SUR UNE ÉQUATION DE TYPE FREDHOLM DÉFINIE DANS DES ALGÈBRES UNIVERSELLES TOPOLOGIQUES (*)

par IULIUS GY. MAURER (à Cluj)
et MIKLÓS SZILÁGYI (à Tg. Mureş) (**)

SOMMARIO. - *Si studiano certi problemi collegati ad una equazione di tipo Fredholm nelle algebre universali topologiche.*

SUMMARY. - *Certain problems concerning a Fredholm type equation defined on a topological universal algebra are studied.*

Dans l'ouvrage [4] nous avons étudié certaines équations définies dans des algèbres universelles et nous avons établi quelques théorèmes, qui généralisent dans ce cadre générale le théorème d'altérnative de FREDHOLM, bien connu dans l'analyse fonctionnelle (voir par ex. [5]). L'un de ces résultats sera généralisé dans cette note pour le cas des algèbres universelles topologiques, étudiées par A. I. MALCEV [3].

Observons toutefois que toutes les notions topologiques seront utilisées dans leur sens habituel (voir par ex. la monographie de J. L. KELLEY [1]) et que nous accepterons dans le cas des algèbres universelles la terminologie de A. G. KUROS [2]. Toutes les applications étudiées seront considérées comme des opérateurs à droite.

(*) Pervenuto in Redazione il 3 giugno 1971.

(**) Indirizzi degli Autori :
IULIUS GY. MAURER, Institut Mathématique, Université — Cluj (Roumanie).
MIKLÓS SZILÁGYI, Faculté de Mathématique, Institut Pédagogique — Tg. Mureş (Roumanie).

Soit (G, Ω_G) une *algèbre universelle*, où Ω_G représente l'ensemble d'opérations n-aires, définies dans l'ensemble G, où n a des valeurs entières non negatives. L'élément de G qui correspond dans l'opération non-nullaire $\omega \in \Omega_G$ à un système ordonné $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ d'éléments $a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ sera noté par $a_1 a_2 \dots a_n \omega$. Soit ensuite $(G, \mathcal{T}_G)$ un *espace topologique*, où $\mathcal{T}_G$ désigne la topologie introduite sur G. Supposons enfin que *toutes les opérations non-nullaires* $\omega \in \Omega$ *sont continues* par rapport à la topologie $\mathcal{T}_G$. Ce signifie que pour chaque voisinage $V_{a_1 a_2 \dots a_n \omega}$ de $a_1 a_2 \dots a_n \omega \in G$ il existe des voisinages V_{a_i} des éléments $a_i \in G$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, tels que $V_{a_1} V_{a_2} \dots \dots V_{a_n} \omega \subseteq V_{a_1 a_2 \dots a_n \omega}$, c'est-à-dire que $a_1' a_2' \dots a_n' \omega \in V_{a_1 a_2 \dots a_n \omega}$ pour tous les éléments $a_i' \in V_{a_i} (i = 1, 2, \dots, n)$. Nous allons dénommé *algèbre universelle topologique* une structure $(G, \Omega_G, \mathcal{T}_G)$ ayant les trois propriétés mentionnées ci-dessus. Deux algèbres universelles topologiques seront dénommées *de même type*, si elles sont de même type au sens algébrique. Il est bien connu que les domains des opérations de telles algèbres peuvent être identifiés.

Soient $(G, \Omega, \mathcal{T}_G)$ et $(G', \Omega, \mathcal{T}_{G'})$ *deux algèbres universelles de même type*. Soit $\varphi : G \longrightarrow G'$ *une application continue arbitraire*. Nous considérons *une équation*

$$x \varphi = x' \tag{1}$$

où x' est un élément arbitrairement fixé de G'. Le problème que nous voulons resoudre ici est de trouver *des conditions qui doivent être satisfaites pour la résolubilité en x de l'équation* (1).

