INTERVALLI D'ATTESA FRA SUCCESSI CONTIGUI IN CONDIZIONI DI SCAMBIABILITÀ (*)

di MARIO STRUDTHOFF (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Vengono studiati, con particolare riguardo alle proprietà del primo e secondo ordine, il processo stocastico degli intervalli d'attesa fra successi contigui collegato ad una successione di eventi scambiabili (processo illimitato) e quello collegato ad una sequenza finita (processo limitato).*

SUMMARY. - *This article deals with the stochastic process of the successive "inter-arrival times" for exchangeable events, in the two cases unlimited and limited. Moments of the first and second order are calculated.*

1. — Sia $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ una successione di eventi. Ricordiamo che gli eventi sono detti *scambiabili* (per rispetto ad una valutazione di probabilità) se la probabilità, $\omega_h^{(n)}$, che su n di essi comunque scelti se ne verifichino esattamente h, è indipendente dall'ordine nel quale gli eventi stessi si verificano; e ciò per ogni n ed $h \leq n$.

Alla successione di eventi $\}E_n\{$ è associata la successione di variabili aleatorie

$$|E_1|, |E_2|, \ldots, |E_n|, \ldots$$

indicatori di quegli eventi. L'indicatore, $|E_n|$, dell'evento E_n assume determinazioni 1 oppure 0 a seconda che E_n si verifichi

(*) Pervenuto in Redazione il 26 novembre 1970.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica finanziaria dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

(« successo » al « colpo » n) o no, con probabilità rispettive Prob(E_n), $1 -$ Prob (E_n).

Se gli eventi E_n sono scambiabili, la successione $\} \mid E_n \mid \{$ dei loro indicatori è detta ***processo (stocastico) di alternativa, scambiabile, illimitato.***

Se gli eventi E_n fanno riferimento ai risultati di una successione di prove dello stesso fenomeno (o di fenomeni analoghi), la condizione di scambiabilità significa che, qualunque sia n, tutte le $\binom{n}{h}$ « traiettorie » di n passi che presentano h « successi », hanno la stessa probabilità $\dfrac{\omega_h^{(n)}}{\binom{n}{h}}$ di verificarsi.

La definizione di scambiabilità implica poi che la probabilità $\omega_n = \omega_n^{(n)}$ che n prove diano tutte risultato favorevole è sempre la stessa, qualunque sia l'n-pla scelta.

Per caratterizzare un processo stocastico è necessario assegnare una probabilità a tutte le possibili traiettorie. Nel caso dei processi di alternativa scambiabili, ciò può esser fatto in più modi.

Si possono assegnare, per ogni n, le probabilità $\omega_h^{(n)} \left(\sum_{h=0}^{n} \omega_h^{(n)} = 1\right)$, oppure le ω_n, legate alle precedenti dalle relazioni

$$(1) \qquad \omega_h^{(n)} = \binom{n}{h} \sum_{k=0}^{n-h} (-1)^k \binom{n-h}{k} \omega_{k+h} \qquad \begin{array}{l} n = 1, 2, \ldots \\ h = 0, 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

$$(2) \qquad \omega_h = \sum_{r=h}^{n} \omega_r^{(n)} \frac{\binom{r}{h}}{\binom{n}{h}} \qquad \omega_0 = 1 ;$$

si può infine ricorrere ad un teorema, dovuto a B. de Finetti, il quale afferma che un processo di alternativa scambiabile illimitato è caratterizzato da una funzione di ripartizione $\Phi(x)$ definita in $(0, 1)$, con $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$. In termini della funzione $\Phi(x)$, le $\omega_h^{(n)}$ si ottengono dalla

$$(3) \qquad \omega_h^{(n)} = \binom{n}{h} \int_0^1 x^h (1-x)^{n-h} \, d\Phi(x).$$

In altri termini il teorema afferma che tutti e soli i processi di alternativa scambiabili illimitati sono combinazioni lineari convesse (misture) di processi bernoulliani. La funzione $\Phi(x)$ è la funzione cumulativa dei «pesi» della mistura, cui corrisponde il processo scambiabile.

Ogni questione riguardante un processo di alternativa scambiabile illimitato può dunque essere affrontata in termini della funzione $\Phi(x)$.

La nozione di scambiabilità si estende poi in modo naturale ad una successione di variabili aleatorie

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

Le variabili della successione sono *scambiabili* se la probabilità che $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ soddisfino una data condizione, non muta al variare degli indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Ciò implica, in particolare, che, per ogni n, tutte le n-ple di variabili aleatorie della successione hanno la stessa distribuzione congiunta, la cui funzione di ripartizione è una funzione simmetrica (1).

2. Ad ogni processo di alternativa, $\}|E_n|\{$, è associato un altro processo che riveste particolare interesse per le applicazioni: quello degli intervalli d'attesa tra due successi contigui.

È noto che nel caso in cui il processo $\}|E_n|\{$ sia bernoulliano, con $\text{Prob}(E_n) = p$, gli intervalli d'attesa riescono stocasticamente indipendenti, equidistribuiti (con distribuzione geometrica), con speranza matematica $\frac{1}{p}$ e varianza $\frac{q}{p^2}$.

Studieremo ora il processo degli intervalli di attesa nell'ipotesi che il processo $\}|E_n|\{$ sia un processo scambiabile illimitato. Nel n. 3 vedremo quali interessanti modifiche si ottengono nel caso in cui il processo di alternativa scambiabile, non è illimitato.

