

# SULLE APPLICAZIONI DI $R$ IN $R$ DOTATE DI UN PUNTO UNITO ATTRAENTE $R$ (\*).

di LUCIANA SGAMBATI (a Napoli)(\*\*)

SOMMARIO. - Siano:  $x_0$  un numero reale;  $\Phi'_{x_0}$  l'insieme delle applicazioni di  $R$  in sè per le quali risulti:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = x_0$  per ogni  $x$  di  $R$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ) le proprietà indicate nell'introduzione del lavoro.

Si stabiliscono (nel n. 2) proprietà degli elementi di  $\Phi'_{x_0}$ , una proprietà degli elementi di  $\Phi'_{x_0}$  godenti della proprietà  $\beta$ ), una proprietà degli elementi crescenti di  $\Phi'_{x_0}$ , e si dimostra che ogni elemento continuo o monotono di  $\Phi'_{x_0}$  gode della proprietà  $\beta$ ); inoltre (nel n. 3) si dà una condizione sufficiente affinché appartenga a  $\Phi'_{x_0}$  una applicazione di  $R$  in sè avente in  $x_0$  un punto unito; in particolare, risulta elemento di  $\Phi'_{x_0}$  ogni applicazione continua di  $R$  in  $R$  godente delle proprietà  $\alpha$ ) e  $\beta$ ); si dimostra infine che la proprietà  $\delta$ ) è sufficiente affinché una applicazione crescente di  $R$  in sè appartenga a  $\Phi'_{x_0}$  ed è peraltro necessaria e sufficiente affinché un'applicazione strettamente crescente di  $R$  in sè appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ .

SUMMARY. - Given:  $x_0$  a real number;  $\Phi'_{x_0}$  the set of the mappings of  $R$  into itself such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = x_0$  for each  $x$  of  $R$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ) the properties mentioned in the note's introduction. Let us establish (n. 2) properties of elements of  $\Phi'_{x_0}$ , one property of the increasing elements of  $\Phi'_{x_0}$ , we prove that each continuous or monotone element of  $\Phi'_{x_0}$  enjoys property  $\beta$ ); furthermore (n. 3) we have a sufficient condition so that one mapping of  $R$  into itself having in  $x_0$  a fixed point belongs to  $\Phi'_{x_0}$ ; in particular, each continuous mapping of  $R$  into itself having properties  $\alpha$ ) and  $\beta$ ) is an element of  $\Phi'_{x_0}$ ; we prove finally that the  $\delta$ ) property is sufficient in order that an increasing mapping of  $R$  into itself belongs to  $\Phi'_{x_0}$  and is, furthermore, necessary and sufficient in order that a strictly increasing mapping of  $R$  into itself belongs to  $\Phi'_{x_0}$ .

(\*) Pervenuto in Redazione il 5 novembre 1970.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(\*\*) Indirizzo dell'Autore: Via Giacinto Gigante 34 — 80136 Napoli.

Nel presente lavoro denotiamo, per ogni numero reale  $x_0$ , con  $\Phi_{x_0}$  l'insieme delle applicazioni di  $R$  in sé per le quali  $x_0$  sia un punto unito e con  $\Phi'_{x_0}$  l'insieme delle applicazioni di  $R$  in sé per le quali  $x_0$  sia un punto unito attraente  $R$  <sup>(1)</sup>.

Consideriamo inoltre le seguenti proprietà definite nell'insieme delle applicazioni  $\varphi$  di  $R$  in  $R$ :

$$\begin{aligned} \alpha) & \quad \begin{cases} \varphi(x) \geq x_0 & \text{per } x > x_0 \\ \varphi(x) \leq x_0 & \text{per } x < x_0 \end{cases} \\ \beta) & \quad \begin{cases} \varphi(x) < x & \text{per } x > x_0 \\ \varphi(x) > x & \text{per } x < x_0 \end{cases} \\ \gamma) & \quad \begin{cases} \lim_{y \rightarrow x^+} \varphi(y) < x & \text{per } x > x_0 \\ \lim_{y \rightarrow x^-} \varphi(y) > x & \text{per } x < x_0 \end{cases} \quad (2) \\ \delta) & \quad \begin{cases} \lim_{y \rightarrow x^+} \varphi(y) < x & \text{per } x > x_0 \\ \lim_{y \rightarrow x^-} \varphi(y) > x & \text{per } x < x_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il n. 1 è dedicato ad alcuni lemmi.

