OSSERVAZIONI SOPRA UNA NOTA PRECEDENTE (*)

di Ugo Barbuti e Sergio Guerra (a Trieste) (**)

SOMMARIO - *Si fanno alcune osservazioni critiche e si indicano taluni controesempi relativi alle ipotesi di teoremi conseguiti in una nota precedente.*

SUMMARY - *In this paper some critical remarks are made and some counterexamples are given in relation with the hypotheses of theorems obtained in a previous work.*

In una precedente nota, apparsa su queste medesime pagine e dedicata al problema della costruzione effettiva di punti fissi per trasformazioni continue di uno spazio metrico in sè, si sono dati alcuni teoremi di convergenza, trattando qualche caso più specializzato. Ritorniamo ora su talune condizioni apparse in quei teoremi per fare qualche osservazione critica allo scopo di mettere meglio a fuoco il loro significato. Queste considerazioni consentono poi, nel quadro del teorema 1_{∞} (1), di ricondurre alla fenomenologia delle contrazioni (2) una categoria di trasformazioni più generali, che potrebbero classificarsi contrazioni generalizzate (3).

(*) Pervenuto in Redazione il 22 maggio 1971.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del G. N. A. F. A. del C. N. R..

(**) Indirizzo degli autori: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

(1) Cfr. [1], n° 4, pg. 70.

(2) Cfr. in [1], il teorema 2_c a pg. 76.

(3) Cioè quelle trasformazioni che soddisfano alle condizioni (4) e (5) del teorema del n° 6.

1. Sia (X, δ) uno spazio metrico e T una trasformazione continua di X in sè, sequenzialmente compatta rispetto ad $x \in X$ [4].

Sia Y, $Y \subset X$, un insieme *T-invariante*, cioè un insieme non vuoto e tale che

$$T(Y) = Y\,(^5).$$

Se Y è T-invariante, diremo che esso è *irriducibile* se non contiene propriamente alcun sottoinsieme T-invariante.

Diremo poi che $Y \subset Z$, con $Z \subset X$, è *isolato in* Z, se esiste un aperto $A \subset X$ tale che:

$$Y \subset A, \quad Z - Y \subset X - \bar{A}\,(^6).$$

In [1] si è preso in considerazione l'insieme $F_x(T^\infty)$ [7], che gioca un ruolo preminente nei risultati ivi conseguiti. Alle proprietà di questo insieme, indicate in [1], aggiungiamo quelle espresse dalle proposizioni seguenti.

PROP. 1. *L'insieme* $F_x(T^\infty)$ *è T-invariante* [8].

Sia $y \in T(F_x(T^\infty))$. Esiste allora $y' \in F_x(T^\infty)$ tale che $Ty' = y$. Pertanto, detta $\}n_k\{_{k \in N}$ una successione d'interi per la quale si abbia $\lim_k T^{n_k}x = y'$, riesce $\lim_k T^{n_k+1}x = \lim_k T(T^{n_k}x) = T(\lim_k T^{n_k}x) = Ty' = y$ e dunque $y \in F_x(T^\infty)$.

Sia $y \in F_x(T^\infty)$ ed $\}n_k\{_{k \in N}$ una successione d'interi tale che $\lim_k T^{n_k}x = y$. Da $\}n_k - 1\{_{k \in N}$ si estragga una sottosuccessione $\}n_{k_i} - 1\{_{i \in N}$ tale che, per essa, la successione $\}T^{n_{k_i}-1}x\{_{i \in N}$ converga. Posto $\lim_i T^{n_{k_i}-1}x = y'$, $y' \in F_x(T^\infty)$ e risulta $Ty' = T(\lim_i T^{n_{k_i}-1}x) = \lim_i T^{n_{k_i}}x = y$, onde $y \in T(F_x(T^\infty))$.

(4) Cfr. [1], n^0 3, pg. 63. Per la trasformazione T le ipotesi di continuità e di sequenziale compattezza rispetto ad $x \in X$ saranno supposte sempre verificate.

(5) È immediato verificare che:

« Se Y è T-invariante, per ogni $y \in Y$, la traiettoria di origine y (cfr. [1], n^0 1, pg. 61) appartiene ad Y ».

