KONSTRUKTION VON SCHLICHTEN FUNKTIONEN MIT UNENDLICH VIELEN FIXPUNKTEN (*)

von PETER ZINTERHOF (in Wien) (**)

SOMMARIO. - *Si costruiscono funzioni convesse univalenti* $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ *che hanno i punti* $0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ *del disco unitario aperto come punti fissi.*

SUMMARY. - *Convex univalent functions* $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ *fixing exactly the points* $0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ *of the open unit disc are explicitly contructed.*

H. Hornich betrachtete in [5] die Fixpunkte der schlichten Funktionen $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. In der vorliegenden Arbeit werden Bedingungen dafür angegeben, wann die Punkte einer Folge komplexer Zahlen (z_k), $k = 0, 1, 2, \dots$, $|z_k| < 1$, Fixpunkte einer in $D = \}z : |z| < 1\{$ schlichten Funktion sind, und es werden schlichte Funktionen $f(z)$ konstruiert, die *genau* an (abzählbar) unendlich vielen vorgegebenen Stellen Fixpunkte haben. Im Problemkreis der Interpolationstheorie [3] wie in der Frage nach den Fixpunkten der ganzen Funktionen [4] spielt die Schlichtheit keine Rolle.

Jede in $D = \}z : |z| < 1\{$ schlichte Funktion $w = f(z)$ mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, lässt sich in der Form

$$f(z) = \frac{z}{1 + z\,b(z)}$$

darstellen, wobei $b(z)$ beschränkt ist [5]. Die Fixpunkte von $f(z)$ sind dann genau die Nullstellen von $z b(z)$. Im folgenden sei $b(z)$

(*) Pervenuto in Redazione il 25 gennaio 1971.

(**) Indirizzo dell'Autore: Institut für Mathematik a. d. Technischen Hochschule - Wien IV, Karlsplatz 13.

nicht $\equiv 0$, also $f(z)$ nicht $\equiv z$ und die Anzahl der Nullstellen von $z\,b(z)$ stets unendlich. Jede beschränkte Funktion $z\,b(z)$ ist bekanntlich [3], [6] als Produkt darstellbar:

$$zb(z) = B^*(z) \cdot B^{**}(z), \tag{1}$$

wo $B^*(z)$ eine in D reguläre beschränkte Funktion ohne Nullstellen und $B^{**}(z)$ das zur Nullstellenfolge (z_k) von $zb(z)$ gehörige Blaschkeprodukt

$$B^{**}(z) = z^{m_0} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{z}_k}{|z_k|} \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} \right] \tag{2}$$

ist, wobei die Nullstellen z_k von $zb(z)$ ihrer Vielfachheit nach zu zählen sind. Es ergibt sich leicht eine notwendige Bedingung für die z_k: Bekanntlich ist für $B^{**}(z)$ notwendig, dass $\Sigma(1 - |z_k|) < \infty$ ist. Für die Folge (z_k) der Fixpunkte einer schlichten Funktion $f(z) \not\equiv z$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, ist $\Sigma(1 - |z_k|) < \infty$.

Wir fragen nach zusätzlichen hinreichenden Bedingungen für die Folge (z_k), so dass die z_k Fixpunkte einer schlichten Funktion sind, und konstruieren eine solche Funktion.

Satz: *Die Folge* (z_k), $k = 1, 2, \ldots$, $0 < |z_k| < 1$, *mit konvergenter Summe* $\sum_k (1 - |z_k|) = A^*$ *besitze endlich viele Häufungspunkte* $y_1, \ldots, y_L$, $|y_l| = 1$, $(l = 1, \ldots, L)$; *dabei soll die Folge* (z_k) *in* L *Teilfolgen*

$$(z_{kl}),\ k = 1, 2, 3, \ldots,\quad l = 1, 2, \ldots, L \tag{3}$$

so aufgespalten werden können, dass bei festem l *alle* z_{kl} *in dem Winkelraum mit der Spitze in* y_l

$$\frac{|z_{kl} - y_l|}{1 - |z_{kl}|} < B_l \tag{4}$$

liegen.