Le prime quattro proposizioni del n. 2 forniscono condizioni necessarie affinché un'applicazione di  $R$  in sé appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ ; la proposizione (2.5) dà una condizione necessaria affinché un elemento di  $\Phi'_{x_0}$  goda della proprietà  $\beta$ ); la proposizione (2.6) afferma che ogni funzione continua o monotona appartenente a  $\Phi'_{x_0}$  gode necessariamente della proprietà  $\beta$ ); la proposizione (2.7) riguarda una condizione necessaria affinché un'applicazione crescente di  $R$  in sé appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ .

(1) Diciamo che un'applicazione  $\varphi$  di  $R$  in  $R$  ha in  $x_0$  un punto unito attraente  $R$  se  $x_0$  è un punto unito di  $\varphi$  ed inoltre  $R$  è l'insieme di attrazione di  $x_0$ . Denotata, come faremo anche in seguito, con  $\varphi^n$  ( $n \in N$ ) l' $n$ -esima iterata di  $\varphi$ , si chiama *insieme di attrazione* di un punto unito  $x_0$  di un'applicazione  $\varphi$  di  $R$  in  $R$  l'insieme:

$$\{x \in R : \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = x_0\};$$

cfr. [1], p. 201.

Evidentemente, il punto  $x_0$  è l'unico punto unito di ogni elemento di  $\Phi'_{x_0}$ .

(2) Con «lim'» e «lim''» intendiamo «minimo limite» e «massimo limite», rispettivamente.

La proposizione (3.2) dà una condizione sufficiente affinché un elemento di  $\Phi_{x_0}$  appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ . Da essa consegue che ogni  $\varphi \in \Phi_{x_0}$  e godente delle proprietà  $\alpha$ ),  $\beta$ ) e  $\gamma$ ) appartiene a  $\Phi'_{x_0}$ : in particolare, appartiene perciò a  $\Phi'_{x_0}$  ogni applicazione continua di  $R$  in  $R$  godente delle proprietà  $\alpha$ ) e  $\beta$ ).

Infine si dimostra che la proprietà  $\delta$ ) è sufficiente affinché una applicazione crescente di  $R$  in sé appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ , ed è per altro necessaria e sufficiente affinché un'applicazione strettamente crescente di  $R$  in sé appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ .

1. Dalle proposizioni (1.2) e (1.4) di [2] conseguono, in modo ovvio, rispettivamente, la prima e la seconda delle due proposizioni seguenti:

(1.1) *Siano:  $x_0$  un numero reale,  $\varphi$  un'applicazione di  $R$  in sé tale che per ogni numero reale  $x > x_0$  esista un  $y > x$  per il quale risulti:*

$$\sup_{x < z < y} \varphi(z) < x.$$

*Allora, per ogni successione  $(x_n)_{n \in N}$  (3) strettamente decrescente di numeri reali maggiori di  $x_0$ , tale che:*

$$x_{n+1} \leq \varphi(x_n) \quad \forall n \in N,$$

*si ha:*

$$\inf_{n \in N} x_n = x_0.$$

(1.2) *Siano:  $x_0$  un numero reale,  $\varphi$  un'applicazione di  $R$  in sé tale che per ogni numero reale  $x < x_0$  esista un  $y < x$  per il quale risulti:*

$$\inf_{y < z < x} \varphi(z) > x.$$

*Allora, per ogni successione  $(x_n)_{n \in N}$  strettamente crescente di numeri reali minori di  $x_0$ , tale che:*

$$x_{n+1} \geq \varphi(x_n) \quad \forall n \in N,$$

*si ha:*

$$\sup_{n \in N} x_n = x_0.$$

(3) Denotiamo con  $N$  l'insieme degli interi maggiori di zero.