Proveremo dapprima, basandoci soltanto sulla definizione di scambiabilità, che anche il processo degli intervalli d'attesa è un processo scambiabile, e ne esamineremo successivamente le proprietà del primo e secondo ordine.

Se indichiamo con T_1 il tempo di attesa per il primo successo e con T_n l'intervallo di attesa (numero aleatorio di «colpi» inter-

(1) La nozione di scambiabilità è stata introdotta e sviluppata da B. De Finetti. Una trattazione esauriente dell'argomento si trova nell'articolo, dello stesso Autore, « *Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources* », riportato nel volume «Studies in Subjective Probability», edito da H. E. Kyburg e H. E. Smokler, Wiley, New York, 1964.

correnti) tra l'$(n-1)$-mo e l'n-mo successo, abbiamo subito le:

$$\text{Prob}\{T_1 = h\} = \frac{\omega_1^{(h)}}{\binom{h}{1}} = \frac{\omega_1^{(h)}}{h}\,; \qquad h = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

$$\text{Prob}\{T_1 = h \wedge T_2 = k\} = \frac{\omega_2^{(h+k)}}{\binom{h+k}{2}}\,; \qquad h, k = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Infatti tra le h traiettorie che presentano un unico successo in h colpi una sola lo contiene al colpo h-mo. Con ragionamento analogo si prova la (5).

È agevole ora provare che le v. a. T_1 e T_2 sono ugualmente distribuite. La distribuzione marginale di T_2 è infatti data dalla:

$$\text{Prob}\{T_2 = k\} = \sum_{h=1}^{\infty} \text{Prob}\{T_1 = h \wedge T_2 = k\} = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\omega_2^{(h+k)}}{\binom{h+k}{2}} =$$

$$= \sum_{h=1}^{\infty} \left[\frac{\omega_1^{(h+k-1)}}{h+k-1} - \frac{\omega_1^{(h+k)}}{h+k}\right] = \frac{\omega_1^{(k)}}{k}\ (^2).$$

Essendo poi la probabilità $\omega_2^{(h+k)}$ indipendente dalla posizione dei due successi (per la scambiabilità del processo $\{|E_n|\}$), si ha che

$$\text{Prob}\{T_1 = h \wedge T_2 = k\} = \text{Prob}\{T_1 = k \wedge T_2 = h\}$$

da cui segue la simmetria della funzione di ripartizione, $F_{T_1, T_2}(x, y)$, della distribuzione congiunta di T_1 e T_2.

I risultati ora ottenuti per T_1 e T_2, si possono agevolmente estendere ad un numero qualunque di v. a. del processo $\{T_n\}$, comunque scelte.

Basta infatti osservare che la (5) si generalizza nella

$$\text{Prob}\{T_1 = i_1 \wedge T_2 = i_2 \wedge \ldots \wedge T_n = i_n\} = \frac{\omega_n^{(i_1+i_2+\cdots+i_n)}}{\binom{i_1+i_2+\cdots+i_n}{n}}\,;$$

$$i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots$$

(2) Ricordiamo che, per ogni $h \leq n$, sussiste la relazione

$$\frac{\omega_h^{(n)}}{\binom{n}{h}} = \frac{\omega_{h+1}^{(n+1)}}{\binom{n+1}{h+1}} + \frac{\omega_h^{(n+1)}}{\binom{n+1}{h}}$$

che traduce il fatto che una traiettoria che presenta h successi su n colpi, prosegue necessariamente con un successo o un insuccesso.

e che sussiste la

$$\sum_{i_k=1}^{\infty} \frac{\omega_n^{(i_1+\dots+i_{k-1}+i_k+i_{k+1}+\dots+i_n)}}{\binom{i_1+i_2+\dots+i_n}{n}} = \frac{\omega_{n-1}^{(i_1+\dots+i_{k-1}+i_{k+1}+\dots+i_n)}}{\binom{i_1+\dots+i_{k-1}+i_{k+1}+\dots+i_n}{n-1}}$$

per concludere facilmente che la distribuzione congiunta di quanti e quali si vogliono intervalli d'attesa dipende solo da *quanti* intervalli d'attesa sono considerati, e non da *quali*, ed inoltre che la funzione di ripartizione di tale distribuzione congiunta è simmetrica.

Ciò basta per concludere che anche il processo $\}T_n\{$ degli intervalli d'attesa tra successi contigui, è un processo scambiabile.

Tale risultato poteva essere raggiunto direttamente ricordando che ogni processo di alternativa scambiabile illimitato è mistura di processi bernoulliani, e che ad un processo bernoulliano è associato un processo di intervalli d'attesa indipendenti ed equidistribuiti (con distribuzione geometrica). Il processo degli intervalli d'attesa associato ad un processo scambiabile riesce, allora, mistura (con la stessa funzione cumulativa dei «pesi») di processi di intervalli d'attesa equidistribuiti indipendenti e quindi — sempre per il teorema di de Finetti — esso è un processo scambiabile. L'approccio del problema, presentato più sopra, che fa riferimento alla sola definizione di scambiabilità, ci è sembrato tuttavia di un certo interesse innanzitutto perchè continua a sussistere — con le ovvie modifiche — nel caso in cui il processo originario sia limitato ed anche perché ha permesso di ottenere delle relazioni che saranno impiegate in quel che segue.