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ *eine in* D *reguläre schlichte Funktion* $w = f(z)$ *mit* $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, *die*

1) *genau an den Stellen* z_k, $k = 1, 2, \ldots$, *Fixpunkte besitzt:* $f(z_k) = z_k$,

2) *in D konvex ist,* d. h. *D auf ein konvexes Gebiet abbildet, und für die*

3) $\sup\limits_{z \in D} |f(z)| < 1 + \varepsilon.$

Der Beweis erfordert einige Rechnung: Laut Voraussetzung zerfällt die Folge (z_k) in L Teilfolgen $(z_{kl}) \to y_l$, $l = 1, \dots, L$, wobei die Konvergenz der Folgen (z_{kl}) in nichttangentialer Weise erfolgt. Aus (4) folgt zunächst für festes l:

$$\sup_k \sup_{|z|<1} \left| \frac{1 - \bar{y}_l z}{1 - \bar{z}_{kl} z} \right| = \sup_k \sup_{|z|<1} \left| \frac{1 - \bar{z}_{kl} z}{1 - \bar{z}_{kl} z} + \frac{\bar{z}_{kl} z - \bar{y}_l z}{1 - \bar{z}_{kl} z} \right| \leq \tag{5}$$

$$\leq 1 + \sup_k \sup_{|z|<1} \frac{|z| \, |z_{kl} - y_l|}{|1 - \bar{z}_{kl} z|} = 1 + B_l, \; l = 1, \dots, L.$$

Wir setzen $B = \max(B_1, \dots, B_L) + 1$, so dass für $l = 1, \dots, L$ gilt:

$$\sup_k \sup_{|z|<1} \left| \frac{1 - \bar{y}_l z}{1 - \bar{z}_{kl} z} \right| \leq B. \tag{6}$$

Wir bilden nun für $l = 1, \dots, L$ die Blaschke-Produkte [3], [6].

$$B_l(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_{kl}}{|z_{kl}|} \frac{z - z_{kl}}{1 - \bar{z}_{kl} z} \tag{7}$$

und die in D reguläre Funktion

$$B(z) = C z^2 \prod_{l=1}^{L} [(1 - \bar{y}_l z)^4 B_l(z)], \tag{8}$$

wobei über die Konstante C noch verfügt wird. $B(z)$ hat wegen der Konvergenz der Reihe $\Sigma(1 - |z_k|)$ genau an den Stellen $0, z_1, z_2, \dots$ Nullstellen.

Wir setzen nun

$$f(z) = z + B(z). \tag{9}$$

Die Funktion $f(z)$ besitzt also in D genau an den Stellen $0, z_1, z_2, \dots$ Fixpunkte.

Für das weitere benötigen wir die Funktion

$$K(z) = z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{zB''}{1+B'}, \tag{10}$$

(vgl. [1]) sowie das Verhalten von Re $(K(z))$ in D. Zu diesem Zweck berechnen wir $B'(z)$ und $B''(z)$:

$$\begin{aligned} B'(z) = C\Bigg(2z \prod_{l=1}^{L} [(1-\bar{y}_l z)^4 B_l(z)] + \\ + z^2 \sum_{l=1}^{L} \Big\{[-4\bar{y}_l(1-\bar{y}_l z)^3 B_l(z) + (1-\bar{y}_l z)^4 B_l'(z)] \cdot \\ \cdot \prod_{\substack{\lambda=1 \\ l\neq\lambda}}^{L} [(1-\bar{y}_\lambda z)^4 B_\lambda(z)]\Big\}\Bigg) \end{aligned} \tag{11}$$

