

# ÜBER DIE EXISTENZ ENDLICHER MÖBIUS- $m$ -STRUKTUREN (\*)

VON ULRICH HEISE (in Aachen),

WERNER HEISE und HANS-JOACHIM KROLL (in Hannover) (\*\*)

Dedicato al Prof. Dr. HORST TIETZ per il suo 50° compleanno

**SOMMARIO.** - *Gli unici modelli noti di un piano di Möbius d'ordine 8, il piano di Miquel e quello del tipo Suzuki, nonché il piano di Möbius-Miquel d'ordine 13 non sono estendibili in una 2-struttura di Möbius.*

**SUMMARY.** - *The two known models of Möbiusplanes of order 8, the Miquelian and that of Suzuki-type, as well as the Miquelian Möbius plane of order 13 are not extendable to Möbius-2-structures.*

Unter einer *Möbius-0-Struktur* verstehen wir eine affine Ebene. Für jede natürliche Zahl  $m > 0$  heisst ein Paar  $(P, \mathcal{B})$ , wobei  $\mathcal{B}$  — die Menge der *Blöcke* — aus nichtleeren Teilmengen von  $P$  besteht, *Möbius- $m$ -Struktur*, wenn für jeden Punkt  $p \in P$  die abgeleitete Struktur  $(P \setminus \{p\}, \{B \setminus \{p\}; p \in B \in \mathcal{B}\})$  eine Möbius- $(m - 1)$ -Struktur ist [5]. Alle Blöcke einer Möbius- $m$ -Struktur  $(P, \mathcal{B})$  haben dieselbe Kardinalzahl  $k$ . Die Kardinalzahl  $k - m$  heisst die *Ordnung* von  $(P, \mathcal{B})$ . Für  $m \geq 2$  war bisher nur noch die Existenz von endlichen Möbius- $m$ -Strukturen der Ordnung 8 und 13 fraglich [3], [4].

(\*) Pervenuto in Redazione il 27 gennaio 1971.

(\*\*) Indirizzi degli Autori:

U. HEISE, Institut für Technische Mechanik der Technischen Hochschule, D 51 Aachen, Templergraben (Deutschland).

W. HEISE, H. - J. KROLL, Lehrstuhl für Geometrie der Technischen Universität, D 3 Hannover, Welfengarten 1 (Deutschland).

In dieser Note wird die Nichtexistenz gewisser Möbius- $m$ -Strukturen der Ordnungen 8 und 13 bewiesen.

1956 haben M. HALL, J. D. SWIFT und R. J. WALKER mit Hilfe einer elektronischen Rechenanlage die Eindeutigkeit der affinen Ebene der Ordnung 8 nachgewiesen [2]. In [1] sind zwei nicht-isomorphe Modelle  $\mathbf{M}(8)$  und  $\mathbf{S}(8)$  von Möbiusebenen (das sind Möbius-1-Strukturen) der Ordnung 8 angegeben. Soweit wir wissen, ist die Existenz weiterer nicht-isomorpher Modelle ein offenes Problem. Weiterhin ist uns als einzige Möbiusebene der Ordnung 13 nur die miquelsche  $\mathbf{M}(13)$  bekannt. Wir zeigen, dass es keine Möbius-2-Struktur gibt (und damit auch keine Möbius- $m$ -Struktur mit  $m > 2$ ), die eine dieser drei Möbiusebenen als abgeleitete Struktur besitzt:

Es sei  $\mathbf{A}(q)$  der dreidimensionale affine Raum über dem Galoisfeld  $GF(q)$  ( $q = 2^3, 13$ ), in dem inhomogene Koordinaten  $(x, y, z)$  eingeführt sind.  $\mathbf{P}(q)$  sei der projektive Abschluss von  $\mathbf{A}(q)$  und  $\infty$  der uneigentliche Punkt auf der  $z$ -Achse. Die Punktmenge

$$\mathbf{M}(8) = \{ (x, y, z); x, y, z \in GF(2^3), x^2 + xy + y^2 + z = 0 \} \cup \{ \infty \},$$

$$\mathbf{S}(8) = \{ (x, y, z); x, y, z \in GF(2^3), x^6 + xy + y^4 + z = 0 \} \cup \{ \infty \}. \quad (\text{vgl. [6]})$$

bzw.

