PIANI QUASI-EUCLIDEI (*)

di Fabio Rossi (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - Si introduce la nozione di piani quasi-euclidei e si esaminano le relazioni fra tali piani ed i piani sopragrafici e quasigrafici di P. V. Ceccherini.

SUMMARY. - The notion of quasi-euclidean planes is introduced and relations of these planes with the upper-graphic and quasi-graphic planes of P. V. Ceccherini are examinated.

Introduzione.

In una recente memoria, P. V. Ceccherini, generalizzando gli spazi grafici e gli spazi affini, ha introdotto le nozioni di spazio « sopragrafico » e di spazio « quasigrafico » [1]. Nella stessa memoria si studiano le proprietà fondamentali di tali spazi, con particolare riguardo a quelle reticolari.

Il presente lavoro è dedicato ad un esame più approfondito degli spazi sopragrafici di dimensione due (piani sopragrafici). Dopo aver caratterizzato i piani quasigrafici entro la famiglia dei piani sopragrafici (n. 1), si considerano, al n. 2, dei piani sopragrafici di ordine finito, in relazione ad una nozione di parallelismo riflessiva e simmetrica, ma generalmente non transitiva. Nel n. 3 si introduce la nozione di piano quasi-euclideo, come piano sopragrafico in cui per ogni punto passa al più una retta parallela ad una qualunque retta assegnata. Questi piani (che ovviamente costituiscono una generalizzazione dei piani grafici e dei piani affini) vengono poi (n. 4) messi in relazione ai piani quasigrafici. Ci si dedica

^(*) Pervenuto in Redazione il 16 novembre 1970.

^(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

quindi allo studio delle relazioni esistenti fra le cardinalità delle rette di un piano quasi euclideo finito (n. 5), relazioni che permettono, fra l'altro, il confronto fra il concetto di piano quasi euclideo e quello di piano grafico e piano affine (n. 6).

Al fine di determinare la classe dei piani quasi-euclidei finiti (entro quella dei piani sopragrafici) si dimostra (n. 11), che essa, oltre ai piani grafici ed ai piani affini, comprende certe altre due classi di piani sopragrafici che vengono esaminati nei n. 7, 8, 10, 11. Nel n. 9, invece, restano caratterizzati i piani affini entro la classe dei piani quasi-euclidei.

I piani quasi-euclidei rientrano tutti nella famiglia dei piani affini generalizzati secondo Permutti [2]. I risultati precedenti consentono allora di caratterizzare i piani quasi euclidei finiti dal punto di vista di detti piani affini generalizzati. Si prova infatti che le quattro classi di cui sopra sono formate dai piani affini generalizzati che si ottengono sopprimendo da un piano grafico irriducibile di ordine finito $n \, (n \geq 3)$ rispettivamente nessun punto, una retta, un punto solo oppure n-1 punti allineati.

Per le definizioni e le proprietà fondamentali degli spazi sopragrafici e quasigrafici si rimanda alla memoria [1].

1. Piani sopragrafici e piani quasigrafici.

Diremo piano sopragrafico ogni spazio sopragrafico di dimensione r=2.

Si dimostra, sia dal punto di vista geometrico, sia (come in [1]) sfruttando le proprietà reticolari di detti spazi, che ogni piano sopragrafico è un piano affine generalizzato di Permutti e viceversa.

Nel corso della presente trattazione ci riferiremo sempre alla definizione assiomatica dei piani affini generalizzati indicata in [2] che caratterizza quindi anche i piani sopragrafici.

Sarà pertanto un piano sopragrafico ogni insieme di elementi, da dirsi *punti*, in cui sono definiti certi sottoinsiemi, da dirsi *rette*, tali che:

- a) ogni retta contenga almeno due punti distinti;
- b) per due punti distinti qualsiasi passi una e una sola retta;
- c) esistano punti non allineati.

Dalla definizione di spazio quasigrafico discende immediata mente che:

1.1. Un piano sopragrafico S è quasigrafico se e solo se ogni sottoinsieme A di S avente almeno tre punti non allineati e contenente la retta congiungente due suoi punti distinti qualsiasi, è tale che A = S.