und weiter

$$\begin{aligned} B''(z) = C\Bigg(2 \prod_{l=1}^{L} [(1-\bar{y}_l z)^4 B_l(z)] + \\ + 4z \sum_{l=1}^{L} \Big\{[-4\bar{y}_l(1-\bar{y}_l z)^3 B_l(z) + (1-\bar{y}_l z)^4 B_l'(z)] \cdot \\ \cdot \prod_{\substack{\lambda=1 \\ l\neq\lambda}}^{L} [(1-\bar{y}_\lambda z)^4 B_\lambda(z)]\Big\} + \\ + z^2 \sum_{l=1}^{L} \Big\{12\,\bar{y}_l^2(1-\bar{y}_l z)^2 B_l(z) \prod_{\substack{\lambda=1 \\ l\neq\lambda}}^{L} [(1-\bar{y}_\lambda z)^4 B_\lambda(z)] - \\ - 4\bar{y}_l(1-\bar{y}_l z)^3 B_l'(z) \prod_{\substack{\lambda=1 \\ l\neq\lambda}}^{L} [(1-\bar{y}_\lambda z)^4 B_\lambda(z)] - \\ - 4\bar{y}_l(1-\bar{y}_l z)^3 B_l(z) \sum_{\substack{\lambda=1 \\ l\neq\lambda}}^{L} [-4\bar{y}_\lambda(1-\bar{y}_\lambda z)^3 B_\lambda(z) + \\ + (1-\bar{y}_\lambda z)^4 B_\lambda'(z)] \prod_{\substack{\lambda=1 \\ l\neq\tilde{\lambda}\neq\lambda}}^{L} [(1-\bar{y}_{\tilde{\lambda}} z)^4 B_{\tilde{\lambda}}(z)] + \end{aligned} \tag{12}$$

$$+ (-4\bar{y}_l)(1-\bar{y}_l z)^3 B_l'(z) \prod_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L} [(1-\bar{y}_\lambda z)^4 B_\lambda(z)] +$$

$$+ (1-\bar{y}_l z)^4 B_l''(z) \prod_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L} [(1-\bar{y}_\lambda z)^4 B_\lambda(z)] +$$

$$+ (1-\bar{y}_l z)^4 B_l'(z) \sum_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L} [-4\bar{y}_l(1-\bar{y}_\lambda z)^3 B_\lambda(z) +$$

$$+ (1-\bar{y}_\lambda z)^4 B_\lambda'(z)] \prod_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\tilde{\lambda}\neq\lambda}}^{L} [(1-\bar{y}_{\tilde{\lambda}} z)^4 B_{\tilde{\lambda}}(z)]\Big\}\Big).$$

Für die in diesen Formeln auftretenden Ableitungen $B_l'(z)$ und $B_l''(z)$ der Blaschke-Produkte $B_l(z)$, $l = 1, \dots, L$, gilt:

$$B_l'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_{kl}}{|z_{kl}|} \frac{1-|z_{kl}|^2}{(1-\bar{z}_{kl} z)^2} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} \frac{\bar{z}_{jl}}{|z_{jl}|} \frac{z-z_{jl}}{1-\bar{z}_{jl} z} \tag{13}$$

und

$$B_l''(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -2 \frac{\bar{z}_{kl}^2}{|z_{kl}|} \frac{1-|z_{kl}|^2}{(1-\bar{z}_{kl} z)^3} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{z}_{jl}}{|z_{jl}|} \frac{z-z_{jl}}{1-\bar{z}_{jl} z} \right\} + \tag{14}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\bar{z}_{kl}}{|z_{kl}|} \frac{1-|z_{kl}|^2}{(1-\bar{z}_{kl} z)^2} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty} \left[\frac{\bar{z}_{jl}}{|z_{jl}|} \frac{1-|z_{jl}|^2}{(1-\bar{z}_{jl} z)^2} \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdot \prod_{\substack{h=1\\ k\neq h\neq j}}^{\infty} \frac{\bar{z}_{hl}}{|z_{hl}|} \frac{z-z_{hl}}{1-\bar{z}_{hl} z} \right] \right\}.$$

