) = \sum_{(j(i))_{i \in I} \in \Pi_{i \in I} J_i} \left(\Pi_{i \in I}\, \alpha_{ij(i)}\right) \varphi\left((a_{ij(i)})_{i \in I}\right)$$

ne segue la tesi.

Visto che ogni applicazione $B$-multilineare è estendibile in una applicazione multilineare, sorge il problema di vedere in quali casi è assicurata l'unicità di una tale estensione.

Una prima risposta a tale quesito viene fornita dall'osservazione che se la famiglia di spazi vettoriali considerata è finita, allora l'insieme $\Pi^B_{i \in I} V_i$ coincide con lo spazio $\Pi_{i \in I} V_i$ onde ogni applicazione $B$-multilineare è univocamente estendibile in un'applicazione multilineare (infatti essendo $I$ finito, la nozione di $B$-multilinearità coincide con quella di multilinearità). Nel caso di famiglie infinite invece la risposta viene data dalla:

Proposizione 2.2. *Se la famiglia $(V_i)_{i \in I}$ è infinita, le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

*a) Comunque si fissi un $K$-spazio vettoriale $V$, ogni applicazione $B$-multilineare di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V$ è univocamente estendibile in un'applicazione multilineare di $\Pi_{i \in I} V_i$ in $V$;*

*b) Tutti gli spazi vettoriali della famiglia, eccetto al più un numero finito, hanno cardinalità due.*

Dim. $a) \Longrightarrow b)$. Supponiamo, per assurdo, che per infiniti $V_h$ ($h \in H \subseteq I$) si abbia card $V_h > 2$. Fissato, in ogni $V_h$ ($h \in H$) un elemento $x^0_h \neq 0$ non contenuto in $B_h$ e, in ogni $V_k$ ($k \in I - H$) l'elemento non nullo $x^0_k$, si ha che l'elemento $(x^0_i)_{i \in I} \in \Pi_{i \in I} V_i$ non è in $\Pi^B_{i \in I} V_i$. Per ogni $i \in I$ fissiamo poi una base $B^0_i$ di $V_i$ contenente $x^0_i$ e, posto $B^0 = (B^0_i)_{i \in I}$, consideriamo il sottoinsieme $\Pi^{B^0}_{i \in I} V_i$ di $\Pi_{i \in I} V_i$.

Ciò premesso, se $V$ è un $K$-spazio vettoriale non nullo e $\varphi_0$ è una applicazione $B$-multilineare di $\Pi^B_{i\in I} V_i$ in $V$, mostreremo che $\varphi_0$ non è estendibile, in modo unico, in una applicazione multilineare. A tale scopo sia $\varphi'$ l'applicazione di $\Pi_{i\in I} B^0_i$ in $V$ così definita: qualunque sia l'elemento $x \in \Pi_{i\in I} B^0_i$ si abbia

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{se } x \in \Pi^B_{i\in I} V_i \\ u \neq 0 \text{ qualunque} & \text{se } x = (x^0_i)_{i\in I} \\ 0 & \text{se } x \notin (\Pi^B_{i\in I} V_i) \cup \{(x^0_i)_{i\in I}\}. \end{cases}$$

Per la Prop. 1.1., la $\varphi'$ è estendibile in un'applicazione $B^0$-multilineare $\varphi'_0$ di $\Pi^{B^0}_{i\in I} V_i$ in $V$.

Con calcoli alquanto laboriosi ma banali, si prova che le applicazioni $\varphi_0$ e $\varphi'_0$ coincidono sull'insieme $(\Pi^B_{i\in I} V_i) \cap (\Pi^{B^0}_{i\in I} V_i)$, per cui può considerarsi l'applicazione $\psi$ di $\Pi_{i\in I} V_i$ in $V$ definita da:

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_0(x) & \text{se } x \in \Pi^B_{i\in I} V_i \\ \varphi'_0(x) & \text{se } x \in \Pi^{B^0}_{i\in I} V_i \\ 0 & \text{se } x \notin (\Pi^B_{i\in I} V_i) \cup (\Pi^{B^0}_{i\in I} V_i). \end{cases}$$

La $\psi$ è ovviamente un'estensione della $\varphi_0$ ed è, come facilmente si verifica, multilineare. Essa è poi diversa dall'estensione multilineare della $\varphi_0$ costruita nella dimostrazione della Prop. 2.1., onde l'assurdo.