Dalla (1.1) consegue che :

(1.3) Se  $x_0$  è un numero reale e  $\varphi$  è un elemento di  $\Phi_{x_0}$  tale da soddisfare le ipotesi  $\beta$  e  $\gamma$ , allora per ogni successione  $(x_n)_{n \in N}$  di numeri reali per cui risulti :

$$(1) \quad x_0 \leq x_{n+1} \leq \varphi(x_n) \quad \forall n \in N$$

oppure :

$$(2) \quad \varphi(x_n) \leq x_{n+1} \leq x_0 \quad \forall n \in N,$$

si ha :

$$(3) \quad \lim_n x_n = x_0.$$

DIM. Se esiste un  $m$  tale che  $x_m = x_0$ , poiché  $x_0$  è punto unito di  $\varphi$ , gli elementi della successione  $(x_n)_{n \in N}$  per  $n \geq m$  sono tutti uguali ad  $x_0$ , da cui l'asserto.

Consideriamo ora il caso in cui per ogni  $n \in N$  risulti  $x_n \neq x_0$ . Se si verifica la (1), per la  $\beta$  la  $(x_{n+1})_{n \in N}$  risulta una successione strettamente decrescente di numeri reali maggiori di  $x_0$ , e d'altra parte la  $\gamma$  implica che, per ogni numero reale  $x > x_0$ , esiste un  $y > x$  tale che :

$$\sup_{x < z < y} \varphi(z) < x;$$

ne consegue l'asserto, a norma della (1.1). Se invece si verifica la (2), si perviene ugualmente all'asserto usufruendo della (1.2).

Sussiste la proposizione seguente :

(1.4) Se  $x_0$  è un numero reale e  $\varphi$  è un'applicazione di  $R$  in sé godente della proprietà  $\beta$ , si ha :

$$(4) \quad \lim_{y \rightarrow x^+} \varphi(y) \leq x \quad \text{per } x > x_0$$

$$(5) \quad \lim_{y \rightarrow x^-} \varphi(y) \geq x \quad \text{per } x < x_0.$$

DIM. Sia  $x > x_0$ ; essendo per la  $\beta$  :

$$\varphi(y) < y \quad \forall y > x,$$

si ha immediatamente la (4). Analogamente si dimostra la (5) <sup>(4)</sup>.

<sup>(4)</sup> Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , esiste un elemento  $\varphi$  di  $\Phi'_{x_0}$  godente della proprietà  $\beta$  e tale che risulti :

Rileviamo infine che :

(1.5) Qualunque sia  $x_0 \in R$ , condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione  $\varphi$  di  $R$  in  $R$  appartenga a  $\Phi'_{x_0}$  è che esista un  $r \in N$  tale che  $\varphi^r$  appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ .

$$(*) \quad \lim''_{y \rightarrow x^+} \varphi(y) = x \quad \text{per } x > x_0$$

$$(**) \quad \lim'_{y \rightarrow x^-} \varphi(y) = x \quad \text{per } x < x_0.$$

Infatti, detto  $S$  l'insieme :

$$\left\{ x \in R : x = x_0 + r + \frac{\sqrt{2}}{n} \text{ con } 0 < r \in Q, n \in N, n > \frac{\sqrt{2}}{r} \right\},$$

si verifica facilmente che l'applicazione  $\varphi$  di  $R$  in sé tale che :

$$\varphi \left( x_0 + r + \frac{\sqrt{2}}{n} \right) = x_0 + r - \frac{\sqrt{2}}{n} \quad \text{per } 0 < r \in Q, n \in N, n > \frac{\sqrt{2}}{r}$$

$$\varphi(x) = x_0 \quad \text{per } x_0 \leq x \notin S$$

$$\varphi(x) = 2x_0 - \varphi(2x_0 - x) \quad \text{per } x < x_0$$

gode della proprietà  $\beta$ ), appartiene a  $\Phi_{x_0}$  ed è tale da aversi  $\varphi^2(x) = x_0 \forall x \in R$ . Per essa, inoltre, come andiamo a provare, sussistono le (\*) e (\*\*).

