

SULLA QUASI-CONTRATTIVITA' DI UN'APPLICAZIONE DI UNO SPAZIO PRE-METRICO IN SÉ (*)

di FRANCESCO TUCCI (a Napoli) (**)

SOMMARIO. - *Si definiscono gli spazi pre-metrici (più generali degli spazi metrici) e la proprietà di quasi-contrattività per le applicazioni di uno spazio pre-metrico in sé, e si riconosce che un'applicazione di uno spazio metrico in sé è quasi-contrattiva se e solo se ammette un'iterata contrattiva.*

Il risultato principale del lavoro è la proposizione (3.1) che dà una condizione sufficiente affinché un'applicazione di uno spazio pre-metrico in sé sia quasi-contrattiva.

SUMMARY. - *We define the pre-metric spaces (more general than the metric spaces) and the almost-contractive self-mappings of a pre-metric space, and we note that a self-mapping of a metric space is almost-contractive if and only if it has a contractive iterate.*

The main result of the note is the proposition (3.1) which gives a sufficient condition in order that a self-mapping of a pre-metric space is almost-contractive.

È ben noto⁽¹⁾ che, se un'applicazione φ di uno spazio metrico completo (S, d) in sé ammette un'iterata contrattiva⁽²⁾, allora essa

(*) Pervenuto in Redazione il 31 ottobre 1970.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Via S. Maria a Cubito 5 — 80145 Napoli.

⁽¹⁾ Cfr. [1], teor. 46, 2^o (p. 103).

⁽²⁾ Si dice che un'applicazione f di uno spazio metrico (S, d) in sé è *contrattiva* se esiste un $k \in [0, 1[$ tale che:

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y), \quad \forall (x, y) \in S^2.$$

è dotata di un unico punto unito x_0 e risulta :

$$\lim_n \varphi^n(x) = x_0, \quad \forall x \in S.$$

Mi è sembrato perciò interessante cercare qualche condizione che assicurasse l'esistenza di iterate contrattive per un'applicazione di uno spazio metrico in sé.

Nel presente lavoro affronterò tale questione come caso particolare di quest'altra: trovare qualche condizione che assicuri la « quasi-contrattività » di un'applicazione di uno spazio « pre-metrico » in sé.

Nel n. 1 definirò gli spazi pre-metrici, le applicazioni contrattive e quelle quasi contrattive, osservando, tra l'altro, che la quasi-contrattività di un'applicazione di uno spazio metrico in sé equivale all'esistenza di iterate contrattive.

Nel n. 2 farò alcune considerazioni relative ai ricoprimenti del sostegno di uno spazio pre metrico in sé.

Il risultato principale contenuto in questo lavoro è la proposizione (3.1), dalla quale trarrò nel n. 4 una proposizione relativa agli spazi metrici.

1. Se S è un insieme, diremo *pre-metrica in S* ogni funzione reale, definita in S^2 , non negativa e tale che :

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \quad \forall (x, y, z) \in S^3.$$

Evidentemente: ogni *metrica* è una *pre-metrica*. Esistono tuttavia pre-metriche che non sono metriche; ad esempio, se S è un insieme di almeno due elementi, la funzione d identicamente nulla in S^2 è una pre-metrica, ma non è una metrica⁽³⁾.

Se \bar{d} è una pre-metrica in S , per ogni elemento c di S diremo *cerchio aperto di centro c e raggio 0* la parte vuota di S ; *cerchio aperto di centro c e raggio $r > 0$* la parte di S :

$$\{x \in S : x = c \text{ o } d(x, c) < r\}.$$

Si dimostra facilmente che le unioni di cerchi aperti costituiscono una topologia su S . Denomineremo *spazio pre-metrico*, ed in-

(3) Un altro esempio di pre-metrica in un insieme S , la quale non sia tuttavia una metrica in S , si ottiene considerando un numero reale positivo δ ed una qualunque applicazione d , definita in S^2 ed a valori in $[\delta, 2\delta]$.

dicheremo col simbolo (S, d) , lo spazio topologico di sostegno S , che si ottiene associando ad S la predetta topologia.