$b) \Longrightarrow a)$. Se $(x_i)_{i\in I}$ non appartiene a $\Pi^B_{i\in I} V_i$, dalla stessa definizione di $\Pi^B_{i\in I} V_i$, segue che esistono infiniti indici $h \in I$ tali che $x_h \notin B_h$. Ma per ipotesi vi è solo un numero finito di spazi vettoriali $V_i$ aventi cardinalità maggiore di due e quindi $(x_i)_{i\in I}$ deve possedere (infinite) coordinate nulle.

Pertanto, fissati un qualunque $K$-spazio vettoriale $V$ e una qualunque applicazione $B$-multilineare $\varphi_0$ di $\Pi^B_{i\in I} V_i$ in $V$, l'unica estensione multilineare di $\varphi_0$ è quella che assume valore zero in ogni elemento fuori di $\Pi^B_{i\in I} V_i$.

La proposizione è così completamente dimostrata.

3. Diamo ora una applicazione dei risultati precedenti alla teoria dei prodotti tensoriali.

Data una qualunque famiglia $(V_i)_{i \in I}$ di $K$-spazi vettoriali non nulli, sia $\psi$ l'applicazione tensoriale di $\Pi_{i \in I} V_i$ nel prodotto tensoriale $\bigotimes_{i \in I} V_i$ dei $V_i$ e, per ogni $i \in I$, sia $B_i = (a_{ij(i)})_{j(i) \in J_i}$ una base di $V_i$.

Proveremo ora, estendendo una ben nota proprietà di $\bigotimes_{i \in I} V_i$ nel caso di $I$ finito, il seguente:

LEMMA 3.1. *Il sottoinsieme $\psi(\Pi_{i \in I} B_i)$ di $\bigotimes_{i \in I} V_i$ è linearmente indipendente e la restrizione di $\psi$ a $\Pi_{i \in I} B_i$ è una iniezione.*

DIM. Siano $V$ un $K$-spazio vettoriale avente dimensione uguale alla cardinalità di $\Pi_{i \in I} B_i$ e $A$ una base di $V$. Detta $\eta$ una biiezione di $\Pi_{i \in I} B_i$ su $A$ si ha che $\eta$, per le proposizioni 1.1.,2.1., è estendibile in un'applicazione multilineare $\varphi$ di $\Pi_{i \in I} V_i$ in $V$. Ne segue che esiste un'applicazione lineare $f$ di $\bigotimes_{i \in I} V_i$ in $V$ tale che $\varphi = f \circ \psi$. Allora $\varphi(\Pi_{i \in I} B_i) = f(\psi(\Pi_{i \in I} B_i))$, onde $\psi(\Pi_{i \in I} B_i)$ viene mutato, mediante la $f$, in un sistema linearmente indipendente di $V$; pertanto $\psi(\Pi_{i \in I} B_i)$ è un sistema linearmente indipendente di $\bigotimes_{i \in I} V_i$.

Osservato poi che l'applicazione $\varphi$ è iniettiva su $\Pi_{i \in I} B_i$ si deduce facilmente anche la seconda parte del lemma.

COROLLARIO 3.1. *Se $\psi(\Pi_{i \in I} B_i)$ genera $\bigotimes_{i \in I} V_i$, il prodotto tensoriale ha dimensione uguale al prodotto delle dimensioni degli spazi $V_i$.*

Sorge pertanto la questione di vedere in quali casi $\psi(\Pi_{i \in I} B_i)$ è una base di $\bigotimes_{i \in I} V_i$. Il lemma che segue offre una condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò avvenga.