Osserviamo inoltre che la scambiabilità del processo $\}T_n\{$ degli intervalli d'attesa tra successi contigui, non è sufficiente per la scambiabilità dell'originario processo $\}\,|\,E_n\,|\,\{$ di alternativa.

Basta, allo scopo, considerare un processo $\}T_n\{$ di intervalli d'attesa equidistribuiti ed indipendenti (e quindi scambiabili), con distribuzione che non sia ottenibile come mistura di distribuzioni geometriche (e tale potrebbe essere, ad esempio, la distribuzione uniforme su un insieme limitato).

Un simile processo $\}T_n\{$ non può provenire, per quanto detto più sopra, da un processo $\}\,|\,E_n\,|\,\{$ scambiabile illimitato.

Passeremo ora ad esaminare le proprietà del primo e secondo ordine del processo $\}T_n\{$. Per la provata scambiabilità degli intervalli d'attesa, sarà sufficiente limitare l'esame alla speranza matematica e alla varianza del generico intervallo d'attesa, e alla covarianza tra due intervalli qualunque.

In generale tali grandezze potranno riuscire finite o no; interesserà, ovviamente, esaminare in quali condizioni esse riescono finite. E tali condizioni faranno riferimento, chiaramente, a proprietà della funzione di ripartizione $\Phi(x)$ che, come detto, caratterizza il processo originario e quindi quello degli intervalli d'attesa tra successi contigui.

La distribuzione del generico intervallo d'attesa, T, è data, come si è visto, dalla

$$\text{Prob}\,\}T = n\{ = \frac{\omega_1^{(n)}}{n} = \int_0^1 x(1-x)^{n-1}\,d\Phi(x)\,;$$

la speranza matematica di T è allora

$$E(T) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\frac{\omega_1^{(n)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 nx(1-x)^{n-1}\,d\Phi(x).$$

Essendo ora, per $0 < x < 1$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx(1-x)^{n-1} = x\,\Sigma\, n(1-x)^{n-1} = = x\,\frac{d}{d(1-x)}\,\frac{1}{1-(1-x)} = \frac{1}{x}$, riesce per ogni ν finito $\sum\limits_{n=1}^{\nu} nx(1-x)^{n-1} < < \frac{1}{x}$. Per il teorema di Lebesgue, il passaggio al limite sotto il segno di integrale è lecito se la funzione di ripartizione, $\Phi(x)$ è tale che, rispetto ad essa, risulti sommabile la funzione $\frac{1}{x}$.

In queste condizioni riesce allora finita la speranza matematica di T ed è data dalla

$$E(T) = \int_0^1 \frac{1}{x}\,d\Phi(x). \tag{6}$$

Tale risultato era da attendersi. Esso dice che, nelle attuali condizioni, la lunghezza media dell'intervallo d'attesa tra due successi contigui è la mistura — sempre secondo la $\Phi(x)$ — delle lunghezze medie, $\frac{1}{x}$, degli intervalli d'attesa nei processi bernoulliani componenti, ove x, compreso tra 0 e 1, è la probabilità comune agli eventi del processo bernoulliano.

Se poi esiste finito anche l'integrale $\int_0^1 \frac{1}{x^2} d\Phi(x)$, esiste finito il momento secondo, $E(T^2)$. È infatti, in questa ipotesi:

$$(7) \quad E(T^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{\omega_1^{(n)}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 n^2 x (1-x)^{n-1} d\Phi(x) = \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) d\Phi(x).$$

Sotto le condizioni per $\Phi(x)$ testè precisate, esiste quindi finita la varianza di T, per la quale si ottiene:

$$\operatorname{var}(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) d\Phi(x) - \left[\int_0^1 \frac{1}{x} d\Phi(x)\right]^2 =$$

$$(8) \quad \begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x}\right) d\Phi(x) \int_0^1 d\Phi(y) - \int_0^1 \frac{1}{x} d\Phi(x) \int_0^1 \frac{1}{y} d\Phi(y) = \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{xy}\right) d\Phi(x)\, d\Phi(y) = \\
&= \int_0^1 \frac{1-x}{x^2} d\Phi(x) + \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{xy}\right) d\Phi(x)\, d\Phi(y) = \\
&= \int_0^1 \frac{1-x}{x^2} d\Phi(x) + \int_0^1 d\Phi(x) \int_x^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 d\Phi(y),
\end{aligned}$$

quantità manifestamente positiva salvo il caso in cui $\Phi(x)$ concentra la massa in $x = 1$ (processo bernoulliano certo) (3).

(3) Per l'integrazione di una funzione $\alpha(x, y)$ sul quadrato di vertici opposti (0, 0), (1, 1) sussiste la seguente relazione, ottenuta considerando i contributi dovuti a punti simmetrici rispetto alla bisettrice:

$$\int_0^1\int_0^1 \alpha(x, y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^x \alpha(x, y)\, dy + \int_0^1 dx \int_0^x \alpha(y, x)\, dy = \int_0^1 dx \int_0^x [\alpha(x,y) + \alpha(y,x)] dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 [\alpha(x, y) + \alpha(y, x)]\, dy.$$

Passiamo ora a valutare la covarianza, $\operatorname{cov}(T_h, T_k)$, tra due intervalli d'attesa. È, per la scambiabilità del processo $\{T_n\}$:

$$\operatorname{cov}(T_h, T_k) = \operatorname{cov}(T_1, T_2) = E(T_1 \cdot T_2) - [E(T)]^2.$$