Pour obtenir un résultat du type mentionné dans l'introduction, nous considérons une troisième algèbre universelle topologique $(\mathcal{G}, \Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{G}})$ quelconque, de même type que les algèbres universelles $(G, \Omega, \mathcal{T}_G)$ et $(G', \Omega, \mathcal{T}_{G'})$. Désignons par $O_G, O_{G'}$ et $O_{\mathcal{G}}$ des éléments distingués, fixes, mais arbitrairement choisis dans G, G' et $\mathcal{G}$. Soient $\mathcal{H} = \mathcal{G}^G$ et $\mathcal{H}' = \mathcal{G}^{G'}$ les ensembles de toutes les applications $\alpha : G \longrightarrow \mathcal{G}$ et $\alpha' : G' \longrightarrow \mathcal{G}$. On désigne par $\theta \in \mathcal{H}$ et $\theta' \in \mathcal{H}'$ les applications définies respectivement par les égalités $G \theta = O_{\mathcal{G}}$ et $G' \theta' = O_{\mathcal{G}}$. Les *noyaux* N_α et $N_{\alpha'}$ des applications $\alpha \in \mathcal{H}$ et $\alpha' \in \mathcal{H}'$ seront définis respectivement de la manière suivante:

$$N_\alpha = \} x \mid x \in G, x \alpha = O_{\mathcal{G}} \{ \text{ et } N_{\alpha'} = \} x' \mid x' \in G', x' \alpha' = O_{\mathcal{G}} \}.$$

Soient $\mathcal{H}_c$ et $\mathcal{H}_c'$ les sous-ensembles de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{H}'$, formés respectivement par toutes les applications continues $\alpha : G \longrightarrow \mathcal{G}$ et $\alpha' : G' \longrightarrow \mathcal{G}$.

En tenant compte du fait que les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ peuvent être regardés comme des produits cartésiens

$$\mathcal{H} = \mathop{\mathsf{X}}_{\nu \in G} \mathcal{G}_\nu \, (\mathcal{G}_\nu = \mathcal{G} (\forall \, \nu \in G)) \text{ et } \mathcal{H}' = \mathop{\mathsf{X}}_{\nu \in G'} \mathcal{G}_\nu \, (\mathcal{G}_\nu = \mathcal{G} (\forall \, \nu \in G')),$$

on peut introduire en $\mathcal{H}$ respectivement en $\mathcal{H}'$ un système d'opérations, en fonction des opérations définies en $(\mathcal{G}, \Omega)$, au sens habituel : si $\omega \in \Omega$ est une operation n-aire ($n \neq 0$) définie dans $\mathcal{G}$, alors, dans le cas d'un système ordonné quelconque d'éléments $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{H}$ respectivement $\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_n' \in \mathcal{H}'$, on pose

$$x \, (\alpha_1 \, \alpha_2 \ldots \alpha_n \, \omega) = (x \, \alpha_1) \, (x \, \alpha_2) \ldots (x \, \alpha_n) \, \omega \qquad (\forall \, x \in G), \tag{2}$$

respectivement

$$x' \, (\alpha_1' \, \alpha_2' \ldots \alpha_n' \, \omega) = (x' \, \alpha_1') \, (x' \, \alpha_2') \ldots (x' \, \alpha_n') \, \omega \qquad (\forall \, x' \in G'). \tag{2'}$$

Si $n = 0$, alors on désigne par O_ω l'élément distingué en $\mathcal{G}$ par l'opération ω; soient α_ω et α_ω' les éléments distingués par ω en $\mathcal{H}$ respectivement en $\mathcal{H}'$, pour lesquels nous avons $G \, \alpha_\omega = O_\omega$ respectivement $G' \, \alpha_\omega' = O_\omega$. Par ces définitions *$\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deviennent des algèbres universelles de même type que $\mathcal{G}$.*

D'autre part nous introduisons les topologies produit $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ respectivement $\mathcal{T}_{\mathcal{H}'}$ dans les ensembles $\mathcal{H}$ respectivement $\mathcal{H}'$ par rapport à la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$, définie sur $\mathcal{G}$. Ainsi *$\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deviennent des espaces topologiques.* On démontre sans peine (voir [6]) la continuité des opérations $\omega \in \Omega$ définies dans $\mathcal{H}$ respectivement dans $\mathcal{H}'$, d'où il résulte que *$(\mathcal{H}, \Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})$ et $(\mathcal{H}', \Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{H}'})$ sont des algèbres universelles topologiques de même type.*