Ciò accade, ad esempio, per gli insiemi $F(T^m)$, $m \in N$, cioè per gli insiemi dei punti $x \in X$ tali che $T^m x = x$ (cfr. [1], prop. 1.1, pg. 61) che, se non vuoti, sono ovviamente T-invarianti.

(6) $\bar{A}$ chiusura di A.

(7) Cioè l'insieme dei punti che sono valori limite per le sottosuccessioni della traiettoria di origine x. Circa la simbologia usata: $F_x(T^\infty)$, cfr. [1], nota (7) a pié di pg. 61.

(8) Per i punti di $F_x(T^\infty)$ vale dunque la proprietà indicata alla nota (5) a piè di pg. (proprietà già rilevata in [1] (cfr. prop. 2.1, pg. 62)).

PROP. 2. *Se $F_x(T^\infty) \supset Y$, con Y T-invariante e isolato in $F_x(T^\infty)$, allora risulta*

$$F_x(T^\infty) = Y.$$

Supponiamo non vera la tesi, supponiamo cioè che sia $F_x(T^\infty) \supsetneqq Y$. Poichè, per ipotesi, Y è isolato in $F_x(T^\infty)$, esiste un aperto $A \subset X$ tale che

$$Y \subset A, \quad F_x(T^\infty) - Y \subset X - \bar{A}.$$

Esisteranno, allora, infiniti valori di $n \in N$ per i quali i corrispondenti punti della traiettoria di origine x appartengono ad A ed esisteranno infiniti valori di $n \in N$ per i quali i corrispondenti punti della medesima traiettoria appartengono ad $X - \bar{A}$. Detta $\}n_k\{_{k \in N}$ la successione di tutti gli interi, ordinati per valori crescenti, tali che, per essi, risulti $T^{n_k} x \in A$ e detta $\}m_k\{_{k \in N}$ quella ottenuta ordinando per valori crescenti l'insieme $N - \}n_k\{_{k \in N}$, sussistono le due proprietà:

$$1) \quad T^{n_k} x \in A, \ \forall k \in N, \qquad 2) \quad T^{m_k} x \notin A, \ \forall k \in N.$$

I punti che sono valori limite per le sottosuccessioni della successione $\}T^{n_k} x\{_{k \in N}$ sono tutti e soli i punti di Y (tutti inclusi in A). Se, accanto alla $\}T^{n_k} x\{_{k \in N}$, consideriamo la successione $\}T^{n_k+1} x\{_{k \in N}$ risulta che, ad ogni sottosuccessione convergente, $\}T^{n'_k} x\{_{k \in N}$, estratta dalla prima, corrisponde la $\}T^{n'_k+1} x\{_{k \in N}$ anch'essa convergente ad un punto di Y, per essere Y T-invariante. Ne segue l'esistenza di $\bar{k} \in N$ tale che $T^{n_k+1} x \in A$, per ogni $k \geq \bar{k}$. Se infatti esistessero infiniti valori di k, diciamoli k_i, per ciascuno dei quali riuscisse $T^{n_{k_i}+1} x \notin A$, estratta dalla $\}n_{k_i}\{_{i \in N}$ una sottosuccessione $\}n^*_{k_i}\{_{i \in N}$ tale che $\lim_i T^{n^*_{k_i}} x = y \in A$, risulterebbe $\lim_i T^{n^*_{k_i}+1} x = Ty \in X - \bar{A}$ ed Y non sarebbe T-invariante, contro l'ipotesi. Si ha dunque

$$\}T^{n_k+1} x\{_{k \in N} \subset \}T^{n_k} x\{_{k \in N}, \quad \forall k \geq \bar{k},$$

il che, ovviamente, implica

$$n_{k+1} = n_k + 1, \ \forall k \geq \bar{k}.$$

La successione $\{n_k\}_{k \in N}$ contiene allora tutti gli interi da un certo in poi e, pertanto, esiste solo un numero finito di valori di $n \in N$ per i quali i corrispondenti punti della traiettoria di origine x appartengono ad $X - \bar{A}$, il che è assurdo avendo supposto che in $X - \bar{A}$ cada almeno un punto di $F_x(T^\infty)$.