LEMMA 3.2. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

*a) Comunque si fissi un $K$-spazio vettoriale $V$, ogni applicazione $B$-multilineare di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V$ è univocamente estendibile in un'applicazione multilineare di $\Pi_{i \in I} V_i$ in $V$;*

*b) $\psi(\Pi_{i \in I} B_i)$ è una base di $\bigotimes_{i \in I} V_i$.*

DIM. $a) \Longrightarrow b)$. Sia $\psi_0$ la restrizione della $\psi$ a $\Pi^B_{i \in I} V_i$; per la Prop. 2.1., la $\psi_0$ è $B$-multilineare. Facciamo ora vedere che la $\psi_0$ soddisfa alle ipotesi della Prop. 1.2.; a tale scopo siano $V'$ un $K$-spazio vettoriale e $\varphi$ un'applicazione $B$-multilineare di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V'$. Indicata con $\varphi'$ un'applicazione multilineare di $\Pi_{i \in I} V_i$ in $V'$, estensione della $\varphi$ (Prop. 2.1.), esisterà una ed una sola applicazione lineare $f$ di $\bigotimes_{i \in I} V_i$ in $V'$ tale che $\varphi' = f \circ \psi$; quindi, a fortiori, $\varphi = f \circ \psi_0$.

Per mostrare l'unicità della $f$ supponiamo che $f'$ sia una qualunque applicazione lineare di $\bigotimes_{i\in I} V_i$ in $V'$ tale che $\varphi = f' \circ \psi_0$. Considerata l'applicazione $f' \circ \psi$ di $\Pi_{i\in I} V_i$ in $V'$, si vede subito che essa è multilineare e che estende l'applicazione $B$-multilineare $\varphi$; per l'unicità dell'estensione si ha allora $\varphi' = f' \circ \psi = f \circ \psi$ e quindi $f = f'$.

Poichè, dunque, $\psi_0$ soddisfa alle ipotesi della Prop. 1.2., ne discende che l'insieme $\psi_0(\Pi^B_{i\in I} V_i)$ è un sistema di generatori di $\bigotimes_{i\in I} V_i$. Osservato infine che $\psi_0(\Pi_{i\in I} B_i)$ genera $\psi_0(\Pi^B_{i\in I} V_i)$, dal Lemma 3.1., segue la tesi.

$b) \Longrightarrow a)$. È immediato.

COROLLARIO 3.2. *Le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

*a)* $\psi(\Pi_{i\in I} B_i)$ *è una base di* $\bigotimes_{i\in I} V_i$;

*b) Comunque si fissi un $K$-spazio vettoriale $V$, ogni applicazione multilineare di $\Pi_{i\in I} V_i$ in $V$ è univocamente individuata dai valori assunti su $\Pi_{i\in I} B_i$.*

DIM. Immediata conseguenza della Prop. 1.1. e del Lemma 3.2..

Dal Corollario 3.1. e dal Lemma 3.2. discende il ben noto:

TEOREMA 3.1. *Se la famiglia $(V_i)_{i\in I}$ è finita, $\bigotimes_{i\in I} V_i$ ha dimensione uguale al prodotto delle dimensioni degli spazi vettoriali $V_i$ e $\psi(\Pi_{i\in I} B_i)$ è una sua base.*

La Prop. 2.2. ed il Lemma 3.2. forniscono invece il seguente:

TEOREMA 3.2. *Se la famiglia $(V_i)_{i\in I}$ è infinita, sono equivalenti le proposizioni:*

*a)* $\psi(\Pi_{i\in I} B_i)$ *è una base di* $\bigotimes_{i\in I} V_i$;

*b) Tutti gli spazi vettoriali della famiglia, eccetto al più un numero finito, hanno cardinalità due.*

Tenuto conto del Corollario 3.1., il Teorema 3.2. fornisce tutte e sole quelle famiglie infinite di $K$-spazi vettoriali non nulli che presentano un comportamento analogo a quello espresso dal Teorema 3.1. relativamente a famiglie finite. Se poi si osserva che le famiglie di $K$-spazi vettoriali contenenti almeno un $K$-spazio nullo soddisfano ovviamente alla tesi del Teorema 3.1., si può affermare che *tutte e sole le famiglie di $K$-spazi vettoriali soddisfacenti alla predetta tesi sono:*

$\alpha$) *Le famiglie finite*;

$\beta$) *Le famiglie infinite contenenti almeno uno spazio nullo*;

$\gamma$) *Le famiglie infinite in cui tutti gli spazi, escluso al più un numero finito di essi, hanno cardinalità due* (cioè le famiglie di spazi vettoriali costruiti sul campo di ordine 2, aventi «quasi tutti» dimensione 1).