Si on désigne par

$$\mathcal{T}_{\mathcal{H}_c} = \{ \mathcal{H}_c \cap V \mid V \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}} \} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_{\mathcal{H}_c'} = \{ \mathcal{H}_c' \cap V \mid V \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}'} \}$$

les relativisations respectives des topologies $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{H}'}$ par rapport aux sous-ensembles $\mathcal{H}_c \subseteq \mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_c' \subseteq \mathcal{H}'$, alors on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *$(\mathcal{H}_c, \Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{H}_c})$ respectivement $(\mathcal{H}_c', \Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{H}_c'})$ sont des sous-algèbres* (non nécessairement fermées) *des algèbres universelles topologiques $(\mathcal{H}, \Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{H}})$ respectivement $(\mathcal{H}', \Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{H}'})$.*

Démonstration. $(\mathcal{H}_c, \mathcal{T}_{\mathcal{H}_c})$ et $(\mathcal{H}'_c, \mathcal{T}_{\mathcal{H}'_c})$ sont évidement des espaces topologiques. Il faut donc démontrer que pour toutes les opérations n-aires $\omega \in \Omega$, on a $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \omega \in \mathcal{H}_c$ et $\alpha'_1 \alpha'_2 \dots \alpha'_n \omega \in \mathcal{H}'_c$, si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{H}_c$ et $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n \in \mathcal{H}'_c$. Démontrons cette propriété dans le cas de $\mathcal{H}_c$. Soit x un élément arbitraire de G et désignons par $V_{x(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \omega)}$ un voisinage quelconque de l'élément $x(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \omega) \in \mathcal{G}$. Nous voulons démontrer l'existence d'un voisinage V_x de $x \in G$, tel que $V_x(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \omega) \subseteq V_{x(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \omega)}$. En effet, conformément à la définition des opérations ω dans $\mathcal{H}$, nous avons $V_{x(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \omega)} = V_{(x\alpha_1)(x\alpha_2)\dots(x\alpha_n)\omega}$. L'opération ω étant continue, il s'ensuit l'existence de certains voisinages $V_{x\alpha_1}, V_{x\alpha_2}, \dots, V_{x\alpha_n}$ des éléments $x\alpha_1, x\alpha_2, \dots, x\alpha_n \in \mathcal{G}$, tels que

$$V_{x\alpha_1} V_{x\alpha_2} \dots V_{x\alpha_n} \omega \subseteq V_{(x\alpha_1)(x\alpha_2)\dots(x\alpha_n)\omega} = V_{x(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \omega)} . \tag{3}$$

En tenant compte du fait que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{H}_c$, il résulte l'existence de voisinages $V_x^{(1)}, V_x^{(2)}, \dots, V_x^{(n)}$ de $x \in G$, pour lesquels les relations $V_x^{(1)} \alpha_1 \subseteq V_{x\alpha_1}$, $V_x^{(2)} \alpha_2 \subseteq V_{x\alpha_2}, \dots, V_x^{(n)} \alpha_n \subseteq V_{x\alpha_n}$ sont vraies. Il en résulte que $V_x = V_x^{(1)} \cap V_x^{(2)} \cap \dots \cap V_x^{(n)}$ est un voisinage de $x \in G$, tel que $V_x \alpha_i \subseteq V_{x\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Nous avons par conséquent en tenant compte aussi de la relation (3):

$$V_x(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \omega) \subseteq (V_x \alpha_1)(V_x \alpha_2) \dots (V_x \alpha_n) \omega \subseteq$$

$$\subseteq V_{x\alpha_1} V_{x\alpha_2} \dots V_{x\alpha_n} \omega \subseteq V_{x(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \omega)} .$$

Dans le cas de $\mathcal{H}'_c$, on démontre la validité de cette propriété d'une manière analogue.

Considérons maintenant l'application continue $\varphi : G \longrightarrow G'$. Nous faisons correspondre à tout $\alpha' \in \mathcal{H}'_c$ un $\alpha \in \mathcal{H}_c$, unique, conformément au diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & G' \arrow[d, "\alpha'"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Celà signifie que

$$\alpha = \varphi * \alpha', \tag{4}$$

où $\varphi * \alpha'$ représente le produit des applications φ et α' au sens habituel :

(5) $$x(\varphi * \alpha') = (x\varphi)\alpha' \qquad (\forall\, x \in G).$$

Soit $\varphi^* : \mathcal{H}'_c \longrightarrow \mathcal{H}_c$ une application, définie par l'égalité