Ora si ha:

$$E(T_1 \cdot T_2) = \sum_{h, k=1}^{\infty} hk \cdot \operatorname{Prob}\{T_1 = h \wedge T_2 = k\} = \sum_{h, k=1}^{\infty} hk \cdot \frac{\omega_2^{(h+k)}}{\binom{h+k}{2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \sum_{h=1}^{\infty} h \left[\frac{\omega_1^{(h+k-1)}}{h+k-1} - \frac{\omega_1^{(h+k)}}{h+k} \right] \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega_1^{(k+n)}}{k+n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_1^{(n)}}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Supponendo soddisfatte le condizioni che rendono lecito il passaggio al limite sotto il segno di integrale e che si riflettono su condizioni per la $\Phi(x)$ si ha dunque:

$$E(T_1 \cdot T_2) = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x (1-x)^{n-1} \right) d\Phi(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^2} d\Phi(x). \tag{9}$$

In definitiva si ottiene, con passaggi analoghi a quelli relativi al calcolo di $\operatorname{var}(T)$:

$$\operatorname{cov}(T_1, T_2) = \int_0^1 \frac{1}{x^2} d\Phi(x) - \left[\int_0^1 \frac{1}{x} d\Phi(x) \right]^2 = \tag{10}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \frac{y-x}{x^2 y} d\Phi(x)\, d\Phi(y) = \int_0^1 d\Phi(x) \int_x^1 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 d\Phi(y).$$

La covarianza tra gli intervalli d'attesa tra successi contigui, se esiste finita, è dunque positiva (salvo il caso del processo bernoulliano certo).

È immediato verificare, attraverso i risultati ottenuti, che nel caso in cui la $\Phi(x)$ sia concentrata in un unico punto p (il processo originario $\{|E_n|\}$ è bernoulliano) e solo in quel caso, gli intervalli d'attesa riescono ortogonali, con speranza matematica $1/p$ e varianza q/p^2.

Presentiamo ora alcuni esempi corrispondenti a particolari funzioni $\Phi(x)$.

a) La distribuzione, di cui $\Phi(x)$ è funzione di ripartizione, concentra masse in un numero finito N di punti dell'intervallo $(0, 1)$ (estremi esclusi): il processo originario è dunque mistura di un numero finito di processi bernoulliani.

Indicate con p_i le ascisse dei punti in questione e con c_i le masse ivi depositate ($c_i \geq 0$, $\Sigma c_i = 1$), si ha:

$$\omega_h^{(n)} = \binom{n}{h} \sum_{i=1}^{N} c_i \, p_i^h \, q_i^{n-h} \qquad (q_i = 1 - p_i)$$

e per il generico intervallo d'attesa riesce:

$$\text{Prob}\,\}T = n\{ = \sum_{i=1}^{N} c_i \, p_i \, q_i^{n-1} \,,$$

$$E(T) = \sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{p_i} \,,$$

$$\text{var}\,(T) = \sum_{i=1}^{N} c_i \frac{q_i}{p_i^2} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} c_i \, c_j \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_j}\right)^2,$$

$$\text{cov}\,(T_1\,,\, T_2) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} c_i \, c_j \left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_j}\right)^2.$$

Tutte le grandezze esaminate sono, ovviamente, finite.

Questo caso riveste particolare interesse nelle applicazioni perchè ad esso si fa riferimento ogniqualvolta si considerino problemi riconducibili allo schema di estrazioni con reimbussolamento da un'urna di composizione incognita contenente N palline di due caratteri diversi con l'ipotesi di equiprobabilità e indipendenza dei risultati delle singole estrazioni, subordinatamente ad ogni ipotesi sulla composizione dell'urna.

b) Un esempio in cui non sono soddisfatte le condizioni per l'esistenza dei momenti degli intervalli d'attesa, si ottiene assumendo $\Phi(x) = x$. La distribuzione, di cui $\Phi(x)$ è funzione di ripartizione, è dunque uniforme nell'intervallo $(0, 1)$, con densità $\varphi(x) \equiv 1$. Il processo originario $\}|E_n|\{$ è il processo di Bayes-Laplace.

In questo caso la lunghezza media degli intervalli d'attesa non è finita, come segue anche dalla

$$\omega_1^{(n)} = \frac{1}{n+1}$$

e dal fatto che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_1^{(n)}$ è ora la serie armonica.

c) Il processo originario $\}|E_n|\{$ sia il processo, scambiabile, di Pólya. Gli eventi E_n facciano cioè riferimento ai risultati delle successive estrazioni di una pallina da un'urna che ne contiene inizialmente pN bianche e qN nere $(p+q=1)$ con la convenzione che dopo ogni estrazione vengono poste nell'urna, assieme alla pallina estratta, altre rN delle stesso colore dell'estratta.

Si può provare che, per il processo di Pólya, la distribuzione che caratterizza il processo scambiabile è una *beta* con densità

$$\varphi(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}; \qquad \begin{array}{c} 0 < x < 1 \\ \alpha, \beta > 0 \end{array}$$

con parametri $\alpha = \frac{p}{r}$, $\beta = \frac{q}{r}$; $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ (4).

Nel caso particolare $p = q = r = 1/2$ si ritrova il processo di Bayes-Laplace, con $\varphi(x) \equiv 1$.