Introduciamo ora nei piani sopragrafici il concetto di parallelismo fra rette, dicendo « parallele » due rette se sono o coincidenti o prive di punti in comune. E' del tutto evidente che tale relazione, pensata come relazione binaria nell'insieme delle rette del piano, gode della proprietà riflessiva e simmetrica, ma non, in generale, della proprietà transitiva.

2. Alcune considerazioni sui piani sopragrafici di ordine finito $n \geq 2$.

In questo numero prenderemo in considerazione dei piani sopragrafici dotati di « ordine » finito n, cioè tali che ogni loro retta possegga il medesimo numero $n \geq 2$ di punti distinti.

2.1. Se in un piano sopragrafico S d'ordine finito n esiste un punto P tale che le rette per P siano in numero finito, uguale ad $s (\geq n)$, per ogni punto di S passano s ed s sole rette.

Infatti, nelle ipotesi ammesse, il piano è costituito da s(n-1)+1 punti; se ora per un punto Q distinto da P passassero $h \neq s$ rette, il piano risulterebbe formato da h(n-1)+1 punti, il che è assurdo.

Da questa proposizione discende ancora che:

2.2. Se in un piano sopragrafico S di ordine finito $n \geq 2$ esistono un punto P ed una retta r non passante per P in modo che per P passino s parallele alla r, allora per ogni punto Q di S passano s parallele ad una qualsiasi retta non passante per Q ($s \geq 0$).

La proposizione è immediata qualora si pensi che, a norma della (2.1.), ogni fascio di rette è costituito da n+s rette delle quali n, ed n soltanto, possono intersecare una qualsiasi retta non passante per il centro del fascio.

La proposizione precedente può essere parzialmente invertita; proviamo infatti che sussiste la seguente proprietà:

2.3. Se per ogni punto P di un piano sopragrafico S passano s ed s sole parallele ad una qualsiasi retta non passante per P (con $s \ge 1$), allora tutte le rette di S hanno la medesima cardinalità.

Siano a una retta arbitrariamente fissata in $S \in b$ una qualsiasi retta di S. Supponiamo, in primo luogo, b incidente a e sia Q il punto comune di a e b. Detto P un ulteriore punto di b diverso da Q, per P passa almeno una parallela c alla a. Se la retta a contiene un numero finito n di punti, indicato con R un punto di c diverso da P, per R passano s+n rette delle quali s ed s sole sono parallele alla b. Su b ci sono quindi n punti.

Se poi a ha cardinalità non finita, poiché l'insieme delle rette per R ha la medesima cardinalità di a, si conclude ancora, osservando che le parallele alla retta b sono in numero finito uguale ad s, che b ha la stessa cardinalità della retta a. Sia ora b parallela ad a e consideriamo una qualsiasi retta d che incida tanto a che b. Per quanto detto, la retta d ha la medesima cardinalità della retta a, da cui, ragionando allo stesso modo su d e b, si conclude che anche le rette b ed a hanno la stessa cardinalità.

Nel caso che esista in S una retta con cardinalità finita uguale ad n, si deduce quindi che S ha ordine n.

Si noti che la condizione $s \ge 1$ è essenziale ai fini della dimostrazione: come esempio si consideri un piano grafico riducibile non costituito da una terna di punti.

3. Piani quasi-euclidei.

In un piano sopragrafico non vale, in generale, la seguente condizione:

(ε) Per ogni punto P del piano passa al più una retta parallela ad una qualsiasi retta data (4).

Se il piano sopragrafico verifica anche la (e), esso verrà chiamato piano quasi-euclideo.

Risulta intanto evidente che i piani quasi-euclidei sono tutti e soli i piani sopragrafici in cui la relazione di parallelismo è una relazione di equivalenza nell'insieme delle rette del piano stesso.