Sia φ un'applicazione dello spazio pre-metrico (S, d) nello spazio pre-metrico (S', d') ; chiameremo *parametro di φ* , e lo denoteremo col simbolo $p(\varphi)$, il numero 0 se d è identicamente nulla, l'elemento di $[0, +\infty]$:

$$\sup_{d(x, y) \neq 0} \frac{d'(\varphi(x), \varphi(y))}{d(x, y)}$$

se d non è identicamente nulla.

È immediato verificare che:

(1.1). *Se φ è un'applicazione a parametro finito dello spazio pre-metrico (S, d) nello spazio pre-metrico (S', d') ed è vera l'implicazione:*

$$d(x, y) = 0 \implies d'(\varphi(x), \varphi(y)) = 0,$$

si ha:

$$d'(\varphi(x), \varphi(y)) \leq p(\varphi) \cdot d(x, y), \quad \forall (x, y) \in S^2.$$

Se (S, d) è uno spazio pre metrico, un'applicazione φ di una parte X di S in S si dirà *contrattiva* se verifica le proprietà seguenti:

$$(1) \quad p(\varphi) < 1$$

$$(2) \quad d(x, y) = 0 \implies d(\varphi(x), \varphi(y)) = 0$$

o, ciò che è lo stesso, se esiste $k \in [0, 1[$ tale che:

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq k d(x, y), \quad \forall (x, y) \in S^2 \quad (4).$$

Dimostriamo ora alcune utili proposizioni.

(1.2). *Se l'applicazione φ dello spazio pre-metrico (S, d) in sé gode della proprietà (2), risulta:*

$$(3) \quad p(\varphi^n) \leq (p(\varphi))^n \quad (5).$$

(4) Osserviamo esplicitamente che in tale definizione di contrattività rientra quella ricordata in (2).

(5) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ (insieme degli interi positivi), denotiamo con φ^n l' n -esima iterata di φ .

DIM. Se $p(\varphi) = +\infty$, la (3) è ovvia. Se poi è $p(\varphi) < +\infty$, usufruendo della (1.1) si prova facilmente che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale la disuguaglianza:

$$(4) \quad d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \leq (p(\varphi))^n d(x, y), \quad \forall (x, y) \in S^2,$$

e conseguentemente sussiste la (3).

La (1.2) implica banalmente che:

(1.3). *Se l'applicazione φ dello spazio pre-metrico (S, d) in sé è contrattiva, risulta:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(\varphi^n) = 0.$$

Nel n. 3. mostreremo che la (1.3) non è invertibile.

Definiamo *quasi-contrattiva* ogni applicazione φ di uno spazio pre-metrico (S, d) in sé per la quale risulti:

$$(5) \quad \lim'_{n \rightarrow \infty} p(\varphi^n) = 0 \text{ (6)}.$$

Dalla (1.3) consegue che ogni applicazione contrattiva è *quasi-contrattiva*. Osserviamo inoltre che:

(1.4). *Se l'applicazione φ dello spazio pre-metrico (S, d) in sé ammette un'iterata contrattiva, φ risulta quasi-contrattiva.*

DIM. Sia φ^r un'iterata di φ contrattiva; per la (1.3) si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(\varphi^{nr}) = 0$$

e conseguentemente φ risulta quasi-contrattiva.

Diamo ora un esempio di applicazione, la quale risulta quasi-contrattiva e tuttavia è priva di iterate contrattive. Tale esempio ovviamente mostra che la proposizione (1.4) non è invertibile.

Consideriamo l'insieme S costituito dagli oggetti distinti a e b , e le applicazioni $d: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi: S \rightarrow S$ così definite:

$$d(a, b) = d(a, a) = d(b, b) = 0, \quad d(b, a) = 1,$$

$$\varphi(a) = b, \quad \varphi(b) = a.$$

È immediato notare che d è una pre-metrica in S . Inoltre, la

(6) Col simbolo $\lim'_{n \rightarrow \infty} p(\varphi^n)$ denotiamo il minimo limite della successione $(p(\varphi^n))_{n \in \mathbb{N}}$.