PROP. 3. *Se l'insieme $F_x(T^\infty)$ è compatto e irriducibile, allora, per ogni $y \in F_x(T^\infty)$, risulta*

$$y \in F_y(T^\infty).$$

Poiché $F_x(T^\infty)$ è compatto, per ogni $y \in F_x(T^\infty)$, l'insieme $F_y(T^\infty)$ è non vuoto e risulta $F_y(T^\infty) \subset F_x(T^\infty)$. Poiché, inoltre, a norma della prop. 1, $F_y(T^\infty)$ è T-invariante e, per ipotesi, $F_x(T^\infty)$ è irriducibile, risulta infine $F_y(T^\infty) = F_x(T^\infty)$ e di qui la tesi.

Una conseguenza immediata della proposizione ora dimostrata è la seguente: «Nelle ipotesi della prop. 3, per ogni $y \in F_x(T^\infty)$, esiste una successione di interi $\{m_k\}_{k \in N}$ tale che $\lim_k T^{m_k} y = y$».

2. La proprietà della trasformazione T, ora rilevata nelle ipotesi di compattezza e di irriducibilità per l'insieme $F_x(T^\infty)$, è stata indicata in [1] col simbolo $\beta_x)$ (9) ed è stata, in [1], provata vera, indipendentemente da queste ipotesi, per le contrazioni (10).

Dalla prop. 3 può dedursi subito che:

PROP. 4. *Se l'insieme $F_x(T^\infty)$ è finito, la trasformazione T verifica la condizione $\beta_x)$.*

In virtù della prop. 2, $F_x(T^\infty)$ è infatti irriducibile; ove, invero, esistesse un sottoinsieme proprio Y di $F_x(T^\infty)$ (necessariamente finito) T-invariante, sarebbe $F_x(T^\infty) = Y$ e ciò è assurdo.

Vale osservare che, dalla prop. 4, segue che: se $F_x(T^\infty)$ è finito e consta esattamente di $m\,(>1)$ punti $y_1, y_2, \dots, y_m$, allora ognuno di essi soddisfa l'equazione $y = T^m y$ (11). Si fissi un punto y_i, $i \leq m$; poiché vale la $\beta_x)$, la successione $\{T^n y_i\}_N$ «transita» infinite volte per y_i. Sia r il più piccolo intero tale che $T^r y_i = y_i$. Dico che $r = m$; ove infatti fosse $r < m$, avremmo che i punti $\{Ty_i, T^2 y_i, \dots, T^r y_i = y_i\}$ costituirebbero un sottoinsieme proprio di $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ T-invariante e ciò è assurdo.

(9) Cfr. [1], Def. 4, pg. 64.

(10) Cfr. [1], prop. 3.1, pg. 65.

(11) Riesce, pertanto, $F_x(T^\infty) \subset F(T^m)$. (Per quanto riguarda l'insieme $F(T^m)$, cfr. la nota (5) a pié di pg.).

Si osservi anche che, nelle medesime circostanze della osservazione precedente, dette $\}n_k^{(i)}\{_{k\in N}$, $i\leq m$, m successioni di interi per le quali risulti

$$\bigcup_{i\leq m} \}n_k^{(i)}\{_{k\in N} = N, \qquad \lim_k T^{n_k^{(i)}} x = y_i,$$

tali successioni possono sempre pensarsi ottenute, ordinando per valori crescenti gli elementi di ciascuna delle m classi di resti modulo m.

Allo stadio attuale delle nostre indagini non sappiamo se la condizione β_x) sia sempre verificata per ogni trasformazione continua e sequenzialmente compatta o se possa prodursi qualche contro esempio. Quando, per la T, la β_x) riesce verificata, allora ogni punto y di $F_x(T^\infty)$ è di aderenza per l'insieme $\}T^n y\{_N$. Sulla β_x) abbiamo fondato, in [1], la dimostrazione della prop. 3.4. Di essa diamo qui una formulazione più estesa, indipendente dalla β_x), che si raggiunge subito con una banale osservazione. Precisamente vale la seguente:

PROP. 5. *Se $z\in X$ è definitivamente non repulsivo (o definitivamente non attrattivo)* (12) *rispetto alla traiettoria di origine x, per ogni $y\in F_x(T^\infty)$, la traiettoria di origine y «orbita» attorno a z, risulta cioè:*

$$\delta(T^n y, z) = \delta(y, z), \qquad \forall\, n\in N.$$

Dall'essere z definitivamente non repulsivo (o definitivamente non attrattivo) segue la convergenza della successione $\}\delta(T^n x, z)\{_N$. Per ogni $y, \widehat{y}\in F_x(T^\infty)$ risulta dunque $\delta(y, z) = \delta(\widehat{y}, z)$ e, pertanto, essendo $F_x(T^\infty)$ T-invariante (cfr. nota (5) a piè di pg.), segue $\delta(T_y^n, z) = \delta(y, z)$, per ogni $n\in N$, comunque si fissi y in $F_x(T^\infty)$.