Se è $\alpha > 1$ l'intervallo medio d'attesa è finito e la (6) diventa:

$$E(T) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 x^{\alpha-2}(1-x)^{\beta-1}\,dx =$$

$$= \frac{B(\alpha-1,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = 1 + \frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{1-r}{p-r}.$$

La speranza matematica di T è dunque finita se $r < p\,(\leq 1)$, cioè se ad ogni estrazione viene immessa nell'urna una percentuale r di palline minore della percentuale di bianche presente inizialmente. Negli altri casi l'intervallo medio di attesa non è finito. Al variare di r nell'intervallo $0 \leq r < p$, $E(T)$ è funzione crescente di r.

(4) Vedi FELLER: « *An Introduction to probability Theory and its Applications* », vol. II, J. Wiley N. Y., II ediz., 1966, pag. 226. e B. DE FINETTI, loc. cit..

Se poi è $\alpha > 2, \left(r < \frac{p}{2}\right)$ risultano finiti anche il momento secondo di T e il momento misto e dalle (8), (10) si ottiene con facili calcoli:

$$\operatorname{var}(T) = \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = \frac{pq(1-r)}{(p-r)^2(p-2r)},$$

$$\operatorname{cov}(T_h, T_k) = \frac{\beta(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = \frac{qr(1-r)}{(p-r)^2(p-2r)}.$$

Nell'intervallo $0 < r < \frac{p}{2}$ la $\operatorname{var}(T)$ e la $\operatorname{cov}(T_h, T_k)$ sono funzioni positive e crescenti di r.

Nel caso $r = 0$ ci si ritrova nello schema bernoulliano.

3. La nozione di scambiabilità non presuppone che si faccia necessariamente riferimento ad una successione (sequenza infinita) di indicatori di eventi.

Qualora si consideri una sequenza *finita* di N eventi

$$E_1, E_2, \dots, E_N$$

la scambiabilità significa ancora che la probabilità $\omega_h^{(n)}$ che su n eventi, comunque scelti tra gli N, se ne verifichino esattamente h, è indipendente dall'ordine nel quale si verificano; e ciò per ogni $h \leq n \leq N$.

Tra le probabilità $\omega_h^{(n)}$ e le probabilità ω_n che si verifichino n eventi su n, comunque scelti tra gli N, continua a sussistere la relazione

$$\omega_h^{(n)} = \binom{n}{h} \sum_{k=0}^{n-h} (-1)^k \binom{n-h}{k} \omega_{k+h}; \qquad \begin{array}{l} n = 1, 2, \dots, N, \\ h = 0, 1, 2, \dots, n, \\ \omega_0 = 1. \end{array}$$

Il più semplice processo di alternativa scambiabile limitato è il processo ipergeometrico ad N passi, al quale si perviene considerando lo schema di un'urna contenente N palle di cui H bianche $(1 \leq H < N)$ e le rimanenti nere, dalla quale vengono effettuate estrazioni senza reimbussolamento, e la sequenza

$$|E_1|, |E_2|, \dots, |E_N|$$

ove $|E_h|$ è l'indicatore dell'evento E_h: « All' h-ma estrazione compare palla bianca ». (Il processo ipergeometrico è il particolare processo di Pólya corrispondente a $rN = -1$).

È noto che, per N « grande », il processo ipergeometrico si confonde col processo bernoulliano (con $p = H/N$). Il mancato reimbussolamento della palla estratta influisce tanto meno sul processo, quanto più grande è il numero di palle presenti inizialmente nell'urna.

Si può poi provare che tutti e soli i processi di alternativa scambiabili limitati ad N passi sono misture di N processi ipergeometrici, nel senso che c'è corrispondenza biunivoca tra processi scambiabili ad N passi ed N-ple $(c_1, c_2, \dots, c_N)$ $\left(c_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{N} c_i = 1\right)$, « pesi » della mistura (5).

Per il processo ipergeometrico sussistono le:

$$\omega_h^{(n)} = \frac{\binom{H}{h}\binom{N-H}{n-h}}{\binom{N}{n}}; \tag{11}$$

$$n \leq N;$$

$$h' = \max[0; n - [N - H)] \leq h \leq \min[H; n] = h''; \quad \sum_{h=h'}^{h''} \omega_h^{(n)} = 1\ (6);$$

$$\omega_n = \frac{\binom{H}{n}}{\binom{N}{n}}; \quad 0 \leq n \leq H; \omega_0 = 1. \tag{12}$$

È utile, per quel che segue, tener presente che la (11) può essere scritta nella forma equivalente

$$\omega_h^{(n)} = \frac{\binom{n}{h}\binom{N-n}{H-h}}{\binom{N}{H}}. \tag{13}$$

(5) Vedi B. de Finetti: « *Sulla proseguibilità di processi aleatori scambiabili* » in « Rendiconti dell'Ist. di Matematica-Università di Trieste », vol. I. fasc. I, 1969; vedi anche l'appendice a questo lavoro, nella quale è riportata la dimostrazione.

(6) Per $h < h'$ e, nell'ipotesi $n > H$, per $h'' < h \leq n$, è evidentemente $\omega_h^{(n)} = 0$.

Anche il processo, limitato, degli intervalli d'attesa (la H-pla di intervalli), associato ad un processo di alternativa scambiabile limitato, è scambiabile. Per la giustificazione di tale asserto, che deve partirsi dalla definizione di scambiabilità, basta rifarsi — effettuando le ovvie modifiche — a quanto detto nel n. 2.

Esamineremo ora le proprietà del primo e secondo ordine del processo degli intervalli d'attesa, prendendo le mosse dal processo ipergeometrico e passando successivamente al caso generale.