4. Sempre in relazione ai risultati del n. 3, e ricordando che la condizione $a$) del Teorema 3.2. implica la condizione $a'$) $\dim \bigotimes_{i \in I} V_i = \Pi_{i \in I} \dim V_i$, si presenta il quesito di vedere se, viceversa, la $a'$) implichi la $a$) (naturalmente sempre nel caso di $I$ infinito, essendo banale nel caso finito). Mostreremo che ciò non accade, fornendone un controesempio. A tale scopo consideriamo una famiglia infinita $(V_i)_{i \in I}$ in cui ogni $V_i$ è lo spazio vettoriale di dimensione 2 sul campo di resti mod $p$ ($p$ primo). Per il Lemma 3.1. si ha $\dim \bigotimes_{i \in I} V_i \geq \operatorname{card} \Pi_{i \in I} B_i = 2^{\bar{\bar{I}}}$; d'altra parte valgono le disuguaglianze $\dim \bigotimes_{i \in I} V_i \leq \operatorname{card} \psi(\Pi_{i \in I} V_i) \leq \operatorname{card} \Pi_{i \in I} V_i = 2^{\bar{\bar{I}}}$, in base alla (2.4) del Cap. XVI di [3]. Ne segue che $\dim \bigotimes_{i \in I} V_i = = 2^{\bar{\bar{I}}} = \Pi_{i \in I} \dim V_i$. Tenuto allora conto della $\gamma$) del numero precedente, si conclude nel modo voluto.

Può restare ora il dubbio che la $a'$) sia sempre verificata. L'esempio seguente conferma che la $a'$) può effettivamente non valere. Sia infatti $(V_i)_{i \in I}$ una famiglia infinita in cui ogni $V_i$ è lo spazio vettoriale di dimensione 1 su un campo diverso da quello d'ordine 2. Supposto, per assurdo, che $\dim \bigotimes_{i \in I} V_i = \Pi_{i \in I} \dim V_i = 1$, si avrebbe che $\psi(\Pi_{i \in I} B_i)$ è una base di $\bigotimes_{i \in I} V_i$, il che è in contraddizione con la $\gamma$) del numero precedente.

5. Data una famiglia finita $(\alpha_i)_{i \in I}$ di cardinalità $\alpha_i$, lo spazio vettoriale $V$ di dimensione $d = \Pi_{i \in I} \alpha_i$ resta caratterizzato, in relazione agli spazi $V_i (i \in I)$ tali che $\dim V_i = \alpha_i$, come prodotto tensoriale della famiglia $(V_i)_{i \in I}$. Nel caso di $I$ infinito, i risultati precedenti assicurano che la predetta caratterizzazione cade in difetto per le famiglie di numeri cardinali non nulli (sussiste invece, come banalmente si prova, nel caso delle famiglie infinite contenenti almeno uno zero).

Tuttavia è da notare che essa continua formalmente a sussistere anche per tali famiglie, qualora si considerino, al posto di $\Pi_{i \in I} V_i$, il sottoinsieme $\Pi^B_{i \in I} V_i$ (con $B = (B_i)_{i \in I}$ e $B_i$ base, comunque fissata, di $V_i$) e al posto delle applicazioni multilineari quelle $B$-multilineari, introdotte al n. 1.