φ è quasi-contrattiva, poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta :

$$p(\varphi^{2n-1}) = p(\varphi) = \sup_{d(x, y) \neq 0} \frac{d(\varphi(x), \varphi(y))}{d(x, y)} = \frac{d(a, b)}{d(b, a)} = 0.$$

Osserviamo tuttavia che nessuna iterata di φ è contrattiva. Infatti, se r è un qualunque intero positivo dispari risultando :

$$d(\varphi^r(a), \varphi^r(b)) = d(b, a) = 1 \text{ e } d(a, b) = 0,$$

la φ^r non gode della proprietà (2); se invece r è un qualunque intero positivo pari, si ha :

$$\frac{d(\varphi^r(b), \varphi^r(a))}{d(b, a)} = \frac{d(b, a)}{d(b, a)} = 1$$

e φ^r non gode della proprietà (1).

Osserviamo infine che dalla (1.4) consegue banalmente che :

(1.5). *Un'applicazione di uno spazio metrico in sé è quasi-contrattiva se e solo se esiste una sua iterata contrattiva.*

2. Siano : (S, d) uno spazio pre-metrico, φ un'applicazione dello spazio (S, d) in sé.

Diremo che un ricoprimento \mathcal{F} di S gode della proprietà (α) se, per ogni X appartenente ad \mathcal{F} , risulta :

$$\varphi(X) \subseteq X, \quad \varphi_X \text{ è contrattiva,} \quad \sup_{X \in \mathcal{F}} p(\varphi_X) < 1.$$

Diremo che un ricoprimento \mathcal{F} gode della proprietà (β) se esiste un numero reale l tale che per ogni (X, Y) in \mathcal{F}^2 con $X \neq Y$ e per ogni (x, y) in $X \times Y$ con $d(x, y) \neq 0$, esiste $z \in X \cap Y$ tale che :

$$d(x, z) + d(z, y) \leq l d(x, y).$$

Può accadere che, assegnati (S, d) e φ , un ricoprimento di S goda della proprietà (β) senza tuttavia godere della proprietà (α) . Invero, riferendoci all'insieme S ed alle applicazioni d e φ dell'esempio che nel n. 1. segue la dimostrazione della (1.4), il ricoprimento $\{S, \{a\}\}$ di S non gode della proprietà (α) poichè, come si è già notato, φ non è contrattiva; il predetto ricoprimento gode invece, come facilmente si verifica, della proprietà (β) .

Col seguente esempio mostriamo che può accadere che, assegnati (S, d) e φ , un ricoprimento di S goda della proprietà (α) senza tuttavia godere della proprietà (β) .

Sia d la metrica euclidea in R e sia φ l'applicazione di (R, d) in sé così definita:

$$\varphi: x \in R \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{per } x > 1. \end{cases}$$

Consideriamo il ricoprimento $\{X, Y\}$; dove è:

$$X = [0, 1] \text{ ed } Y =] - \infty, 0[\cup [1, + \infty [.$$

Si prova agevolmente che questo ricoprimento gode della proprietà (α) . Mostriamo che esso tuttavia non gode della proprietà (β) . Infatti, se godesse della proprietà (β) , esisterebbe un numero reale l tale da aversi, per ogni (x, y) appartenente ad $X \times Y$, con $x \neq y$:

$$d(x, 1) + d(1, y) \leq l d(x, y);$$

considerando tale disuguaglianza per $x = 0$ ed $y < 0$, ne conseguirebbe:

$$2 \leq (1 - l)y, \quad \forall y \in] - \infty, 0[$$

il che è falso per y sufficientemente prossimo a 0⁽⁷⁾.

3. Il seguente teorema è il principale risultato del presente lavoro.

(3.1). *Condizione sufficiente affinché un'applicazione φ di uno spazio pre-metrico (S, d) in sé goda della proprietà che:*

$$(6) \quad \lim_p (\varphi^n) = 0,$$

e risulti quindi quasi-contrattiva in S , è che esista un ricoprimento \mathcal{F} di S godente delle proprietà (α) e (β) .

⁽⁷⁾ Subito dopo la dimostrazione della proposizione (3.1), considerati un certo spazio metrico (S, d) ed una certa applicazione φ di (S, d) in sé, daremo un esempio di un ricoprimento che gode della proprietà (α) e della proprietà (β) .

DIM. Se è :

$$\sup_{X \in \mathcal{F}} p(\varphi_X) = 0,$$

risulta : $p(\varphi^n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$ ⁽⁸⁾, e conseguentemente è vera la (6).