Per dimostrare la (\*) fissiamo un  $x > x_0$  ed osserviamo che, per ogni  $\delta > 0$ , detto  $r$  un numero razionale dell'intervallo  $]x - x_0, x - x_0 + \delta[$  ed indicato con  $n$  un intero positivo tale che :

$$\frac{\sqrt{2}}{n} < \min \{x_0 + r - x, x + \delta - r - x_0\},$$

posto  $y = x_0 + r + \frac{\sqrt{2}}{n}$ , si ha :

$$x < y < x + \delta, \varphi(y) = x_0 + r - \frac{\sqrt{2}}{n} > x;$$

ne consegue che  $\lim''_{y \rightarrow x^+} \varphi(y) \geq x$ .

Poiché, d'altro canto, a norma della (1.4) si ha :

$$\lim''_{y \rightarrow x^+} \varphi(y) \leq x,$$

risulta verificata la (\*). Per quanto riguarda la (\*\*), basta osservare che essa consegue dalla (\*) quando si tenga presente che

$$\varphi(x) = 2x_0 - \varphi(2x_0 - x) \quad \text{per } x < x_0.$$

DIM. Basta all'uopo osservare che, se esiste un  $\nu \in N$  tale che  $\varphi^\nu$  appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ , qualunque sia  $x \in R$  si ha :

$$\lim_n \varphi^{n\nu}(\varphi^k(x)) = x_0,$$

uniformemente rispetto a  $k \in \{0, 1, \dots, \nu - 1\}$ , e da ciò consegue in modo ovvio che  $\lim_n \varphi^n(x) = x_0$ .

2. In questo numero, fissato  $x_0 \in R$ , consideriamo alcune condizioni necessarie affinché un'applicazione di  $R$  in  $R$  appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ .

(2.1) Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , per ogni  $\varphi \in \Phi'_{x_0}$  risulta :

$$(6) \quad \begin{cases} \forall x > x_0, \exists \nu \in N : \varphi^n(x) < x \quad \forall n \geq \nu \\ \forall x < x_0, \exists \nu \in N : \varphi^n(x) > x \quad \forall n \geq \nu^{(5)}; \end{cases}$$

inoltre, se esiste un  $\nu \in N$  tale che :

$$(7) \quad \varphi^\nu(x) < x \text{ per } x > x_0, \quad \varphi^\nu(x) > x \text{ per } x < x_0,$$

risulta :

$$(8) \quad \begin{cases} \lim_{y \rightarrow x^+} \varphi^\nu(y) \leq x & \text{per } x > x_0 \\ \lim_{y \rightarrow x^-} \varphi^\nu(y) \geq x & \text{per } x < x_0. \end{cases}$$

(5) Qualunque sia  $x_0 \in R$ , non è vero che per ogni  $\varphi \in \Phi'_{x_0}$  esiste un  $\nu$  tale che :

$$\varphi^\nu(x) < x \quad \forall x > x_0, \quad \varphi^\nu(x) > x \quad \forall x < x_0.$$

Infatti, appartiene a  $\Phi'_{x_0}$  l'applicazione  $\varphi$  di  $R$  in sé così definita :

$$\varphi(x) = x_0 \text{ per } x \notin \{x_0 + 2^{-k}\}_{k \in N}, \quad \varphi(x_0 + 2^{-k}) = x_0 + 2^{-(k-1)} \quad \forall k \in N,$$

e per ogni  $\nu \in N$  risulta :  $\varphi^\nu(x_0 + 2^{-\nu}) = x_0 + 1 > x_0 + 2^{-\nu}$ .