Sempre con riferimento allo schema di estrazioni senza reimbussolamento da un'urna contenente N palle, di cui H bianche, il processo degli intervalli d'attesa tra successi contigui

$$T_1\,, T_2\,, \dots\,, T_H$$

e, ora, caratterizzato, per la (13), dalle:

$$\text{(14)} \qquad \text{Prob}\,\{T_i = h\} = \frac{\omega_1^{(h)}}{h} = \frac{\binom{N-h}{H-1}}{\binom{N}{H}}; \qquad \begin{matrix} h = 1, 2, \dots, N - H + 1, \\ i = 1, 2, \dots, H; \end{matrix}$$

$$\text{(15)} \qquad \text{Prob}\,\{T_i = h \wedge T_j = k\} =$$

$$= \frac{\omega_2^{(h+k)}}{\binom{h+k}{2}} = \frac{\binom{N-(h+k)}{H-2}}{\binom{N}{H}} \qquad \begin{matrix} h, k \geq 1, \\ 2 \leq h+k \leq N - H + 2, \\ i \neq j = 1, 2, \dots, H \end{matrix}$$

e da analoghe espressioni per le distribuzioni congiunte di più di due intervalli d'attesa.

La speranza matematica, $E(T)$, del generico intervallo d'attesa, T, è espressa dalla:

$$\text{(16)} \qquad E(T) = \sum_{h=1}^{N-H+1} h \frac{\binom{N-h}{H-1}}{\binom{N}{H}} = \frac{1}{\binom{N}{H}} \sum_{h=1}^{N-H+1} \sum_{k=h}^{N-H+1} \binom{N-k}{H-1} =$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{H}} \sum_{h=1}^{N-H+1} \binom{N-h+1}{H} = \frac{\binom{N+1}{H+1}}{\binom{N}{H}} = \frac{N+1}{H+1},$$

come segue dalla relazione $\sum_{s=H}^{N} \binom{s}{H} = \binom{N+1}{H+1}$.

Per N fissato, $E(T)$ decresce al crescere di H. Al crescere di N, e fisso rimanendo il rapporto $p = H/N$, $E(T)$ tende al valore $\left(\frac{H}{N}\right)^{-1}$ corrispondente al caso bernoulliano.

Il momento secondo di T si ottiene dalla:

$$(17)\quad E(T^2) = \sum_{h=1}^{N-H+1} h^2 \frac{\binom{N-h}{H-1}}{\binom{N}{H}} = \frac{1}{\binom{N}{H}} \sum_{h=1}^{N-H+1} (2h-1) \sum_{k=h}^{N-H+1} \binom{N-k}{H-1} =$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{H}} \sum_{h=1}^{N-H+1} (2h-1) \binom{N-h+1}{H} =$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{H}} \left\{ 2 \sum_{h=1}^{N-H+1} h \binom{N-h+1}{H} - \sum_{h=1}^{N-H+1} \binom{N-h+1}{H} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\binom{N}{H}} \left\{ 2\binom{N+1}{H+2} - \binom{N+1}{H+1} \right\} = \frac{(N+1)[2(N+1)-H]}{(H+1)(H+2)}$$

sicchè la varianza di T è:

$$(18)\qquad \operatorname{var}(T) = E(T^2) - [E(T)]^2 = \frac{(N+1)\cdot H(N-H)}{(H+1)^2(H+2)}.$$

Come è intuitivo, assegnato N, la var (T) decresce al crescere di H (7).

Per N «grande», e fisso rimanendo il rapporto $p = H/N$, si ritrova il valore $\frac{q}{p^2}\left(p = \frac{H}{N}, q = 1 - p\right)$ corrispondente al caso bernoulliano.

(7) È infatti, per $H = 1, 2, \ldots, N-1$ e con manifesto significato dei simboli:

$$\frac{\operatorname{var}_{H+1}(T)}{\operatorname{var}_H(T)} - 1 = \frac{(H+1)^3(N-H-1)}{H(H+2)(H+3)(N-H)} - 1 =$$

$$= -\frac{(N-H)(2H^2+3H-1)+(H+1)^3}{H(H+2)(H+3)(N-H)} < 0.$$

Il momento secondo misto, infine, è dato, per la (15), dalla:

$$(19)\qquad E(T_i\cdot T_j)=E(T_1\cdot T_2)=\frac{1}{\binom{N}{H}}\sum_{h=1}^{N-H+1}\sum_{k=1}^{N-H+2-h}hk\binom{N-(h+k)}{H-2}=$$

$$=\frac{1}{\binom{N}{H}}\sum_{h=1}^{N-H+1}h\binom{N-h+1}{H}=\frac{\binom{N+2}{H+2}}{\binom{N}{H}}=\frac{(N+1)(N+2)}{(H+1)(H+2)}.$$

Se ne ricava la seguente espressione per la covarianza:

$$(20)\qquad \operatorname{cov}(T_i,T_j)=E(T_i\cdot T_j)-[E(T)]^2=-\frac{(N-H)(N+1)}{(H+1)^2(H+2)}.$$

La covarianza tra intervalli d'attesa, ovviamente negativa a causa del meccanismo di estrazione, è — in modulo — funzione decrescente di H. Essa tende a zero al crescere di N, fisso rimanendo il rapporto $p=H/N$.