Consideriamo dunque il caso in cui è : $0 < \sup_{X \in \mathcal{F}} p(\varphi_X) < 1$. Possiamo :

$$k = \sup_{X \in \mathcal{F}} p(\varphi_X),$$

ed osserviamo che, per essere $k > 0$, la d non è identicamente nulla e pertanto :

$$p(\varphi^n) = \sup_{d(x,y) \neq 0} \frac{d(\varphi^n(x), \varphi^n(y))}{d(x,y)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consequentemente, per dimostrare la (6) basta provare che per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che risulti :

$$(7) \quad \frac{d(\varphi^n(x), \varphi^n(y))}{d(x,y)} < \varepsilon, \quad \forall n \geq m$$

e per ogni coppia $(x, y) \in S^2 : d(x, y) \neq 0$.

Orbene supponiamo (e ciò non lede la generalità) l non minore di 1. Sia $m \in \mathbb{N}$ tale che :

$$k^n < \varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{l}, \quad \forall n \geq m,$$

e siano x ed y elementi di S con $d(x, y) \neq 0$.

Nel caso in cui $\exists X \in \mathcal{F} : (x, y) \in X^2$, la (7) consegue dalla disuguaglianza :

$$d(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) \leq k^n d(x, y),$$

che per la proprietà (α) è valida per ogni intero positivo n .

⁽⁸⁾ Risulta invero : $d(\varphi(x), \varphi(y)) = 0, \forall (x, y) \in S^2$. Infatti, se esiste $X \in \mathcal{F}$ tale che $x \in X$ ed $y \in X$, poiché φ_X ha parametro nullo si ha :

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = 0.$$

Se esistono X ed Y in \mathcal{F} , distinti e tali che $x \in X$ ed $y \in Y$, detto z un elemento di $X \cap Y$, si trova, utilizzando il precedente risultato :

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq d(\varphi(x), \varphi(z)) + d(\varphi(z), \varphi(y)) = 0.$$

Nel caso in cui non esista alcun elemento di \mathcal{F} cui appartengano x ed y simultaneamente, esisteranno X ed Y distinti in \mathcal{F} tali che $x \in X$ ed $y \in Y$. Poiché \mathcal{F} gode della proprietà (β) , esiste $z \in X \cap Y$ tale che :

$$(8) \quad d(x, z) + d(z, y) \leq l d(x, y).$$

Osserviamo esplicitamente che le immagini di x, z ed y mediante qualsiasi iterata di φ appartengono ancora rispettivamente ad $X, X \cap Y$ e ad Y .

Per ogni $n \geq m$, dalla proprietà (α) e dalla (8) consegue che :

$$\begin{aligned} \frac{d(\varphi^n(x), \varphi^n(y))}{d(x, y)} &\leq \frac{d(\varphi^n(x), \varphi^n(z)) + d(\varphi^n(z), \varphi^n(y))}{d(x, y)} \leq \\ &\leq k^n \frac{d(x, z) + d(z, y)}{d(x, y)} \leq k^n \cdot l < \varepsilon. \end{aligned}$$

Per ogni coppia $(x, y) \in S^2$ tale che $d(x, y) \neq 0$, è dunque vera la (7). La (3.1) è così dimostrata.

Diamo un esempio in cui è verificata la condizione espressa nella (3.1).

Denotiamo con S l'insieme :

$$[0, 2] \cup \{3\}$$

e con d la restrizione ad S^2 della metrica euclidea in R . Fissato k in $]0, 1[$, definiamo l'applicazione φ come segue :

$$\varphi : x \in S \rightarrow \begin{cases} kx & \text{per } x \in [0, 2] \\ 0 & \text{per } x = 3 \end{cases}$$

Siano :

$$X = \{0, 3\} \quad \text{ed} \quad Y = [0, 2].$$

È $\varphi(X) = \{0\} \subset X$ e $\varphi(Y) = [0, 2k] \subset Y$; inoltre si ha : $p(\varphi_X) = 0$ e $p(\varphi_Y) = k < 1$, quindi, essendo d una metrica, φ_X e φ_Y sono contrattive ed il ricoprimento $\{X, Y\}$ gode della proprietà (α) .