Wir schätzen nun $B(z)$, $B'(z)$ und $B''(z)$ gleichmässig für alle $z \in D$ ab:

$$a) \quad \sup_{z\in D} |B(z)| = \sup_{z\in D} \left| C z^2 \prod_{l=1}^{L} [(1-\bar{y}_l z)^4 B_l(z)] \right| \leq \tag{15}$$

$$\leq C \prod_{l=1}^{L} 2^4 = C\, 2^{4L}.$$

Um $B'(z)$ und $B''(z)$ abzuschätzen, schätzen wir zunächst die Funktionen $(1-\bar{y}_l z)^2 B_l'(z)$ und $(1-\bar{y}_l z)^4 B_l''(z)$, $l = 1, \dots, L$, ab. Nach Voraussetzung konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|) = A^*$ Wir setzen $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)=A$. Aus der Formel (13) für $B_l'(z)$ und der Abschätzung (6) folgt dann:

$$
\begin{aligned}
(16)\qquad & \sup_{z\in D}|(1-\bar{y}_l z)^2 B_l'(z)| = \sup_{z\in D}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\bar{z}_{kl}}{|z_{kl}|}\frac{(1-\bar{y}_l z)^2}{(1-\bar{z}_{kl} z)^2}(1-|z_{kl}|^2)\cdot\right.\\
& \left.\cdot\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\frac{\bar{z}_{jl}}{|z_{jl}|}\frac{z-z_{jl}}{1-\bar{z}_{jl} z}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left[\sup_k \sup_{z\in D}\left|\frac{1-\bar{y}_l z}{1-\bar{z}_{kl} z}\right|\right]^2(1-|z_{kl}|^2)\leq B^2 A
\end{aligned}
$$

Weiter folgt aus der Formel (14) für $B_l''(z)$ und aus (6):

$$
\begin{aligned}
& \sup_{z\in D}|(1-\bar{y}_l z)^4 B_l''(z)| = \sup_{z\in D}\left|-2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\bar{z}_{kl}^2}{|z_{kl}|}\frac{(1-\bar{y}_l z)^3}{(1-\bar{z}_{kl} z)^3}\cdot\right.\right.\\
& \left.\cdot(1-\bar{y}_l z)(1-|z_{kl}|^2)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\frac{\bar{z}_{jl}}{|z_{jl}|}\frac{z-z_{jl}}{1-\bar{z}_{jl} z}\right\}+\\
& +\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\bar{z}_{kl}}{|z_{kl}|}\frac{(1-\bar{y}_l z)^2}{(1-\bar{z}_{kl} z)^2}(1-|z_{kl}|^2)\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\frac{\bar{z}_{jl}}{|z_{jl}|}\frac{(1-\bar{y}_l z)^2}{(1-\bar{z}_{jl} z)^2}\cdot\right.\\
& \left.\left.\cdot(1-|z_{jl}|^2)\prod_{\substack{h=1\\ k\neq h\neq j}}^{\infty}\frac{\bar{z}_{hl}}{|z_{hl}|}\frac{z-z_{hl}}{1-\bar{z}_{hl} z}\right\}\right|\leq\\
(17)\qquad & \leq 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\sup_k \sup_{z\in D}\frac{|1-\bar{y}_l z|}{|1-\bar{z}_{kl} z|}\right]^3\left[\sup_{z\in D}|1-\bar{y}_l z|\right](1-|z_{kl}|^2)\right\}+\\
& +\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\sup_k \sup_{z\in D}\left|\frac{1-\bar{y}_l z}{1-\bar{z}_{kl} z}\right|\right]^2(1-|z_{kl}|^2)\cdot\right.\\
& \left.\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left[\sup_k \sup_{z\in D}\frac{|1-\bar{y}_l z|}{|1-\bar{z}_{jl} z|}\right]^2(1-|z_{jl}|^2)\right\}\leq\\
& \leq 2.B^3.2.A+B^2.AB^2.A=AB(4B^2+AB^3).
\end{aligned}
$$