Dalla definizione segue immediatamente che:

3.1. I piani affini ed i piani grafici sono piani quasi-euclidei. Esistono invece piani quasi-euclidei che non sono nè affini nè grafici, come risulta dal seguente esempio: considerato un insieme

⁽¹⁾ Si pensi, ad esempio, ad un insieme di cinque elementi, da dirsi punti, in cui si chiamino «rette» le coppie di punti.

di cinque elementi $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, che diremo punti, definiamo come rette i sottoinsiemi: $\{1, 5, 3\}$; $\{4, 5, 2\}$; $\{1, 2\}$; $\{3, 4\}$; $\{4, 1\}$; $\{2, 3\}$. Si vede subito che si ottiene in tal modo un piano sopragrafico che verifica la (ε) , ma che non è nè grafico nè affine.

4. Condizioni perché un piano quasi-euclideo sia quasigrafico.

È noto che esistono piani sopragrafici che non sono quasigrafici ([1]). In particolare, esistono piani quasi-euclidei che non sono quasigrafici (ad esempio i piani affini di ordine 2). Troveremo in questo numero delle condizioni sufficienti affinché un piano quasi-euclideo sia anche quasigrafico.

Proviamo anzitutto che:

4.1. Se in un piano quasi-euclideo S, ogni triangolo possiede qualche lato con almeno tre punti distinti, allora S è un piano quasigrafico.

Diciamo \mathcal{A} un sottoinsieme di \mathcal{S} contenente almeno tre punti distinti non allineati e tale che, assieme a due suoi punti distinti qualsiasi, ne contenga pure la congiungente.

Siano P, Q, R, tre punti di $\mathcal A$ non allineati. Supponiamo che sul lato \overline{PQ} ci siano almeno tre punti e diciamo T un punto di detto lato, diverso da P e da Q. Preso un arbitrario punto L di S, costruiamo la retta \overline{LT} . Almeno una delle due rette \overline{RP} e \overline{RQ} deve incidere la \overline{LT} in un punto H distinto da T. Poiché sia H che T appartengono ad $\mathcal A$, se ne deduce che anche $L \in \mathcal A$. Dunque $\mathcal A = S$, il che basta per asserire che S è un piano quasigrafico (cfr. 1.1.).

Mostriamo ora che:

4.2. Ogni piano quasi-euclideo contenente qualche retta con almeno tre punti, è un piano quasigrafico.

Dimostriamo infatti che per un siffatto piano vale l'ipotesi di (4.1.). Siano, per assurdo, P, Q, R, tre punti non allineati di S tali che il triangolo PQR abbia come lati le coppie di punti (P, Q), (P, R) e (Q, R). In questa ipotesi, detta a una retta contenente almeno tre punti distinti, questa deve necessariamente passare per un vertice del triangolo: ciò si riconosce facilmente tenuto conto che S è quasi-euclideo. Sia, ad es., P tale vertice. Allora le rette \overline{QH} e \overline{QK} , con H e K due punti di a distinti da P, sono due rette

distinte per Q, parallele alla retta \overline{PR} , il che è assurdo. Da (4.1.) segue quindi la (4.2.).

E' quasi superfluo osservare che la condizione (4.2.) non è, in generale, necessaria: ogni piano grafico riducibile di ordine due è un piano quasigrafico quasi-euclideo in cui non esistono rette con più di due punti. Vedremo però (cfr. 6.3.), che tali piani costituiscono le uniche eccezioni.

In [1] n. 7, si dimostra che ogni spazio affine di ordine $n \ge 3$ è uno spazio quasigrafico. Tale proprietà, nel caso dei piani affini, può essere ottenuta anche come caso particolare della (4.2.). Osserviamo inoltre che per detti piani la proprietà (4.2.) è anche necessaria, come segue direttamente dalla definizione stessa di piano affine.

5. Considerazioni sulla cardinalità delle rette dei piani quasieuclidei finiti.

Ci proponiamo in questo e nei successivi numeri 9, 10, 11, di studiare più approfonditamente i piani quasi-euclidei finiti e di giungere ad una loro caratterizzazione. Consideriamo anzitutto la seguente proprietà della quale faremo frequente uso in seguito:

 (α) Dato un piano sopragrafico, esista una sua retta a che ammetta almeno una parallela, distinta da a stessa.