Tale ricoprimento gode anche della proprietà (β) in quanto è : $X \cap Y = \{0\}$ e $\frac{d(x, 0) + d(0, y)}{d(x, y)}$ risulta limitata per $(x, y) \in X \times Y$ ed $x \neq y$, poiché : $\frac{d(0, 0) + d(0, y)}{d(0, y)} = 1$ e $\frac{d(3, 0) + d(0, y)}{d(3, y)} = \frac{3 + y}{3 - y} \leq 5$, $\forall y \in Y$.

Osserviamo esplicitamente che :

(3.2). *La condizione enunciata nella proposizione (3.1) non è necessaria affinché l'applicazione φ dello spazio pre-metrico (S, d) in sé verifichi la proprietà :*

$$\lim_n p(\varphi^n) = 0 \text{ } ^{(9)}.$$

DIM. Siano $S = \{1, 2, 3\}$, d la restrizione ad S^2 della metrica euclidea in R , φ l'applicazione di (S, d) in sé così definita :

$$\varphi(1) = 2, \quad \varphi(2) = \varphi(3) = 3.$$

Per ogni $n \geq 2$ φ^n è la funzione costante in S di valore 3 e quindi $p(\varphi^n) = 0$.

Tuttavia, nessun ricoprimento di S gode della proprietà (α) , in quanto ogni ricoprimento di S ha fra i suoi elementi una almeno delle seguenti parti di S :

$$X_1 = \{1\}, \quad X_2 = \{1, 2\}, \quad X_3 = \{1, 3\}, \quad S$$

e risulta :

$$\varphi(X_i) \not\subseteq X_i, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

mentre φ_S , cioè φ , non è contrattiva $^{(10)}$.

(3.3). *Condizione sufficiente affinché un'applicazione φ di uno spazio pre-metrico (S, d) in sé sia quasi-contrattiva ed ammetta al più un punto unito, è che sia vera l'implicazione :*

$$x \neq y \implies d(x, y) \neq 0$$

ed esista un ricoprimento \mathcal{F} che goda delle proprietà (α) e (β) .

DIM. Se è verificata la enunciata condizione, allora, per la (3.1), φ è quasi-contrattiva; inoltre, se φ ammettesse due punti uniti x_1 ed x_2 distinti, si avrebbe :

$$\frac{d(\varphi^n(x_1), \varphi^n(x_2))}{d(x_1, x_2)} = 1, \quad \forall n \in N$$

e ciò sarebbe in contrasto con la quasi-contrattività di φ .

⁽⁹⁾ Da questa proposizione consegue ovviamente che la condizione enunciata in (3.1) non è necessaria affinché φ sia quasi-contrattiva.

⁽¹⁰⁾ Questo esempio mostra anche che la proposizione (1.3) non è invertibile.

Osserviamo che, se φ è un'applicazione di uno spazio pre-metrico (S, d) in sé, l'esistenza di un ricoprimento di S che goda della proprietà (α) , ma non goda della proprietà (β) , non garantisce la quasi-contrattività di φ . Infatti, abbiamo già osservato che, fissata la metrica euclidea d in R e l'applicazione φ di (R, d) in sé così definita:

$$\varphi: x \in R \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{x+1}{2} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

esiste il ricoprimento $\{X, Y\}$ con $X = [0, 1]$ ed $Y =] - \infty, 0[\cup] 1, + \infty[$ che gode della proprietà (α) , ma non gode della proprietà (β) .

Vedremo ora che φ non è quasi-contrattiva.

Qualunque sia n intero positivo, si ha invero:

$$\varphi^n: x \in R \rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{2^n} & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 + \frac{x-1}{2^n} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

ed è subito visto che φ^n non è contrattiva. Per la (1.5) φ non risulta quasi-contrattiva.

4. Osserviamo esplicitamente che dalle proposizioni (3.3) e (1.5) e dal teorema citato in (1) si deduce ovviamente la proposizione seguente:

(4.1). Siano: (S, d) uno spazio metrico completo, φ un'applicazione di (S, d) in sé. Se esiste un ricoprimento \mathcal{F} di S godente delle proprietà (α) e (β) , φ ha un unico punto unito x_0 e risulta:

$$\lim_n \varphi^n(x) = x_0, \quad \forall x \in S.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] L. SCHWARTZ, *Cours d'Analyse*, tome I, Hermann, Paris (1967).