3. Indichiamo ora con $\widehat{F}_x(T^\infty)$ (13) l'insieme (eventualmente vuoto) dei punti di $F_x(T^\infty)$ che non appartengono ad alcun insieme

(12) Cfr. [1], Def. 6, pg. 65.

(13) In [1] (prop. 6.1, pg. 76) è stato introdotto il simbolo $\widehat{F}(T^\infty)$ per indicare l'insieme $F(T^\infty) - \bigcup_{m\in N} F(T^m)$ $(F(T^\infty) = \bigcup_{x\in X} F_x(T^\infty))$. Risulta ovviamente $\widehat{F}_x(T^\infty) \subset \widehat{F}(T^\infty)$.

$F(T^m)$. Riguardo all'insieme $\widehat{F}_x(T^\infty)$ si ha che esso riesce vuoto almeno in tutti quei casi in cui la traiettoria di origine x gode di proprietà di tipo « asintotico », per esempio, della proprietà di essere asintoticamente regolare ([14]). Sussiste, infatti, la seguente:

PROP. 6. *Le due proprietà:*

a) $$\exists\, m \in N: \lim_n \delta(T^{n+m}x, T^n x) = 0,$$

b) $$F_x(T^\infty) \subset F(T^m),$$

sono equivalenti.

a) $\Longrightarrow$ *b)*.

Infatti, se $y \in F_x(T^\infty)$ ed $\}n_k\{_{k\in N}$ è una successione d'interi tale che $\lim_k T^{n_k}x = y$, da *a)* segue

$$\lim_k \delta(T^{n_k+m}x, T^{n_k}x) = \lim_k \delta(T^m(T^{n_k}x), T^{n_k}x) = \delta(T^m y, y) = 0\,.$$

b) $\Longrightarrow$ *a)*.

Infatti, da *b)*, per ogni successione d'interi $\}n_k\{_{k\in N}$ tale che la successione $\}T^{n_k}x\{_{k\in N}$ converga, segue

$$\lim_k \delta(T^{n_k+m}x, T^{n_k}x) = 0$$

e di qui la *a)*.

Essendo $F(T^m) \subset F(T^{km})$, per ogni $k, m \in N$ ([15]), si osserva subito che, per ogni fissato $m \in N$, la proprietà *a)* della prop. 6 implica:

$$\lim_n \delta(T^{n+km}x, T^n x) = 0, \qquad \forall\, k \in N.$$

In particolare l'asintotica regolarità della traiettoria di origine x implica la *a)*, per ogni $m \in N$.

4. Rivolgeremo ora qualche considerazione al caso, particolarmente notevole, in cui la trasformazione T sia una contrazione di X in sé ([16]). Sussiste la seguente:

([14]) Cioè tale che: $\lim_n \delta(T^{n+1}x, T^n x) = 0$ (cfr. [1], prop. 3.7, pg. 69).

([15]) Cfr. [1], prop. 1.2, pg. 61.

([16]) Cioè tale che: $\delta(Tx, Ty) \leq \delta(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$.

PROP. 7. *Sia T una contrazione sequenzialmente compatta rispetto ad $x \in X$ ed $F(T)$ sia non vuoto. Allora i punti di ogni eventuale componente $Y (\subset F(T^m))$ irriducibile di $F_x(T^\infty)$ sono i vertici di un m-latero* (17) *equilatero inscritto nella varietà V_x intersezione delle superficie sferiche*

$$S_u = \{ z : \delta(z, u) = \delta(y, u),\ y \in Y,\ \forall\ u \in F(T) \}.$$

Sia $Y \subset F(T^m)$ una componente irriducibile di $F_x(T^\infty)$. Poiché ogni punto di Y appartiene a V_x (18), basterà dimostrare che i punti di Y sono vertici di un m-latero equilatero. Allo scopo indichiamo con y_i, $i \leq m$, i punti di Y, che supporremo, com'è lecito, ordinati al modo seguente:

$$(1) \qquad y_2 = Ty_1\,,\ y_3 = Ty_2\,, \ldots , y_m = Ty_{m-1}\,,\ y_{m+1} = Ty_m = y_1\,.$$