Aus (11) und (17) erhalten wir die Abschätzung von $B'(z)$:

$$(18)\qquad b)\qquad \sup_{z\in D}|B'(z)|\leq C\left(\prod_{l=1}^{L}\sup_{z\in D}(|1-\bar{y}_l z|^4|B_l(z)|)+\right.$$

$$+\sum_{l=1}^{L}\left\{4\,[\sup_{z\in D}(|1-\bar{y}_l z|^3|B_l(z)|)+\sup_{z\in D}(|1-\bar{y}_l z|^4|B_l'(z)|)]\cdot\right.$$

$$\left.\left.\cdot\prod_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L}[\sup_{z\in D}(|1-\bar{y}_\lambda z|^4|B_\lambda(z)|)]\right\}\right)\leq C(2^{4L}+[L.4.2^3+L.2^2.B^2A]2^{4(L-1)}$$

Die rechte Seite dieser Abschätzung (18) bezeichnen wir mit $C.\Phi(A,B,L)$.

$B''(z)$ wird mittels (12), (16) und (17) abgeschätzt:

$$(19)\qquad c)\qquad \sup_{z\in D}|B''(z)|\leq C\left(2\prod_{l=1}^{L}2^4+4\sum_{l=1}^{L}\left\{[4.2^3+\right.\right.$$

$$\left.+2^2\sup_{z\in D}(|(1-\bar{y}_l z)^2B_l'(z)|)]\prod_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L}2^4\right\}+\sum_{l=1}^{L}\left\{12.2^2.\prod_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L}2^4+\right.$$

$$+4.2\,[\sup_{z\in D}|(1-\bar{y}_l z)^2B_l'(z)|]\prod_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L}2^4+$$

$$+4\cdot 2^3\sum_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L}[4.2^3+2^2[\sup_{z\in D}|(1-\bar{y}_\lambda z)B_\lambda'(z)|]]\cdot\prod_{\substack{\tilde{\lambda}=1\\ l\neq\tilde{\lambda}\neq\lambda}}^{L}2^4+$$

$$+4.2\,[\sup_{z\in D}|(1-\bar{y}_l z)^2B_l'(z)|]\cdot\prod_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L}2^4+$$

$$+[\sup_{z\in D}|(1-\bar{y}_l z)^4B_l''(z)|]\prod_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L}2^4+$$

$$+2^2[\sup_{z\in D}|(1-\bar{y}_l z)^2B_l'(z)|]\sum_{\substack{\lambda=1\\ l\neq\lambda}}^{L}[4.2^3+$$

$$\left.\left.+2^2[\sup_{z\in D}|(1-\bar{y}_\lambda z)^2B_\lambda'(z)|]]\prod_{\substack{\tilde{\lambda}=1\\ l\neq\tilde{\lambda}\neq\lambda}}^{L}2^4\right\}\right)\leq$$

$$\leq C\,(2^{4L+1}+4L\,\{[2^5+2^2B^2A].2^{4(L-1)}\}+$$

$$+ L\{3.2^4.2^{4(L-1)} + 2^3.B^2 A.2^{4(L-1)} + 4.2^3(L-1)\cdot$$

$$\cdot[4.2^3 + 2^2.B^2 A].2^{4(L-2)} + 4.2.B^2 A.2^{4(L-1)} +$$

$$+ A.B(4B^2 + AB^3).2^{4(L-1)} + 2^2.B^2 A(L-1)\cdot$$

$$\cdot[4.2^3 + 2^2.B^2 A].2^{4(L-2)}\}).$$

Die rechte Seite von (19) bezeichnen wir mit $C.\Psi(A, B, L)$.