Ciò premesso, osserviamo che:

5.1. Se in un piano quasi-euclideo S, verificante la (α) , la retta a di cui in (α) contiene un numero finito $n \geq 2$ di punti, allora ogni retta di S contiene o n oppure n+1 punti.

Considerata infatti una qualsiasi retta c che incide la retta a, sia P, l'intersezione di c con una parallela, b, alla a. Dall'ipotesi ammessa sulla retta a si deduce che il fascio di rette di centro R, con R un arbitrario punto di b diverso da P, è costituito da n+1 rette distinte. Poiché S è quasi-euclideo, ne deriva quindi che c possiede o n o n+1 punti distinti. Sia ora d una retta parallela alla a. Se $n \geq 3$, ogni retta intersecante la a, e quindi la d, contiene almeno tre punti distinti; proiettati quindi i punti della retta a da un punto P di S, non appartenente nè ad a nè a d, si riconosce che su d ci sono ancora n e soltanto n punti.

Se n=2, la retta d deve avere pure essa cardinalità due: se infatti ciò non fosse vero, scambiando il ruolo di d con quello di a nei ragionamenti precedenti, si troverebbe che a stessa dovrebbe contenere almeno tre punti.

Osserviamo in particolare che, da quanto detto, discende che le rette parallele alla a possiedono n punti distinti e non di più. E' altresì evidente, che possono esistere, in queste ipotesi, delle rette di cardinalità n che non sono parallele alla a, come mostra l'esempio al numero 3. Si può vedere però che, sempre nelle ipotesi precedenti, è valida la proprietà:

5.2. Le rette d di S che ammettono almeno una parallela distinta da d sono tutte e sole le rette di cardinalità n.

Sia c una retta di cardinalità n e supponiamo, per assurdo, che non esista alcuna parallela a c. Detta allora b una parallela alla retta a, di cui all'ipotesi (α) , c sarà intersecata sia dalla a che dalla b. Inoltre, se R è un punto di b distinto dal punto di intersezione Q di b e c, le n+1 rette del fascio di centro R intersecano la retta c, che viene perciò ad avere n+1 punti; il che è assurdo. Considerata ora una qualsiasi retta di cardinalità n+1, è immediato che essa non ammette alcuna parallela in S: altrimenti, applicando la (5.1.), ogni retta di S dovrebbe contenere almeno n+1 punti, il che, nelle nostre ipotesi, è assurdo.

Dalla dimostrazione della proprietà precedente appare chiaro che la retta c ammette parallela per ogni punto di b e viceversa, ove b e c sono le rette ivi considerate. Attesa l'arbitrarietà di b e c si vede anzi, più in generale, che:

5.3. Se due rette hanno cardinalità n, per ogni punto di ognuna di esse passa una parallela all'altra.

Dalla (5.2.) e dalla (5.3.) deriva poi immediatamente che:

5.4. Condizione necessaria e sufficiente affinché una retta c di S, di cardinalità n, ammetta una parallela per un punto P di S, é che per P passi almeno una retta contenente solo n punti.

Ricordiamo che si è fin qui operato sui piani quasi-euclidei godenti della proprietà (α) ed inoltre tali che la retta a di cui in (α) sia costituita da n punti distinti.

Per concludere questo numero dimostriamo, sempre per piani siffatti, ancora una proprietà:

5.5. Se in S esiste una retta c costituita da n punti, non parallela alla a, ogni retta r che ammette una parallela distinta da r, ammette ulteriori n-1 parallele.

La retta a ammette ovviamente n-1 parallele, distinte da a stessa: da quanto visto in precedenza, infatti, a ammette una parallela in ogni punto di c. E' altresì evidente che a non può avere più di n-1 parallele in S poiché S è quasi-euclideo. Con lo stesso metodo si conclude che anche una qualsiasi retta r di S, di cardinalità n (che ammette cioè parallele distinte da r), possiede in S altre n-1 parallele.

6. Piani quasi-euclidei di ordine finito $n \ge 2$.

Abbiamo già osservato che i piani affini e i piani grafici sono piani quasi-euclidei. In particolare è noto che per tutti i piani affini e piani grafici irriducibili finiti si può parlare di ordine $n \ (n \ge 2, n \ge 3)$ rispettivamente).