Osserviamo inoltre che, qualunque sia  $x_0 \in R$ , un elemento  $\varphi$  di  $\Phi'_{x_0}$  soddisfacente alla condizione (6) non appartiene necessariamente a  $\Phi'_{x_0}$ .

Invero, per l'applicazione  $\varphi$  di  $R$  in sé così definita :

$$\varphi(x) = x_0 \text{ per } x \notin \{x_0 + 1 + 1/k\}_{k \in N}, \quad \varphi(x_0 + 1 + 1/k) = x_0 + 1 + 1/k + 1 \quad \forall k \in N,$$

che appartiene a  $\Phi_{x_0} - \Phi'_{x_0}$ , qualunque sia  $n \in N$  si ha :

$$\varphi^n(x) < x \quad \forall x > x_0, \quad \varphi^n(x) > x \quad \forall x < x_0.$$

DIM. Poiché  $\varphi$  è un elemento di  $\Phi'_{x_0}$ , risulta:

$$\lim_n \varphi^n(x) = x_0 \quad \forall x \in R,$$

da cui segue immediatamente la (6).

Se esiste un  $\nu$  tale che valga la (7), da questa consegue la (8), a norma della (1.4) applicata alla funzione  $\varphi^\nu$ .

(2.2) Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , per ogni  $\varphi \in \Phi'_{x_0}$  risulta che:

$$(9) \quad \forall x > x_0, \quad \exists y > x: \quad \varphi(y) \leq x$$

$$(9') \quad \forall x < x_0, \quad \exists y > x: \quad \varphi(y) \geq x^{(6)}.$$

DIM. La (9) è verificata in quanto, se esistesse un  $x > x_0$  tale che per ogni  $y > x$  risultasse  $\varphi(y) > x$ , la successione  $(\varphi^n(y))_{n \in \mathbb{N}}$  sarebbe ad elementi tutti maggiori di  $x$  e non potrebbe convergere ad  $x_0$ , contro l'ipotesi. In maniera analoga si prova la (9').

Dalla (2.2) consegue banalmente che:

(2.3) Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , per ogni  $\varphi \in \Phi'_{x_0}$  risulta che:

$$\forall x > x_0, \quad \exists y > x: \quad \varphi(y) < y$$

$$\forall x < x_0, \quad \exists y < x: \quad \varphi(y) > y.$$

Quest'ultima proposizione implica ovviamente che:

(2.4) Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , per ogni  $\varphi \in \Phi'_{x_0}$  risulta che:

$$\exists x > x_0: \quad \varphi(x) < x$$

$$\exists x < x_0: \quad \varphi(x) > x.$$

(6) Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , le condizioni (9) e (9') non sono però sufficienti ad assicurare che un elemento  $\varphi$  di  $\Phi'_{x_0}$  appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ .

Infatti la funzione:

$$\varphi: \begin{cases} x_0 + 1 \rightarrow x_0 + 2 \\ x_0 + 2 \rightarrow x_0 + 1 \\ x \rightarrow x_0 \end{cases} \quad \forall x \in R - \{x_0 + 1, x_0 + 2\}$$

appartiene a  $\Phi'_{x_0}$ , soddisfa alle condizioni (9) e (9'), ma non appartiene a  $\Phi'_{x_0}$ , in quanto la successione  $(\varphi^n(x_0 + 1))_{n \in \mathbb{N}}$  non è dotata di limite.

Si ha inoltre :

(2.5) Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , se  $\varphi$  è un elemento di  $\Phi'_{x_0}$  godente della proprietà  $\beta$ ), risulta :

$$(10) \quad \forall (x, y) \in R^2 \text{ con } x_0 < x < y, \quad \exists z \in ]x, y[ : \varphi(z) \leq x$$

$$(11) \quad \forall (x, y) \in R^2 \text{ con } y < x < x_0, \quad \exists z \in ]y, x[ : \varphi(z) \geq x^{(7)}.$$