Finora si è supposto $H<N$. Il caso $H=N$ non ha infatti interesse perchè corrisponde ad una situazione certa. Lo menzioniamo solamente per osservare che, in quel caso limite, le espressioni ora trovate per i momenti del processo degli intervalli d'attesa continuano ad avere significato, e confermano il carattere non aleatorio del processo.

4. Passiamo, da ultimo, a considerare il processo, scambiabile, limitato, degli intervalli d'attesa tra successi contigui relativo al più generale processo originario di alternativa scambiabile limitato, cioè ad una combinazione lineare convessa di processi ipergeometrici.

Anche in questo caso prenderemo in esame le caratteristiche del primo e secondo ordine. I risultati di maggior interesse li otterremo dallo studio della correlazione tra due intervalli d'attesa: vedremo infatti che il segno di quella correlazione dipende dalla distribuzione dei «pesi» della mistura.

Sempre con riferimento alle estrazioni senza reimbussolamento da un'urna contenente H palle bianche ed $N-H$ nere, consideriamo ora aleatoria la composizione dell'urna.

Posto allora:

$$\operatorname{Prob}\{H=k\}=c_k\,;\qquad c_k\geq 0,\qquad \sum_{k=1}^{N}c_k=1,$$

si ha, per la 11), e convenendo che $\binom{a}{b} = 0$ per $a < b$:

$$\omega_h^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\binom{k}{h}\binom{N-k}{n-h}}{\binom{N}{n}} c_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{\binom{n}{h}\binom{N-n}{k-h}}{\binom{N}{k}} c_k$$

e, per i primi due momenti del generico intervallo d'attesa, si ottiene, tenendo presenti le (16) e (17):

$$E(T) = \sum_{k=1}^{N} \frac{N+1}{k+1} c_k$$

$$E(T^2) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(N+1)[2(N+1)-k]}{(k+1)(k+2)} c_k ,$$

sicchè

$$\operatorname{var}(T) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(N+1)(2N-k+2)}{(k+1)(k+2)} c_k - \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{N+1}{k+1} c_k\right)^2 .$$

Tenendo conto della $\sum_{k=1}^{N} c_k = 1$, si ottiene per la varianza l'espressione

$$\operatorname{var}(T) = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(N-k)(2N-k)}{(k+1)(k+2)} c_k - \left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{N-k}{k+1} c_k\right)^2 ,$$

con $c_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{N-1} c_k \leq 1$.

La var (T) assume il suo massimo valore, $\left(\frac{2N-1}{6}\right)^2$, in corrispondenza della N-pla $\left(c_1 = \frac{2N-1}{3(N-1)},\ c_2 = c_3 = \ldots = c_{N-1} = 0,\ c_N = 1 - c_1 = \frac{N-2}{3(N-1)}\right)$, che attribuisce «pesi» positivi alle due sole composizioni $H = 1$ ed $H = N$, cui corrispondono — per rispetto all'aleatorietà degli intervalli d'attesa — la situazione più «sfavorevole» è la più «favorevole» (massimo, rispettivamente minimo, numero di determinazioni possibili) [8].

[8] La ricerca del massimo della var (T), sotto i vincoli indicati per i «pesi» c_k, è un problema di programmazione quadratica; esso è stato risolto facendo ricorso al procedimento di Houthakker indicato in HADLEY: «*Nonlinear and Dynamic Programming*», Addison-Wesley Pubbl. C., Inc., 1964.

La covarianza tra due qualunque, distinti, intervalli d'attesa è poi data, per le (16) e (19), dalla

$$\operatorname{cov}(T_h, T_i) = \sum_{k=1}^{N} \frac{(N+1)(N+2)}{(k+1)(k+2)} c_k - \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{N+1}{k+1} c_k \right)^2$$

che, tenendo presente la $\sum_{k=1}^{N} c_k = 1$, diventa

$$\operatorname{cov}(T_h, T_i) = -\left\{ \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{N-k}{k+1} \right)^2 c_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \frac{(N-k)(N-j)}{(k+1)(j+1)} c_k c_j - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{N-2} \frac{(N-k)(N-k-1)}{(k+1)(k+2)} c_k \right\}.$$

La covarianza è dunque una forma quadratica nelle $N-1$ variabili $c_1, c_2, \ldots, c_{N-1}$, definita sul simplesso S individuato dall'origine e dagli $N-1$ punti-unità degli assi (punti aventi una coordinata uguale ad 1 e tutte le altre nulle).

Subito possiamo dire che nell'origine (cui corrisponde l'ipotesi $H = N$) la covarianza è nulla, e che negli altri vertici di S essa è negativa, perchè quei vertici corrispondono a distribuzioni concentrate che riducono il processo mistura al caso ipergeometrico.

Nei punti interni ad S la covarianza è sempre negativa solo per $N = 2$; per $N > 2$ essa non è definita di segno: vi sono cioè anche punti nei quali la covarianza è positiva (e quindi — per continuità — punti in cui essa è nulla; conosciamo anzi l'equazione del luogo cui essi appartengono). Uno dei punti in cui la covarianza è positiva è — per $N \geq 6$ — il baricentro di S, cui corrisponde la distribuzione uniforme sulle possibili composizioni dell'urna (9).