Consideriamo ora un piano quasi-euclideo S in cui ogni retta contenga lo stesso numero finito n di punti. Se due rette qualsiasi di S si intersecano, S è un piano grafico. In caso contrario siano a e b due rette distinte parallele. Fissato un punto P su a, si ha che P non appartiene a b e che per P passa una sola retta a, parallela a b. Tenuto ancora conto che S è di ordine finito, la (2.2.) assicura che S è un piano affine. Si ha così che:

6.1. Ogni piano quasi-euclideo di ordine finito $n \ge 2$ è un piano grafico od un piano affine (d'ordine n).

Ovviamente non vale, in generale, il viceversa. Possiamo però dire che:

6.2. Condizione necessaria e sufficiente affinché un piano quasieuclideo abbia ordine finito $n \geq 2$ è che esso sia affine di ordine n, oppure grafico di ordine n.

Notiamo ancora che poiché, come abbiamo avuto occasione di osservare al numero 4, un piano affine di ordine due non è quasigrafico, dalle proprietà precedenti segue immediatamente la proposizione:

6.3. I piani quasigrafici quasi-euclidei di ordine due sono tutti e soli i piani grafici (riducibili) di ordine due.

Inoltre, tenendo conto anche della (4.2.):

6.4. Ogni piano quasi-euclideo, non quasigrafico, è affine (di ordine n=2).

Esistono, come si prova con opportuni esempi, piani sopragrafici finiti non quasi-euclidei di ordine (finito) n, almeno per qualche n.

Per tali piani, a norma delle proposizioni del numero 2, vale questa caratterizzazione:

6.5. Un piano sopragrafico finito di ordine $n \ge 2$, che non sia quasi-euclideo, gode della proprietà che per ogni suo punto passano $r (r \ge 2)$ rette parallele ad una qualsiasi retta non passante per esso, e, viceversa, un piano sopragrafico che gode di quest'ultima proprietà e che possiede una retta con n punti, non è quasi-euclideo ed è di ordine n.

7. Una particolare famiglia di piani quasi euclidei.

Abbiamo visto al numero 3 che esistono dei piani quasi-euclidei che non sono né affini né grafici. Considereremo ora un'altra famiglia di piani quasi-euclidei che non sono né affini, né grafici e che avranno particolare significato per ulteriori sviluppi.

Diremo che un piano sopragrafico è un Δ -piano se verifica l'ulteriore proprietà :

 (Δ) Esista in esso una retta a che ammette una ed una sola parallela per ogni punto del piano; inoltre, ogni retta b che incide a, incida ogni retta del piano.

Vediamo in primo luogo che:

7.1. Ogni A-piano S è quasi euclideo.

Siano h, k, l, tre rette distinte qualsiasi di S, e sia h parallela a k e k parallela a l. È intanto evidente che le tre rette devono essere parallele alla retta a di cui in (Δ). Se ora h non fosse parallela ad l, detto P il loro punto comune, per P passerebbero due rette distinte parallele alla retta a, contro l'ipotesi che S è un Δ -piano. Essendo quindi la relazione di parallelismo fra le rette di S una relazione di equivalenza, se ne deduce che S è un piano quasi-euclideo. È poi evidente che un Δ -piano non può essere né grafico né affine.

Può ancora essere non privo di interesse osservare che la riunione delle famiglie dei piani affini, dei piani grafici e dei ⊿-piani è propriamente contenuta nella famiglia dei piani quasi-euclidei, come dimostra l'esempio al numero 3.