DIM. Invero, se esistesse una coppia  $(x, y) \in R^2$  con  $x_0 < x < y$  tale che per ogni  $z \in ]x, y[$  risultasse  $\varphi(z) > x$ , poiché, godendo  $\varphi$  della proprietà  $\beta$ ) risulta anche, per ogni  $z \in ]x, y[$ ,  $\varphi(z) < y$ , si avrebbe che, per ogni  $z \in ]x, y[$  anche  $\varphi(z) \in ]x, y[$ . E quindi, per ogni  $z \in ]x, y[$  la successione  $(\varphi^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$  sarebbe costituita da elementi di  $]x, y[$  e poiché essa converge ad  $x_0$ ,  $x_0$  dovrebbe appartenere a  $]x, y[$ , contro la (10).

Analogamente si ragiona per verificare la (11). L'asserto è così dimostrato.

(2.6) Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , condizione necessaria affinché un'applicazione di  $R$  in sé continua o monotona appartenga a  $\Phi'_{x_0}$  è che essa goda della proprietà  $\beta$ ) e risultino verificate le relazioni (10) e (11)<sup>(8)</sup>.

DIM. A norma della (2.5) basta dimostrare che la  $\varphi$  gode della proprietà  $\beta$ ).

Se  $\varphi$  è un elemento continuo di  $\Phi'_{x_0}$ , a norma della (2.4), essa gode necessariamente della proprietà  $\beta$ ).

Se  $\varphi$  è un elemento decrescente di  $\Phi'_{x_0}$ , allora, per  $x > x_0$ , risulta  $\varphi(x) \leq \varphi(x_0) = x_0 < x$  e, analogamente per  $x < x_0$  si ha  $\varphi(x) > x$  e cioè  $\varphi$  gode della proprietà  $\beta$ ).

Se infine  $\varphi$  è un elemento crescente di  $\Phi'_{x_0}$ , tale  $\varphi$  gode ancora della proprietà  $\beta$ ), in quanto non può esistere un  $x > x_0$  in cor-

(7) Come risulterà dalla dimostrazione, la tesi della (2.5) vale anche se si elimina l'ipotesi che  $x_0$  è punto unito della  $\varphi$ .

(8) Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , l'ipotesi  $\beta$ ) e le relazioni (10) e (11) non sono però sufficienti a garantire che una  $\varphi \in \Phi'_{x_0}$  appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ .

Invero, la funzione  $\varphi$  così definita :

$$x \in R \rightarrow 2x_0 - x$$

appartiene a  $\Phi'_{x_0}$ , gode dalla proprietà  $\beta$ ) e soddisfa le relazioni (10) e (11), ma non appartiene a  $\Phi'_{x_0}$ .



rispondenza del quale è  $\varphi(x) > x$ : invero, in tal caso, gli elementi della successione  $(\varphi^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  sarebbero tutti maggiori di  $x$  contro l'ipotesi che  $\varphi \in \Phi'_{x_0}$ . Analogamente si ragiona per  $x < x_0$ , da cui l'asserto.

Rileviamo infine che :

(2.7) *Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , condizione necessaria affinché un'applicazione crescente  $\varphi$  di  $\mathbb{R}$  in sé appartenga a  $\Phi'_{x_0}$  è che :*

$$x > x_0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow x^+} \varphi(y) < x \\ \text{oppure} \\ \text{esiste } y > x \text{ tale che la } \varphi \text{ vale } x \text{ in ogni punto di } ]x, y[. \end{array} \right.$$

$$x < x_0 \implies \left\{ \begin{array}{l} \lim_{y \rightarrow x^-} \varphi(y) > x \\ \text{oppure} \\ \text{esiste } y < x \text{ tale che la } \varphi \text{ vale } x \text{ in ogni punto di } ]y, x[. \end{array} \right.$$