(6) $$\alpha = \alpha'\varphi^* \qquad (\forall\, \alpha' \in \mathcal{H}'_c).$$

Ainsi, *on peut attacher à l'application continue* $\varphi : G \longrightarrow G'$ *une application* $\varphi^* : \mathcal{H}'_c \longrightarrow \mathcal{H}_c$ *uniquement déterminée.* On déduit aisément des égalités (4), (5) et (6) que

(7) $$x(\alpha'\varphi^*) = x\alpha = x(\varphi * \alpha') = (x\varphi)\alpha' \qquad (\forall\, x \in G).$$

Observons que nous désignerons par N_{φ^*} le noyau de φ^* :

$$N_{\varphi^*} = \{\alpha' \mid \alpha' \in \mathcal{H}'_c,\ \alpha'\varphi^* = \theta\}.$$

THÉORÈME 2. $\varphi^* : \mathcal{H}'_c \longrightarrow \mathcal{H}_c$ *est une application homomorphe et continue de* $(\mathcal{H}'_c, \Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{H}'_c})$ *en* $(\mathcal{H}_c, \Omega, \mathcal{T}_{\mathcal{H}_c})$.

DÉMONSTRATION. Soit ω une operation n-aire quelconque définie dans $\mathcal{H}'_c$ et $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n$ un système arbitraire d'éléments de $\mathcal{H}'_c$. En utilisant les formules (7), (2) et (2′), on obtient pour tout $x \in G$:

$$\begin{aligned} x[(\alpha'_1\alpha'_2 \dots \alpha'_n\omega)\varphi^*] &= x[\varphi * \alpha'_1\alpha'_2 \dots \alpha'_n\omega] = (x\varphi)(\alpha'_1\alpha'_2 \dots \alpha'_n\omega) = \\ &= [(x\varphi)\alpha'_1][(x\varphi)\alpha'_2] \dots [(x\varphi)\alpha'_n]\,\omega = [x(\varphi * \alpha'_1)][x(\varphi * \alpha'_2)] \dots \\ &\dots [x(\varphi * \alpha'_n)]\,\omega = [x(\alpha'_1\varphi^*)][x(\alpha'_2\varphi^*)] \dots [x(\alpha'_n\varphi^*)]\,\omega = \\ &= x[(\alpha'_1\varphi^*)(\alpha'_2\varphi^*) \dots (\alpha'_n\varphi^*)\,\omega]. \end{aligned}$$

Donc

$$(\alpha'_1\alpha'_2 \dots \alpha'_n\omega)\varphi^* = (\alpha'_1\varphi^*)(\alpha'_2\varphi^*) \dots (\alpha'_n\varphi^*)\,\omega,$$

d'où il résulte que φ^* est un homomorphisme.

Démontrons ensuite la continuité de φ^*. À ce but il suffit de démontrer (voir [1], p. 86) que $S(\varphi^*)^{-1} \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}'_c}$ pour tous les éléments S d'une sous-base de $\mathcal{T}_{\mathcal{H}_c}$. Puisque $\mathcal{T}_{\mathcal{H}'_c}$ est la relativisation par rapport à $\mathcal{H}_c \subseteq \mathcal{H}$ de la topologie produit $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ définie en $\mathcal{H}$, il s'ensuit (voir [1], p. 90) que l'ensemble $\mathcal{S} = \{S^V_{x_0} \mid x_0 \in G,\ V \in \mathcal{T}_{\mathcal{G}}\}$, où

$S_{x_0}^V = \} \alpha \mid \alpha \in \mathcal{H}_c,\ x_0 \alpha \in V \{$ est une sous-base pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{H}_c}$. En utilisant les formules (7), on déduit que

$$x_0\, \alpha \in V \Longleftrightarrow (x_0\, \varphi)\, \alpha' \in V.$$

Il en résulte conformément à l'égalite (6), que pour tous les $x_0 \in G$ et $V \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}_c}$ on a:

$$S_{x_0}^V (\varphi^*)^{-1} = \} \alpha' \mid \alpha' \in \mathcal{H}_c',\ (x_0 \varphi)\, \alpha' \in V \{ = S_{x_0\varphi}^V \in \mathcal{T}_{\mathcal{H}_c'} .$$

Il s'ensuit la continuité de φ^*.