8. Caratterizzazione dei ⊿-piani.

Consideriamo ora un qualunque piano grafico irriducibile G, finito o no. Sia R un punto qualsiasi di G e consideriamo l'insieme $S = G - \{R\}$. La struttura di incidenza indotta da G su S, poiché S contiene tre punti indipendenti, è un piano affine generalizzato di Permutti, secondo la definizione data per questi spazi in [1], (n. 8); S è dunque un piano sopragrafico. Inoltre, come si vede subito, le rette di S sono tutte e sole le tracce su S delle rette di G. Considerata ora una retta G di G passante per G, diciamo G la sua traccia su G. Detto G un punto arbitrario di G, per G passa una ed una sola retta parallela alla G; precisamente la retta G G essa viene intersecata da ogni retta di G, essa viene intersecata da ogni retta di G; perciò G gode della proprietà (G). È quindi provato che:

8.1. La struttura di incidenza indotta da un piano grafico irriducibile su di un suo qualsiasi sottoinsieme ottenuto privando il piano di un punto, è un A-piano.

Sia ora dato un Δ -piano S e sia R un ente arbitrario $(R \notin S)$ che aggiungiamo, come punto, ad S, costruendo l'insieme $G = S + \{R\}$. Prendendo in considerazione la retta a di S, di cui in (Δ) , definiamo in G dei sottoinsiemi, che diremo rette, al modo seguente:

- 1) È retta in G l'insieme di tutti e soli i punti di una medesima retta di S non parallela alla a;
- 2) È retta in G l'insieme: $c + \{R\}$, ove c è una retta di S parallela alla a.

È immediato che con questa definizione l'insieme G è un piano grafico; si osservi ancora che, per definizione di rette di G, la struttura di incidenza indotta da G su S coincide con la struttura di partenza.

Facciamo ora vedere che G è irriducibile. Ciò risulta infatti subito dalla seguente proprietà :

8.2. Se la retta a di S contiene n punti, tutte le parallele ad a possiedono pure n punti, mentre le rette incidenti a ne possiedono n+1. Se a ha invece cardinalità infinita, ogni retta di S ha la medesima cardinalità di a.

Consideriamo infatti una retta b di S parallela alla a. Siano H, K due punti di a ed L, M due punti di b. Le due rette \overline{HL} e

 \overline{KM} si intersecano in un punto P, poiché S è un Δ -piano. La corrispondenza che si ottiene associando ad ogni punto $Q \in a$ il punto $R = \overline{QP} \cap b$ è, ovviamente, una corrispondenza biunivoca fra $a \in b$, il che assicura che la retta b ha la stessa cardinalità della retta a. Dall'arbitrarietà di b segue quindi che tutte le parallele alla retta a hanno la stessa cardinalità di a. In particolare, se a ha cardinalità finita n, anche ogni parallela alla a contiene n ed n soli punti. Sempre in quest'ultimo caso, poi, consideriamo una qualsiasi retta c incidente a in Q. Siano R un punto di c, con $R \neq Q$, e b la parallela per R alla retta a. Su b si consideri un ulteriore punto $H \neq R$. Poiché S è un Δ -piano, ogni retta del fascio di centro H incide la retta c; ma tale fascio è costituito, oltre che dalla retta b, da altre n rette, e quindi c contiene n+1 punti.

Se invece a ha cardinalità infinita, anche la retta c ha la medesima cardinalità di a, poiché essa è anche la cardinalità del fascio di rette di centro H.

Riunendo i risultati ottenuti nel presente numero, possiamo affermare che:

8.3. I A-piani sono tutti e soli i piani affini generalizzati di Permutti, che si ottengono sopprimendo un punto da un qualsiasi piano grafico irriducibile.

9. Condizione affinché un piano quasi-euclideo sia un piano affine.

9.1. Se in un piano quasi-euclideo S esistono una retta a di cardinalità n che ammette una parallela per ogni punto del piano, ed una retta c, pure di cardinalità n, che incide la a, S è un piano affine, d'ordine n.

È anzitutto immediato che S gode della proprietà (α) , indicata nel numero 5. Si può quindi applicare la proprietà (5.5.) che ci assicura che la retta a ha in S ulteriori n-1 parallele e non di più. Pertanto una qualsiasi retta d incidente la a è di cardinalità n, altrimenti, dovendo essere costituita, per la proprietà (5.1.), da n+1 punti, dovrebbe esistere un punto di d per il quale non passa alcuna parallela ad a, il che contrasta con l'ipotesi fatta. Inoltre tutte le rette di S parallele alla retta a contengono, sempre per la (5.1.), n punti. Resta quindi provato, per la (6.1.) che il piano S è un piano affine (d'ordine n).