$$\mathbf{M}(13) = \{ (x, y, z); x, y, z \in GF(13), x^2 + 2y^2 + z = 0 \} \cup \{ \infty \}$$

bilden bezüglich der nichttrivialen Schnitte mit Ebenen aus  $\mathbf{P}(8)$  bzw.  $\mathbf{P}(13)$  als Kreise die Möbiusebenen  $\mathbf{M}(8)$ ,  $\mathbf{S}(8)$  bzw.  $\mathbf{M}(13)$ .  $\mathbf{M}(8)$  und  $\mathbf{M}(13)$  sind miquelsche Möbiusebenen. Nach ihrer Automorphismengruppe heisst  $\mathbf{S}(8)$  Möbiusebene vom Suzuki-Typ [1]. Es sei  $(P, \mathbb{K})$  eine der Möbiusebenen  $\mathbf{M}(8)$ ,  $\mathbf{S}(8)$  oder  $\mathbf{M}(13)$ .

Die 4 Punkte  $p_1 = (0, 0, 0)$ ,  $p_2 = (1, 0, 1)$ ,  $p_3 = (0, 1, 1)$  und  $p_4 = (1, 1, 1)$  liegen weder in  $\mathbf{M}(8)$  noch  $\mathbf{S}(8)$  auf einem Kreis. In  $\mathbf{M}(13)$  sind  $p_1 = (0, 0, 0)$ ,  $p_2 = (1, -1, -3)$ ,  $p_3 = (-1, 1, -3)$  und  $p_4 = (-1, -1, -3)$  nicht konzyklisch. Gäbe es nun eine Möbius-2-Struktur  $(\tilde{P}, \tilde{\mathbb{K}})$ , deren in einem Punkt abgeleitete Struktur zu  $(P, \mathbb{K})$  isomorph ist, so gäbe es zu den 4 nicht konzyklischen Punkten  $p_1, p_2, p_3, p_4$  eine 10- bzw. 15-elementige Teilmenge  $K$  von  $P$  mit  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in K$ , die mit keinem Kreis aus  $\mathbb{K}$  vier verschiedene Punkte gemeinsam hat. Abgesehen von  $p_1, p_2, p_3$  und  $p_4$  kann demnach kein Punkt von  $K$  auf einem der jeweils 4 Kreise liegen, die je drei der Punkte  $p_1, p_2, p_3$  und  $p_4$  verbinden. Mit Hilfe der elektronischen Rechenanlage CD-6400 der Rheinisch-Westfälischen

Technischen Hochschule Aachen konnten wir nun zeigen: Unter den 37 bzw. 122 Punkten, die auf keinem dieser 4 Verbindungskreise liegen, gibt es keine 6- — bzw. 11 — elementige Menge  $K'$  derart, dass keine zwei Punkte aus  $K'$  gemeinsam auf einem der 42 bzw. 72 Kreise liegen, die mit  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  jeweils genau 2 Punkte gemeinsam haben. Das bedeutet aber, dass es zu den vier nicht konzyklischen Punkten  $p_1, p_2, p_3, p_4$  von  $(P, \mathbb{K})$  keine Verbindungskurve  $K \in \tilde{\mathbb{K}}$  gibt.

Die Rechenabläufe wurden durch zwei in der Programmiersprache FORTRAN IV abgefasste Programme gesteuert, von denen wir nur das zur Behandlung des Problems der Ordnung 8 mitteilen, weil beide Programme bis auf Zyklenzahlen und Dimensionsvereinbarungen von Feldern miteinander übereinstimmen:

```

INTEGER IMAT (39, 39), I (42, 7), KSPALT (39), P
PRINT 50
50  FORMAT (1 H 1)
    READ 100, ((I(J, K), K = 1, 7), J = 1, 42)
100  FORMAT (4X, I2, 6 (8X, I2))
    DO 20 J = 1, 42
    PRINT 150, J, (I(J, K), K = 1, 7)
150  FORMAT (X, I2, 4X, 7 (7X, I2))
20   CONTINUE
    DO 1 J = 1, 39
    DO 1 K = 1, 39
1    IMAT (J, K) = 1
    DO 3 J = 1, 42
    DO 3 K = 1, 7
    M = I (J, K)
    DO 3 L = 1, 7
    N = I (J, L)
3    IMAT (M, N) = 0
    PRINT 50
    DO 51 KK = 1, 39
51   KSPALT (KK) = KK
    PRINT 52, (KSPALT (KP), KP = 1, 39)
52   FORMAT (6X, 39 (I2, X), /, X, /)
    DO 53 J = 1, 39
    PRINT 200, J, (IMAT (J, K), K = 1, 39)
    FORMAT (X, I2, 3X, 39 (I2, X))
53   CONTINUE
    PRINT 50
    DO 40 J = 1, 39
    PRINT 54, J
    DO 41 K = J, 39
    IF (IMAT (J, K)) 41, 41, 70