Fissata infatti una qualsiasi famiglia non vuota $(\alpha_i)_{i \in I}$ di numeri cardinali non nulli, proveremo il seguente:

TEOREMA 5.1. *Se $V$ è un $K$-spazio vettoriale, le seguenti proposizioni sono equivalenti.*

*a) $\dim V = \Pi_{i \in I} \alpha_i$;*

*b) Esiste un'applicazione $B$-multilineare $\psi$ di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V$ tale che, comunque si fissino un $K$-spazio vettoriale $V'$ ed un'applicazione $B$-multilineare $\varphi$ di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V'$, esista una ed una sola applicazione lineare $f$ di $V$ in $V'$ per cui $\varphi = f \circ \psi$.*

DIM. $a) \Longrightarrow b)$. Sia $(t_h)_{h \in H}$ una base di $V$; allora, per ipotesi, esiste una biiezione $\eta$ di $\Pi_{i \in I} B_i$ su $(t_h)_{h \in H}$. Per la Prop. 1. 1. esiste un'applicazione $B$-multilineare $\psi$ di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V$ la cui restrizione a $\Pi_{i \in I} B_i$ è $\eta$. Facciamo ora vedere che tale applicazione $\psi$ soddisfa alla condizione richiesta. Siano infatti $V'$ un $K$-spazio vettoriale e $\varphi$ un'applicazione $B$-multilineare di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V'$. Si consideri l'applicazione $f_0$ di $(t_h)_{h \in H}$ in $V'$ così definita: qualunque sia $x \in (t_h)_{h \in H}$, si abbia

$$f_0(x) = (\varphi \circ \eta^{-1})(x).$$

Tale applicazione può estendersi, per noti teoremi, in un'applicazione lineare $f$ di $V$ in $V'$ e si ha, per essa, $\varphi = f \circ \psi$.

Detta poi $f'$ un'applicazione lineare di $V$ in $V'$ tale che $\varphi = f' \circ \psi$, risulta $f \circ \psi = f' \circ \psi$ e quindi, per ogni elemento $x \in \Pi^B_{i \in I} V_i$, $f(\psi(x)) = f'(\psi(x))$, onde $f = f'$ su $\psi(\Pi^B_{i \in I} V_i)$. Ma a tale insieme appartiene la base $(t_h)_{h \in H}$ di $V$ e quindi $f = f'$.

$b) \Longrightarrow a)$. Sia $\psi$ un'applicazione $B$-multilineare di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V$ soddisfacente la $b)$. Preso come spazio $V'$ uno spazio di dimensione $\Pi_{i \in I} \alpha_i$, esiste, per la già provata implicazione $a) \Longrightarrow b)$, una applicazione $B$-multilineare $\psi'$ di $\Pi^B_{i \in I} V_i$ in $V'$ tale che esista una ed una sola applicazione lineare $f'$ di $V'$ in $V$ per cui $\psi = f' \circ \psi'$.

D'altra parte, assunta come $\varphi$ l'applicazione $\psi'$, esiste, per l'ipotesi, una ed una sola applicazione lineare $f$ di $V$ in $V'$ per cui $\psi' = f \circ \psi$. Si ha dunque $\psi' = (f \circ f') \circ \psi'$, $\psi = (f' \circ f) \circ \psi$ e quindi l'applicazione lineare $f \circ f'$ coincide con l'identità $J'$ di $V'$ su $\psi'(\Pi^B_{i \in I} V_i)$ e l'applicazione lineare $f' \circ f$ con l'identità $J$ di $V$

su $\psi\,(\Pi^B_{i \in I}\, V_i)$. Ma per la Prop. 1.2., $\psi'\,(\Pi^B_{i \in I}\, V_i)$ e $\psi\,(\Pi^B_{i \in I}\, V_i)$ sono sistemi di generatori rispettivamente di $V'$ e di $V$ onde sarà $f \circ f' = J'$, $f' \circ f = J$ e da qui, banalmente, si trae che $f$ è un isomorfismo tra $V$ e $V'$. Pertanto, dim $V = \Pi_{i \in I}\, \alpha_i$.

Il teorema è così completamente dimostrato.

## BIBLIOGRAFIA


[1] N. BOURBAKI, *Algèbre,* Chapitre III-Algèbre Multilinèaire, Hermann & C., Paris (1958).

[2] C. CHEVALLEY, *Concetti fondamentali di Algebra,* Feltrinelli, Milano (1964).

[3] W. SIERPINSKI, *Cardinal and ordinal numbers,* Warszawa (1965).