10. Condizione affinché un piano quasi-euclideo sia un ⊿-piano.

Sia S un piano quasi-euclideo contenente una retta a di cardinalità n.

10.1. Se ogni retta di S che interseca la a contiene n+1 punti, allora S è un Δ -piano.

Vediamo anzitutto che la retta a ammette una parallela per ogni punto del piano. Esista, per assurdo, un punto P di S per il quale non passi alcuna parallela ad a. Per P passano allora n rette a_1, a_2, \ldots, a_n , che costituiscono il fascio di centro P. Sia $R = a_2 \cap a$ e sia $T \in a_1$; $T \neq P$; $T \neq Q$; $Q = a_1 \cap a$. La retta \overline{RT} ha, per ipotesi, cardinalità n+1; perciò, proiettando i suoi punti da P, si conclude che il fascio di centro P deve contenere n+1 rette almeno; il che è assurdo. Per ogni punto di S passa quindi una ed una sola parallela alla retta a, onde S gode della proprietà (α) indicata al numero α 5. Dalla proprietà (α 5.2.) si deduce poi immediatamente che ogni retta α 7 incidente la α 8 non ammette parallela distinta da α 8 stessa. Pertanto α 8 è un α 9-piano. Riunendo ora i risultati (9.1.) e (10.1.), possiamo anche affermare che:

10.2. Un piano quasi-euclideo S in cui esiste una retta a di cardinalità n che ammette una parallela per ogni punto del piano, è o affine oppure è un Δ -piano.

11. Caratterizzazione dei piani quasi-euclidei finiti.

Consideriamo ancora un piano quasi euclideo S che gode della (α) e tale che la retta a di cui in (α) contenga n punti.

- 11.1. Se esiste un punto P di S per il quale non passi alcuna parallela ad a, sono verificate le seguenti proprietà:
- a) Nessuna retta per P ammette una parallela distinta dalla retta stessa.
- b) Ogni retta di S, di cardinalità n, ammette una parallela per ogni punto $Q \neq P$.
- c) Il fascio di rette di centro un qualsiasi punto Q di S, con $Q \neq P$, è costituito da n+1 rette, delle quali una ed una sola di cardinalità n+1; il fascio di rette di centro P è, invece, formato da n rette di cardinalità n+1.

La a) segue immediatamente dalla proprietà (5.2.), dopo aver osservato che per P, in virtù della (5.3.), non può passare nessuna retta di cardinalità n.

Per dimostrare la b), osserviamo anzitutto che dalla (10.1.) segue l'esistenza di almeno una retta c, di cardinalità n, incidente la retta a. Si può allora applicare al piano S la proprietà (5.5.) che assicura che ogni retta di cardinalità n possiede ulteriori n-1 parallele. Detto quindi $Q \neq P$ un punto arbitrario di S, poiché la retta \overline{PQ} ha cardinalità n+1, se ne conclude, osservando che per P passano solo rette di cardinalità n+1, che per Q passa una parallela ad una qualsiasi retta fissata di S avente cardinalità n. D'altra parte, per quanto richiamato in precedenza, su ogni retta di cardinalità n+1 esiste un punto R per cui non passa la parallela alla retta a prima considerata; allora è necessariamente P=R; cioè l'unica retta di cardinalità n+1 passante per un qualunque punto Q di S, distinto da P, è la retta \overline{QP} .

Per completare la dimostrazione della c) basta ancora far vedere che ogni fascio di centro $Q \neq P$ è costituito da n+1 rette distinte, risultando del tutto evidente che il fascio di centro P è formato da n rette di cardinalità n+1. Infatti, qualunque sia il punto Q di S, esiste sempre, nelle nostre ipotesi, una retta di cardinalità n non passante per Q. Il fascio di centro Q sarà allora costituito dalle rette proiettanti i punti di tale retta da Q e dalla parallela ad essa per Q stesso, certamente esistente (se $Q \neq P$) in base a quanto si è già riconosciuto in b).