Somit gilt: Die durch (8) definierte Funktion $B(z)$ hat die Eigenschaft, dass

a 1) $\sup\limits_{z \in D} |B(z)| \leq C.2^{4L}$

b 2) $\sup\limits_{z \in D} |B'(z)| \leq C.\Phi(A, B, L)$

c 3) $\sup\limits_{z \in D} |B''(z)| \leq C.\Psi(A, B, L)$,

wobei die Funktionen $\Phi(A, B, L)$ und $\Psi(A, B, L)$ mit A, B und L *nur* von der Folge der Fixpunkte $z_1, z_2, \ldots$ abhängen. Wir wählen nun die noch frei verfügbare Konstante C so klein, dass

a 2) $C.2^{4L} < \varepsilon$

b 2) $C.\Phi(A, B, L) < \frac{1}{2}$

c 3) $C.\Psi(A, B, L) < \frac{1}{2}$.

Dann ist nach (9), (10) und b 2), c 2), b 3), c 3)

$$\text{(20)} \qquad \sup_{z \in D} |K(z)| = \sup_{z \in D} \left| \frac{z.f''(z)}{f'(z)} \right| = \sup_{z \in D} \left| \frac{zB''(z)}{1 + B'(z)} \right| \leq$$

$$\leq \frac{\sup |B''(z)|}{1 - \sup |B'(z)|} < \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Wegen (8), (11) ist $B'(0) = 0$, also auch $K(0) = 0$. Daraus folgt wegen (20)

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z \cdot f''(z)}{f'(z)}\right) > -1.$$

Das bedeutet aber nach [1], p. 81, dass die Funktion $f(z) = z + B(z)$ den Einheitskreis D auf ein konvexes Gebiet abbildet. Aus (9) und (11) folgt weiter $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$. Wegen *a*), *a* 1), *a* 2), *a* 3) ist auch

$$\sup_{z \in D} |f(z)| = \sup_{z \in D} |z + B(z)| \leq 1 + \varepsilon. \tag{21}$$

Die Schlichtheit von $f(z)$ allein ergibt sich so: Nach *b* 2) und *b* 3) ist

$$\inf_{z \in D} \operatorname{Re}(f'(z)) = \inf_{z \in D} \operatorname{Re}(1 + B'(z)) \geq 1 - \sup_{z \in D} |B'(z)| > \frac{1}{2}. \tag{22}$$

Daraus folgt aber für $z_2 \neq z_1$:

$$f(z_1) - f(z_2) = \int_{z_2}^{z_1} f'(z)\, dz = (z_1 - z_2)\left(\int_0^1 \operatorname{Re} f'(z_2 + \right.$$

$$\left. + t(z_1 - z_2))\, dt + i \int_0^1 \operatorname{Im} f'(z_2 + t(z_1 - z_2))\, dt\right) \neq 0.$$

Die letzte Schlussweise wurde [4] entnommen. Die Abschätzung (22) lehrt darüber hinaus, dass $f(z)$ in der Kugel um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{\pi}{3}$ des von Hornich eingeführten Banach-Raumes B [4] liegt. Wenn man in (21) mit $\varepsilon \to 0$ geht, strebt

$$f_\varepsilon(z) = z + C(\varepsilon) \prod_{l=1}^{L} (1 - \bar{y}_l z)^4 B_l(z)$$

gleichmässig gegen z. Man kann mit (18) zeigen, dass die Konvergenz auch im Sinne der Norm aus [4]

$$\sup_{z_1, z_2 \in D} \left| \arg \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \right| = \|f\|$$

stattfindet.

LITERATUR

[1] L. BIEBERBACH: *Lehrbuch der Funktionentheorie II* (1931).

[2] W. K. HAYMAN: *Meromorphic functions*, Oxford (1964).

[3] K. HOFFMAN: *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall (1962).

[4] H. HORNICH: *Über einen Banachraum analytischer Funktionen*, Man. Math. 1, 79-86, (1969).

[5] H. HORNICH: *Über die Fixpunkte der schlichten Funktionen*, Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, Vol. II, fasc. I, 54-58 (1970).

[6] I. I. PRIWALOW: *Randeigenschaften analytischer Funktionen*, Deutscher Verlag der Wissenschaften (1956).