Poiché T è una contrazione, per ogni $h, k \leq m$, riesce

$$(2) \qquad \delta(Ty_h\,, Ty_k) = \delta(y_{h+1}\,, y_{k+1}) \leq \delta(y_h\,, y_k)$$

e, in virtù delle (1) e per essere $y_i = T^m y_i$, per ogni $i \leq m$, riesce anche

$$(3) \qquad \delta(y_h\,, y_k) = \delta(T^m y_h\,, T^m y_k) \leq$$

$$\leq \delta(T^{m-1} y_h\,, T^{m-1} y_k) \leq \ldots \leq \delta(Ty_h\,, Ty_k) = \delta(y_{h+1}\,, y_{k+1}).$$

Dal confronto della (2) con la (3) segue allora

$$\delta(y_{h+1}\,, y_{k+1}) = \delta(y_h\,, y_k), \qquad \forall\ h, k \leq m$$

e cioè quanto volevasi dimostrare.

T sia ora una contrazione di un sottoinsieme X chiuso e limitato di R^m (spazio euclideo ad m dimensioni) in sé. Se $F(T)$ contiene $k \geq m$ punti linearmente indipendenti, allora, per ogni $x \in X$, abbiamo già notato talune proprietà di $F_x(T^\infty)$ (19). Se $F(T)$ contiene $k < m$ (e non più) punti linearmente indipendenti, dalla prop. 7 segue subito che

(17) Diciamo m-latero una m-upla di punti e quest'ultimi vertici.

(18) Cfr. [1], prop. 3.4. pg. 68.

(19) Precisamente: se è $k = m + 1$, $F_x(T^\infty) \subset F(T)$; se è $k = m$, $F_x(T^\infty) \subset F(T^2)$ (cfr. [1], teorema $(R^m)_c$, pg. 77).

COROLLARIO. *Per ogni $x \in X$, i punti di ogni eventuale componente $Y (\subset F(T^m))$ irriducibile di $F_x(T^\infty)$ sono i vertici di un m-latero equilatero inscritto in una sfera di dimensione $\leq m - k$, avente il centro sullo spazio lineare di dimensione (minima) $k - 1$ contenente $F(T)$.*

5. In [1] (20) abbiamo stabilito una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della traiettoria di origine $x \in X$, generata da una trasformazione T di X in sé, continua e sequenzialmente compatta rispetto ad x.

Vogliamo qui notare, con due esempi, come le due condizioni α_x) e v_x) (21), che figurano nel testo di quel teorema, siano tra loro indipendenti.

Cominciamo col mostrare che:

$$\alpha_x) \not\Longrightarrow v_x).$$

Sia $X = [-1, 1]$ e T la simmetria rispetto all'origine. Per $x \in X$, $x \neq 0$, la T, che risulta, com'è ovvio, continua e sequenzialmente compatta, verifica la condizione α_x) (è infatti $F_x(T^\infty) = \{x, -x\}$ e quindi $\widetilde{F}_x(T^\infty) = \emptyset$ (22)), mentre, essendo $F(T) = \{0\}$, essa non verifica la condizione v_x).

Mostriamo ora che:

$$v_x) \not\Longrightarrow \alpha_x).$$

Riferito (23) il piano euclideo ad un sistema di coordinate polari (ϱ, θ) con il verso positivo delle rotazioni quello antiorario, consideriamo l'insieme

$$X = \{x = (\varrho, \theta) : 0 \leq \varrho \leq 2, 0 \leq \theta < +\infty\}$$

e la trasformazione T (di X in sé) così definita:

$$T(\varrho, \theta) = (f(\varrho), \theta + g(\varrho)),$$

(20) Cfr. teorema 1_x, pg. 70.

(21) Cfr. [1], Def. 1 e 2, pg. 64. Per quanto riguarda la Def. 1 correggiamo qui un errore del proto sfuggitoci nella correzione delle bozze: nella 2ª riga, invece di «è non vuoto e» leggi «è vuoto oppure».