La (11.1) è quindi completamente dimostrata.

Prendiamo ancora in considerazione un piano quasi-euclideo S, godente della (α) e tale che la retta a di cui in (α) abbia cardinalità n. Supponiamo ulteriormente che esista in S un punto P per il quale la retta a non ammetta parallela. Scelto arbitrariamente un punto Q di a, distinto da P, siano $a_1 = a, a_2, \ldots, a_n$ le n rette di cardinalità n del fascio di centro Q. Si dicano ora P_1, P_2, \ldots, P_n, n enti arbitrari non appartenenti ad S, che chiameremo punti, e si consideri l'insieme $G: G = S + \{P_1\} + \{P_2\} + \ldots + \{P_n\}$.

Distinguiamo ora in G i seguenti sottoinsiemi, che diremo rette di G:

- 1) L'insieme dei punti di una medesima retta di S passante per P;
- 2) L'insieme dei punti di una medesima retta di S non passante per P a cui si aggiunga P_j se e solo se la parallela a detta retta per Q è a_j ;

3) L'insieme $\{P, P_1, P_2, ..., P_n\}$.

Osserviamo che, per la proprietà precedente, la 2) è lecita. Si verifica facilmente che l'insieme G assume, con queste definizioni, la struttura di piano grafico di ordine n+1 (≥ 3) che risulta quindi irriducibile. Risulta inoltre che il piano sopragrafico S è proprio la struttura di incidenza indotta dal piano G sull'insieme che si ottiene sopprimendo i punti P_1 , P_2 , ..., P_n . Viceversa, sopprimendo da un piano grafico G di ordine n+1 ($n\geq 2$), n punti allineati qualsiasi, e considerando, sull'insieme S così ottenuto, la struttura di incidenza indotta da G, si ottiene, come noto, un piano affine generalizzato di Permutti, ossia un piano sopragrafico. È poi del tutto evidente che esso è un piano quasi-euclideo contenente almeno due rette distinte parallele di cardinalità n, e che esiste in S un punto P tale che nessuna retta di cardinalità n ammette una parallela per P.

Servendoci ora delle proprietà già dimostrate nel corso dei numeri precedenti, andiamo a verificare quest'ultima proposizione:

11.2. I piani quasi-euclidei godenti della proprietà (α) e tali che la retta a di cui in (α) abbia cardinalità $n (n \geq 2)$, sono tutti e soli i piani affini generalizzati di Permutti che si ottengono da un piano grafico di ordine n+1, privandoli o di un solo punto, o di una sola retta, oppure di n punti allineati.

Infatti, in ogni piano quasi-euclideo 8 siffatto o la retta a ammette una parallela per ogni punto del piano, oppure esiste almeno un punto (e, per quanto si è visto, uno solo) per il quale non passa parallela alla a.

Nel primo caso, per la (10.2.), o S è un piano affine oppure un ∆piano; perciò, dalle proprietà di detti piani, segue la tesi.

Nel secondo caso, invece, la proposizione precedente ci porta immediatamente alla conclusione voluta. Dalle suddette proprietà discende poi che l'enunciato è invertibile.

Notiamo che ogni piano sopragrafico o è grafico oppure gode della proprietà (α) . Perciò i piani quasi euclidei finiti, che non siano anche piani grafici, si possono caratterizzare mediante la proprietà precedente, dove n è la cardinalità di ogni retta del piano che ammette una parallela, distinta da essa.

Per concludere osserviamo ancora che ogni piano quasi-euclideo (α) nel quale esiste una retta di cardinalità finita $n \ (n \ge 2)$ è un piano sopragrafico finito; si può quindi ancora dire che ogni piano quasi-euclideo nel quale esiste una retta di cardinalità finita $n \ge 3$, è un piano sopragrafico finito.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. V. CECCHERINI: Sulla nozione di spazio grafico, Rend. di Mat. dell'Univ. di Roma, (1-2) Vol. 26, (1967).
- [2] R. Permutti: Spazi affini generalizzati e relative proprietà particolari, Ricerche di Matematica, 2 (1953).