Nelle figure sotto riportate è rappresentato, per $N=3$ ed $N=4$, il luogo Λ dei punti di S in cui è $\operatorname{cov}(T_h, T_i) = 0$. Nei punti

(9) In tal caso infatti è $c_k = \dfrac{1}{N}$ per $k = 1, 2, \ldots, N$, e risulta

$$\operatorname{cov}(T_h, T_i) = \frac{N+1}{2} - \left(\frac{N+1}{N} \right)^2 \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+1} \right)^2.$$

« interni » a A la covarianza è positiva, nei punti « esterni » essa è negativa.

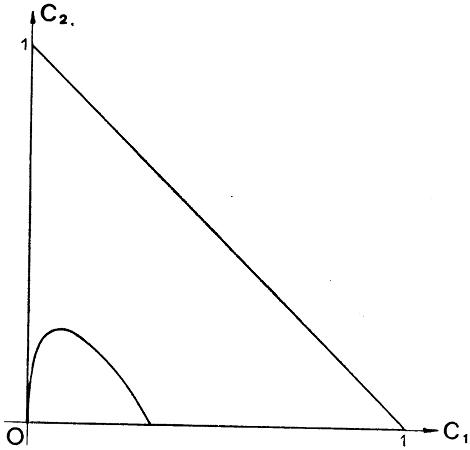

Fig. 1

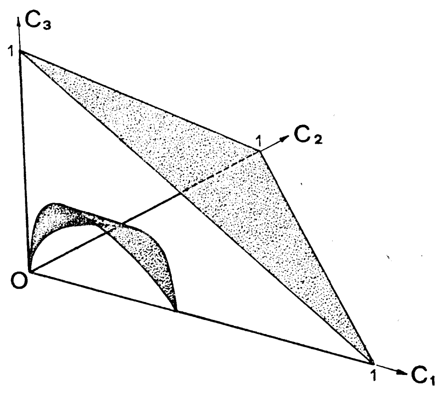

Fig. 2

Per ogni N finito si osserva che, in corrispondenza ad ogni vertice del simplesso S diverso dall'origine, esiste un intorno nel quale la cov (T_h, T_i) è negativa. I punti di tali intorni corrispondono a distribuzioni $\{c_k\}$ che concentrano la « maggior parte » della massa in corrispondenza ad una determinazione di H, e distribuiscono la « parte rimanente » tra le altre determinazioni; in tali casi, cioè, la situazione è « poco discosta » dal caso ipergeometrico. La regione in cui è cov $(T_h, T_i) > 0$ « si allarga » al crescere di N.

In conclusione: il segno della covarianza tra due intervalli d'attesa tra successi contigui relativi ad un processo scambiabile limitato dipende dai coefficienti della combinazione lineare convessa di processi ipergeometrici mediante la quale si può ottenere il processo scambiabile originario. In particolare gli intervalli d'attesa possono essere non correlati.

APPENDICE

Un processo scambiabile limitato ad N passi è individuato univocamente assegnando le N probabilità $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$. Tale assegnazione è, però, fortemente condizionata.

Per ogni $n \leq N$ e per ogni h compreso tra 0 ed n deve infatti essere $0 \leq \omega_h^{(n)} \leq 1$, e ciò comporta che le probabilità ω_h soddisfino il sistema

$$0 \leq \binom{n}{h} \sum_{k=0}^{n-h} (-1)^k \binom{n-h}{k} \omega_{k+h} \leq 1 ; \qquad \begin{array}{l} n = 1, 2, \ldots, N \\ h = 0, 1, 2, \ldots, n . \end{array}$$

Tali condizioni individuano, nello spazio delle N-ple $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$, una regione R i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei processi scambiabili limitati ad N passi.

Ciò premesso, proviamo che *condizione necessaria e sufficiente perchè un processo limitato ad N passi sia scambiabile è che esso riesca mistura di processi ipergeometrici.*

La sufficienza della condizione è quasi ovvia. Fissata infatti una N-pla di « pesi » $(c_1, c_2, \ldots, c_N)$, restano determinate le probabilità $\omega_h^{(n)}$ attraverso la

$$\omega_h^{(n)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\binom{k}{h}\binom{N-k}{n-h}}{\binom{N}{n}} c_k .$$

Ne segue che le $\omega_h^{(n)}$ non dipendono dall'ordine nel quale si verificano gli h successi, sono non negative e — in forza della $\sum_{k=1}^{N} c_k = 1$ — tali che $\sum_{h=0}^{n} \omega_h^{(n)} = 1$: il processo mistura è scambiabile.

Assegnato, poi, un processo scambiabile limitato ad N passi mediante una N-pla $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$ scelta nella regione R, resta individuata, in corrispondenza, una N-pla $\omega_1^{(N)}, \omega_2^{(N)}, \ldots, \omega_N^{(N)}$

in virtù della

$$\omega_k^{(N)} = \binom{N}{k} \sum_{i=0}^{N-k} (-1)^i \binom{N-k}{i} \omega_{k+i},$$

con $\omega_k^{(N)} \geq 0$, $\sum_{k=0}^{N} \omega_k^{(N)} = 1$. Il processo scambiabile è allora mistura di processi ipergeometrici ad N passi, con « pesi » $c_k = \text{Prob}\,(H = k) = \omega_k^{(N)}$. E' infatti, per la 2):

$$\omega_h = \sum_{r=h}^{N} \omega_r^{(N)} \frac{\binom{r}{h}}{\binom{N}{h}}$$

e (vedi la 12)) $\dfrac{\binom{r}{h}}{\binom{N}{h}}$ è la probabilità di h successi in h estrazioni nel processo ipergeometrico di « composizione » $N, H = r$.