(22) Cfr. [1], pg. 64.

(23) Questo esempio è del dott. Alessio Volčič. Da esso può anche dedursi che l'ipotesi della irriducibilità dell'insieme $F_x(T)$, che figura nel testo della prop. 3, è essenziale.

essendo

$$f(\varrho)=\begin{cases}\varrho, & \text{per } 0\leq\varrho\leq 1\\ \dfrac{\varrho}{2}+\dfrac{1}{2}, & \text{per } 1\leq\varrho\leq 2\end{cases}$$

e

$$g(\varrho)=\begin{cases}0, & \text{per } 0\leq\varrho\leq 1\\ -\dfrac{1}{\log_2\dfrac{\varrho-1}{2}}, & \text{per } 1<\varrho\leq 2.\end{cases}$$

T è continua e sequenzialmente compatta su X. Si osserva poi subito che:

$$F(T)=\}x=(\varrho,\theta):0\leq\varrho\leq 1\{.$$

Dette $\}\varrho_n\{_N$ e $\}\theta_n\{_N$, rispettivamente, le successioni dei moduli e degli argomenti dei punti della traiettoria $\}T^n(\varrho,\theta)\{_N$ di origine $x=(\varrho,\theta)\in X$, con $\varrho>1$, riesce, come facilmente può verificarsi,

$$\varrho_n=\frac{\varrho}{2^n}+\frac{2^n-1}{2^n},\qquad \theta_n=\theta+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)+\log_2\dfrac{\varrho-1}{2}}.$$

Poiché risulta

$$\lim_n \varrho_n=1,\qquad \lim_n\theta_n=+\infty,$$

si ha allora

$$F_x(T^\infty)=\}x=(\varrho,\theta):\varrho=1\{$$

e, pertanto, per la trasformazione T, resta verificata la condizione $v_x)$; ma, essendo

$$\widetilde{F}_x(T^\infty)=F_x(T^\infty),$$

la T non verifica la condizione $\alpha_x)$.

6. Se la trasformazione T è continua e sequenzialmente compatta rispetto ad $x\in X$, essa verifica generalmente ([24]) la condizione $\alpha_x)$ tutte le volte almeno in cui la frontiera dell'insieme $F(T)$ è finita o numerabile. Indipendentemente dal possedere o no tali informazioni sull'insieme $F(T)$, la condizione $\alpha_x)$ risulta verificata, ad esempio, se la trasformazione T è una contrazione di X in sè, sequenzialmente compatta rispetto ad x ([25]).

([24]) Cfr. anche [1], nota (22) a piè di pg. 72. Alla fine di questa nota aggiungere « generalmente ».

([25]) Cfr. nota (2) a piè di pg.

Vogliamo ora far vedere che altrettanto può dirsi per trasformazioni di tipo più generale rispetto a quello delle contrazioni. Sussiste precisamente il seguente:

TEOREMA. *La trasformazione T sia continua e sequenzialmente compatta rispetto ad $x \in X$. Se, per essa, risulta*

$$\delta(Ty, Tz) \leq \alpha\, \delta(y, z) + \beta\delta(y, Ty) + \gamma\delta(z, Tz), \tag{4}$$

per ogni $y, z \in X$, essendo α, β, γ tre costanti reali non negative tali che

$$\alpha + \beta + \gamma \leq 1\ (^{26}), \tag{5}$$

allora essa verifica la condizione $\alpha_x)$.

Poichè, se $\alpha = 1$, per la (5), la T riducesi ad una contrazione e poiché, se $F(T) = \emptyset$, la $\alpha_x)$ è verificata ovviamente, supporremo $\alpha < 1$ ed $F(T) \neq \emptyset$

Per conseguire la tesi basterà dimostrare ([27]) l'implicazione seguente:

$$v_x) \Longrightarrow c_x)\ (^{28}).$$

Sia $\}n_k\{_{k \in N}$ una qualunque successione d'interi tale che, per essa, la successione $\}T^{n_k} x\{_{k \in N}$ converga. Per la (4), se $u \in F(T)$ ([29]), riesce

$$\delta(T^{n_k+1}x, u) = \delta(T^{n_k+1}x, Tu) \leq \alpha\delta(T^{n_k} x, u) + \beta\delta(T^{n_k} x, T^{n_k+1} x),$$

dalla quale, in virtù della condizione $v_x)$, passando al limite per $k \to \infty$, segue

$$\lim_k \delta(T^{n_k+1} x, u) = \lim_k \delta(T^{n_k} x, u) \leq \alpha \lim_k \delta(T^{n_k} x, u).$$

Per essere, come supposto, $\alpha < 1$, da questa discende:

$$\lim_k \delta(T^{n_k} x, u) = 0$$

([26]) Trasformazioni di questo tipo, con $\alpha + \beta + \gamma < 1$, sono già state considerate da R. Kannan [2], S. Reich [3] e I. A. Rus [4].