THÉORÈME 3. *Soit φ une application continue de l'algèbre universelle topologique $(G, \Omega, \mathcal{T}_G)$ dans l'algèbre universelle topologique $(G'\ \Omega, \mathcal{T}_{G'})$, telle que*

(i) *$G\varphi$ est un sous-ensemble fermé de $(G', \mathcal{T}_{G'})$;*

(ii) *pour tout couple (A, x'), où A est un sous-ensemble fermé de $(G', \mathcal{T}_{G'})$ et $x' \in G' \setminus A$, il existe un $\alpha' \in \mathcal{H}_c'$ tel que $A\alpha' = O_{\mathcal{G}}$ et $x'\, \alpha' \neq O_{\mathcal{G}}$.*

Dans ces conditions l'équation (1) est résoluble en x si et seulement si

$$x' \in \bigcap_{\alpha' \in N_{\varphi^*}} N_{\alpha'} . \tag{8}$$

DÉMONSTRATION. Supposons l'existence d'un élément $x = x_0 \in G$, tel que $x_0\, \varphi = x'$. Soit α' un élément quelconque de N_{φ^*}, donc $\alpha' \varphi^* = \theta$. Il s'ensuit d'après (7) que $x'\, \alpha' = (x_0\, \varphi)\, \alpha' = x_0\, (\varphi * \alpha') = x_0\, (\alpha'\, \varphi^*) = x_0\, \theta = O_{\mathcal{G}}$, d'où il résulte la validité de la relation (8).

Réciproquement, supposons la validité de la condition (8) et que $x_0\, \varphi \neq x'$ $(\forall\, x_0 \in G)$. Il s'ensuit que $x' \notin G\varphi$. Il en résulte conformément aux conditions (i) et (ii) l'existence d'un $\alpha' \in \mathcal{H}_c'$, tel que $(G\, \varphi)\, \alpha' = O_{\mathcal{G}}$ et $x'\, \alpha' \neq O_{\mathcal{G}}$. La deuxième relation signifie que $x' \notin N_{\alpha'}$. D'autre part, en vertu de l'égalité $(G\varphi)\, \alpha' = O_{\mathcal{G}}$, on déduit pour tout $x \in G$ que $x\, (\alpha'\, \varphi^*) = x\, (\varphi * \alpha') = (x\, \varphi)\, \alpha' = O_{\mathcal{G}}$, donc que $\alpha'\, \varphi^* = \theta$, c'est-à-dire que $\alpha' \in N_{\varphi^*}$. Nous avons ainsi trouvé un élément $\alpha' \in \mathcal{H}_c'$, tel que $\alpha' \in N_{\varphi^*}$ et $x' \notin N_{\alpha'}$. Il en résulte l'impossibilité de la relation (8).

REMARQUES. - 1) Dans le cas où G, G' et $\mathcal{G}$ sont des algèbres universelles abstraites, donc $\mathcal{T}_G$, $\mathcal{T}_{G'}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{G}}$ sont des topologies discrètes, les conditions (i) et (ii) deviennent triviales, et le théorème 3 se réduit au théorème 2 de [4].

2) Considérons trois espaces topologiques G, G' et $\mathcal{G}$, c'est-à-dire supposons que $\Omega = \emptyset$. Soit G' un espace T_1 et simultanément normal et supposons que $\mathcal{G}$ est l'intervalle [0, 1] muni par la topologie usuelle. Alors la condition (ii) est évidement satisfaite conformément au lèmme d'Urysohn (voir par ex. [1], p. 115). Si G' est un espace complètement régulier (voir par ex. [1], p. 117), alors la condition (ii) est aussi évidement satisfaite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. L. Kelley: *General Topology*, Toronto - New York - London, 1964.

[2] A. G. Kuros: *Vorlesungen über allgemeine Algebra*, Leipzig, 1964.

[3] A. I. Malcev: *Sur la théorie générale des systèmes algébriques* (en langue russe), Mat. Sbornik 35 (77), 3-20, 1954.

[4] I. Gy. Maurer, M. Szilágyi: *Étude de certaines équations définies dans des algèbres universelles*, Atti Accad. Naz. dei Lincei - Rendiconti XLIV, f. 6,733-740, 1968.

[5] F. Riesz, B. Szökefalvi Nagy: *Leçons d'analyse fonctionnelle*, Budapest, 1954.

[6] M. Szilágyi: *Some Properties of the Topological Ω-Groups I.*, Studia Univ. Babeş-Bolyai (sous presse).