DIM. Per ogni  $x > x_0$ , a norma della (2.2) si ha :

$$(12) \quad \exists y > x : \varphi(y) \leq x.$$

Da ciò consegue che :

$$\lim_{z \rightarrow x^+} \varphi(z) \leq x.$$

Sia  $x > x_0$  tale che :

$$(13) \quad \lim_{z \rightarrow x^+} \varphi(z) = x;$$

allora, poiché in virtù della (12), della (13) e della crescenza della  $\varphi$ , si ha :

$$x = \lim_{z \rightarrow x^+} \varphi(z) \leq \varphi(y) \leq x,$$

risulta :

$$(14) \quad \varphi(y) = x$$

Per ogni  $t \in ]x, y[$ , per la (13) risulta :

$$\varphi(t) \geq x$$

e d'altro canto, per la crescenza della  $\varphi$  e per la (14) risulta :

$$\varphi(t) \leq \varphi(y) = x;$$

si ha dunque :

$$\varphi(t) = x \quad \forall t \in ]x, y[.$$

Poiché in maniera analoga si dimostra la seconda implicazione, l'asserto è dimostrato.

3. In questo numero segnalo alcune condizioni sufficienti affinché un elemento  $\varphi \in \Phi_{x_0}$  appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ .

(3.1) *Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , condizione sufficiente affinché un elemento  $\varphi$  di  $\Phi_{x_0}$  appartenga a  $\Phi'_{x_0}$  è che la  $\varphi$  goda delle proprietà  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ )<sup>(9)</sup>.*

DIM. Se  $x$  è un numero reale tale che esiste un  $m \in N$  per cui risulti  $\varphi^m(x) = x_0$ , allora, essendo  $x_0$  punto unito per  $\varphi$ , risulta :

$$\lim_n \varphi^n(x) = x_0.$$

Se invece  $x$  è tale che per ogni  $n \in N$  risulta :  $\varphi^n(x) \neq x_0$ , posto, per ogni  $n \in N$  :

$$x_n = \varphi^n(x)$$

essendo allora :

$$x_{n+1} = \varphi(\varphi^n(x)) = \varphi(x_n)$$

e godendo la  $\varphi$  della proprietà  $\alpha$ , si prova per ricorrenza che vale la (1) e la (2) a seconda che sia  $x > x_0$  oppure  $x < x_0$ . A norma della (1.3) si ha quindi l'asserto.

Sussiste inoltre la seguente proposizione, più generale della (3.1) :

(3.2) *Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , se  $\varphi$  è un elemento di  $\Phi_{x_0}$ , godente della proprietà  $\alpha$  e tale che esista un  $\nu \in N$  per cui :*

<sup>(9)</sup> Nessuna delle proprietà  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  è sufficiente a garantire che un elemento  $\varphi$  di  $\Phi_{x_0}$  appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ .

Infatti, per quanto riguarda la proprietà  $\alpha$ , basta ricordare la proposizione (2.6) ed osservare che, per ogni numero reale  $x_0$ , esistono funzioni continue godenti delle proprietà  $\alpha$  e non godenti della proprietà  $\beta$ . Per quanto riguarda la non sufficienza della proprietà  $\beta$  e la non sufficienza della proprietà  $\gamma$ , basta tener presente l'esempio riportato nella nota (8).

$$\beta') \left\{ \begin{array}{ll} \varphi^v(x) < x & \text{per } x > x_0 \\ \varphi^v(x) > x & \text{per } x < x_0 \end{array} \right.$$

$$\gamma') \left\{ \begin{array}{ll} \lim''_{y \rightarrow x^+} \varphi^v(y) < x & \text{per } x > x_0 \\ \lim'_{y \rightarrow x^-} \varphi^v(y) > x & \text{per } x < x_0, \end{array} \right.$$

risulta che  $\varphi$  appartiene a  $\Phi'_{x_0}$ .

DIM. Infatti nelle ipotesi dichiarate risulta che  $\varphi^v$  appartiene a  $\Phi_{x_0}$  e gode della proprietà  $\alpha$ ); ne consegue, per la (3.1), che  $\varphi^v \in \Phi'_{x_0}$  e quindi anche, per la (1.5), che  $\varphi \in \Phi'_{x_0}$ .