([27]) Ciò a norma del teorema 1_x (cfr. [1], pg. 70) e per essere le due condizioni $\alpha_x)$ e $v_x)$ tra loro indipendenti.

([28]) Cioè la convergenza della traiettoria (cfr. [1], Def. 3, pg. 64).

([29]) Si verifica facilmente che, per $\alpha < 1$, se $F(T) \neq \emptyset$, $F(T)$ non può che ridursi ad un sol punto.

e quindi

$$\lim_k T^{n_k} x = u.$$

Valendo quest'ultima per ogni successione $\}n_k\{_{k \in N}$ tale che, per essa, $\}T^{n_k}x\{_{k \in N}$ converga, risulta allora

$$\lim_n T^n x = u$$

e ciò assicura la tesi.

Non sempre la condizione v_x) riesce di facile controllo. Nelle solite ipotesi, per la T, di continuità e di sequenziale compattezza rispetto ad $x \in X$, per il verificarsi della v_x) è necessaria e sufficiente l'asintotica regolarità della traiettoria di origine x (30). In qualche caso speciale si può però evitare il ricorso alla asintotica regolarità della traiettoria, come accade nelle circostanze della seguente:

PROP. 8. *Esista $U \subsetneqq X$ tale che ogni suo fissato punto sia o definitivamente non repulsivo o definitivamente non attrattivo rispetto alla traiettoria di origine x. Allora, se lo spazio metrico (X, δ) verifica, rispetto ad U, la condizione s_u)* (31), *T verifica la condizione v_x)* (32).

Le osservazioni fatte in questa nota consentirebbero di aggiungere nuove applicazioni a quelle indicate in [1] (33); ma ad esse dedicheremo altro lavoro.

(30) Come risulta dalla prop. 6, per $m = 1$.

(31) Cfr. [1], Def. 5, pg. 64.

(32) Per la dimostrazione basta tener conto della prop. 5 e ragionare come nella dimostrazione, in [1], della prop. 3.5 a pg. 68. Dalla prop. 8 può dedursi subito, per le contrazioni, una formulazione più generale di quella del teorema 4_c (cfr. [1], pg. 76) e quindi una formulazione più generale di quella del teorema $(R^m)_c$ (cfr. [1], pg. 77).

(33) È doveroso segnalare una svista in cui siamo incorsi nella dimostrazione del teorema del n° 8, a pg. 80; ne diamo qui l'errata-corrige.

	errata	corrige
pg. 79, riga 1 (n° 8)	3_c	3
« 81, « penultima	che la U_λ è una contrazione forte per essere ...	che, per la U_λ, per essere ...
« «, « ultima	onde valgono ...	, valgono ...
« «, « «	3_c	3
« 82, « 11	allora, essendo ...	allora, se ...
« «, « 12	unitaria e lo	unitaria sono distinti, essendo lo

Alla pg. 82, riga 14, dopo: « la (13). », aggiungere: « In virtù della (13), tutte le ipotesi del teorema 3 riescono verificate e, pertanto, vale la tesi ».

BIBLIOGRAFIA

[1] U. BARBUTI e S. GUERRA, *Sopra alcuni teoremi di convergenza nella teoria costruttiva del punto fisso* , Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, vol. II, fasc. I (1970), pg. 59-84.

[2] R. KANNAN, *Some results on fixed points,* Amer. Math. Monthly, 76 (1969), pg. 405-408.

[3] S. REICH, *Kannan's fixed point theorem,* Boll. U. M. I. (4) 4 (1971), pg. 1-11.

[4] I. A. RUS, *Some fixed point theorems in metric spaces,* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, vol. III, fasc. II (1971) (to appear).