```

```

70      PRINT 54, J, K
        DO 42 L = K, 39
          IF (IMAT (J, L)) 42, 42, 71
71      IF (IMAT (K, L)) 42, 42, 72
72      PRINT 54, J, K, L
        DO 43 M = L, 39
          IF (IMAT (J, M)) 43, 43, 73
73      IF (IMAT (K, M)) 43, 43, 74
74      IF (IMAT (L, M)) 43, 43, 75
75      PRINT 54, J, K, L, M
76      FORMAT (X, 6 (I2, 5X))
        DO 44 N = M, 39
          IF (IMAT (J, N)) 44, 44, 76
76      IF (IMAT (K, N)) 44, 44, 77
77      IF (IMAT (L, N)) 44, 44, 78
78      IF (IMAT (M, N)) 44, 44, 79
79      PRINT 54, J, K, L, M, N
        DO 45 P = N, 39
          IF (IMAT (J, P)) 45, 45, 80
80      IF (IMAT (K, P)) 45, 45, 81
81      IF (IMAT (L, P)) 45, 45, 82
82      IF (IMAT (M, P)) 45, 45, 83
83      IF (IMAT (N, P)) 45, 45, 84
84      PRINT 54, J, K, L, M, N, P
85      CONTINUE
86      CONTINUE
87      CONTINUE
88      CONTINUE
89      CONTINUE
90      CONTINUE
91      STOP
92      END

```

Das Programm steuert den Rechenablauf folgendermassen: Die Maschine liest von den 37 Punkten die auf den 42 Kreisen liegenden Punkte und speichert sie in der 42-zeiligen und 7-spaltigen Matrix I. Da die Kreise unterschiedlich viele, nämlich 5 bzw. 7 von diesen 37 Punkten enthalten, werden die leeren Speicherplätze mit den Zahlen 38 und 39 gefüllt, um mit einheitlicher Zeilenlänge arbeiten zu können. Den Elementen der quadratischen, 39-dimensionalen Matrix  $IMAT_{j,k}$  werden die Werte 0 bzw. 1 zugewiesen, je nachdem, ob die beiden Zahlen  $j$  und  $k$  gemeinsam in ein und derselben Zeile der Matrix I auftreten oder nicht. Darauf wird für alle aus den Zahlen 1 bis 39 zusammenstellbaren Kombinationen dreier Zahlen  $j, k$  und  $l$  geprüft, ob die Matrizelemente  $IMAT_{j,k}$ ,

$IMAT_{j,l}$  und  $IMAT_{k,l}$  den Wert 1 besitzen. Ist das der Fall, so druckt die Maschine die Zahlen  $j, k$  und  $l$ . Es schliessen sich entsprechende Algorithmen für Kombinationen aus vier, fünf und sechs Zahlen an.

Die Maschine druckte für das Problem der Ordnung 8 bzw. 13 Kombinationen aus maximal vier bzw. neun Zahlen und benötigte für die Rechnung 3 bzw. 850 Sekunden.

### LITERATUR

- [1] P. DEMBOWSKI: *Möbiusebenen gerader Ordnung*. Math. Ann. 157 (1964), 179-205.
- [2] M. HALL, J. D. SWIFT, R. J. WALKER: *Uniqueness of the projective plane of order eight*. Math. Tables Aids Comput. 10 (1956), 186-194.
- [3] W. HEISE: *Es gibt keine 4-affine Ebene der Ordnung 4*. Ersch. demn. in Journal reine u. angew. Math.
- [4] W. HEISE, J. TIMM: *k-affine Räume*. Manuscr. math. 4 (1971), 31-37.
- [5] R. PERMUTTI: *Una generalizzazione dei piani di Möbius*. Le Matematiche, 22 (1967), 360-374.
- [6] B. SEGRE: *On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two*. Acta Arithm. 5 (1959), 315-332.