Dalla (3.1) consegue banalmente che :

(3.3) *Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , condizione sufficiente affinché una applicazione continua di  $R$  in sé appartenga a  $\Phi'_{x_0}$  è che essa goda delle proprietà  $\alpha$ ) e  $\beta$ )* <sup>(10)</sup>.

Sussiste inoltre la seguente proposizione :

(3.4) *Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , condizione sufficiente affinché un'applicazione crescente di  $R$  in sé appartenga a  $\Phi'_{x_0}$  è che goda della proprietà  $\delta$ )*.

DIM. Invero, un'applicazione  $\varphi$  di  $R$  in sé che sia crescente e goda della proprietà  $\delta$ ), gode anche delle proprietà  $\beta$ ) e  $\gamma$ ); godendo della proprietà  $\beta$ ), ha in  $x_0$  un punto unito e conseguentemente gode anche della proprietà  $\alpha$ ). Se ne deduce l'asserto, a norma della (3.1).

Infine risulta :

(3.5) *Qualunque sia il numero reale  $x_0$ , condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione strettamente crescente di  $R$  in sé appartenga a  $\Phi'_{x_0}$  è che goda della proprietà  $\delta$ )* <sup>(11)</sup>.

<sup>(10)</sup> La condizione dichiarata nella (3.3) non è necessaria affinché una applicazione continua di  $R$  in sé appartenga a  $\Phi'_{x_0}$ .

Basta all'uopo considerare la funzione :

$$\varphi : x \in R \rightarrow k(x - x_0) + x_0 \text{ con } k \in ] -1, 0 [.$$

<sup>(11)</sup> La sufficienza proviene dalla (3.4), la necessità si ottiene invece dalla (2.7) quando si osservi che l'ipotesi di stretta crescita implica che la funzione non può risultare costante in un intervallo aperto.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] L. COLLATZ, *Functional Analysis and Numerical Mathematics*, Academic Press, (1966).
- [2] L. SGAMBATI, *Sulla ricerca dell'estremo inferiore di una successione strettamente decrescente*, *Le Matematiche*, in corso di stampa.

Durante la correzione delle bozze ho appreso che è nota la proposizione seguente (cfr. M. KURZMA, *Functional equations in a single variable*, PWN, Warszawa, 1968, p. 21) :

Siano :  $I$  un intervallo di  $R$ ,  $x_0$  un numero reale appartenente alla chiusura di  $I$ ,  $f$  un'applicazione continua di  $I$  in  $I$  soddisfacente alla condizione :

$$(1) \quad x < f(x) < x_0 \quad \text{per} \quad x < x_0,$$

$$x_0 < f(x) < x \quad \text{per} \quad x > x_0.$$

Allora, per ogni  $x \in I$  si ha :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x_0,$$

che nel caso  $I = R$  è evidentemente inclusa nella (3.3).

Essa, per altro, consegue in modo ovvio da quest'altra :

Siano :  $I$  un intervallo della retta reale ampliata non contenente né  $-\infty$  né  $+\infty$ ,  $x_0$  un numero reale appartenente alla chiusura di  $I$ ,  $f$  un'applicazione di  $I$  in  $I$  soddisfacente alla condizione (I), avente in  $x_0$  un punto unito se  $x_0 \in I$ , e tale che :

$$\lim_{y \rightarrow x_0^+} f(y) < x \quad \text{per} \quad x_0 < x < \sup I,$$

$$\lim_{y \rightarrow x_0^-} f(y) > x \quad \text{per} \quad \inf I < x < x_0,$$

che, come può facilmente provarsi, è un corollario della (3.1). All'uopo basta applicare la (3.1) alla applicazione di  $R$  in  $R$ :

$$\varphi : x \in R \rightarrow \begin{cases} x_0 & \text{per } x \notin I \\ f(x) & \text{per } x \in I \end{cases}$$

ed osservare che risulta:

$$f^n(x) = \varphi^n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad \forall x \in I.$$