SOPRA UN METODO PER IL CALCOLO NUMERICO DELLE RADICI REALI DI UNA EQUAZIONE A PRESCINDERE DALLA LORO SEPARAZIONE (*)

di ALFREDO BELLEN (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Utilizzando alcuni risultati dovuti a W. A. Coppel, S. C. Chu e R. D. Moyer, si fanno alcune osservazioni sulla convergenza delle successioni delle iterate relative a funzioni crescenti, osservazioni che conducono ad un procedimento di calcolo per le radici reali di una equazione $f(x)=0$, ove $f(x)$ è una funzione continua a rapporto incrementale limitato. Va notato che tale procedimento prescinde dalla operazione preliminare della separazione delle radici. L'efficacia del metodo viene infine illustrata attraverso esempi trattati sul calcolatore elettronico.*

SUMMARY. - *Making use of previous results of W. A. Coppel, S. C. Chu and R. D. Moyer, some remarks are made on the convergence of Picard sequences of increasing functions. These remarks lead to a proceeding for the computing of the real roots of an equation $f(x)=0$, where $f(x)$ is a bounded difference quotient continous function. It can be noted that this procedure needs not the previous operation of separating the roots. The strength of the method is illustrated by examples on computer.*

1. — Nei procedimenti iterativi atti al calcolo delle radici reali di una equazione $f(x)=0$, si esige sempre, oltre le abituali proprietà analitiche della $f(x)$, che tali radici siano separate.

Il problema della separazione delle radici presenta già, in generale, notevoli difficoltà, ed in quei casi in cui il problema è

(*) Pervenuto in Redazione il 12 ottobre 1970.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

stato risolto, il procedimento di separazione è, come insegna l'esperienza di macchina, sempre piuttosto oneroso. Se ci si accontenta, però, di calcolare una radice della equazione, e non importa quale, allora, identificando le radici di $f(x)=0$ con i punti fissi della funzione $g(x)=f(x)+x$, ci si può avvalere di un teorema dovuto a S. C. Chu e R. D. Moyer il quale asserisce, tra l'altro, che « per ogni applicazione continua $\varphi(x)$ dell'intervallo $[a, b]$ in sé che sia non-ciclica, la successione delle iterate $\{\varphi^n(x)\}_N$ converge per ogni $x \in [a, b]$ » (1).

In ogni caso il teorema consente di calcolare almeno un punto fisso, ma, in generale, non più d'uno; infatti posto:

$$y=\varphi^\infty(x)=\lim_n \varphi^n(x) \ (^2) \quad \text{e} \quad (\varphi^\infty)^{-1}(y)=\{x : \varphi^\infty(x)=y\}$$

va osservato che, a priori, non sappiamo, in generale, descrivere l'insieme $(\varphi^\infty)^{-1}(y)$. Questo insieme può coincidere con l'intervallo $[a, b]$ (come nel caso di una funzione con un solo punto fisso in $[a, b]$), e può essere ridotto ad un solo punto (come nel caso della funzione $\varphi(x)=\sqrt[3]{x}$ con $x \in [-1, 1]$ relativamente al punto fisso $y=0$ per il quale è $(\varphi^\infty)^{-1}(y)=\{y\}$). Ciò significa che fissato ad arbitrio un

(1) S. C. Chu e R. D. Moyer hanno dimostrato (vedi [1] teorema 1) che se $f(x)$ é una funzione continua che muta l'intervallo $[a, b]$ in sé, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

(1)-(a) Per ogni $x \in [a, b]$ tale che $f(x) \neq x$, si ha $f^2(x) \neq x$.
-(b) Per ogni $x \in [a, b]$ tale che $f(x) > x$, si ha $f^2(x) > x$, e per ogni $x \in [a, b]$ tale che $f(x) < x$, si ha $f^2(x) < x$.
(2) Se G è un sottoinsieme chiuso e non vuoto di $[a, b]$ mutato in sé dalla f, allora f ha un punto fisso in G.
(3)-(a) Per ogni $x \in [a, b[$ tale che $f(x) \neq x$, si ha $f^k(x) \neq x$ per ogni $k > 1$.
-(b) Per ogni $x \in [a, b]$ tale che $f(x) > x$, si ha $f^k(x) > x$ per ogni $k > 1$, e per ogni $x \in [a, b]$ tale che $f(x) < x$, si ha $f^k(x) < x$ per ogni $k > 1$.
(4) La successione $\{f^n(x)\}_N$ converge per ogni $x \in [a, b]$.

L'equivalenza fra (1)-(a) e (3)-(a) ha suggerito agli autori la seguente definizione di funzione non-ciclica:

Sia $f(x)$ una funzione continua che muta l'intervallo $[a, b]$ in sé. Si dirà che $f(x)$ è non-ciclica se per ogni $x \in [a, b]$, $f(x) \neq x \Longrightarrow f^2(x) \neq x$.

L'equivalenza fra (1)-(a) e (4) era stata precedentemente dimostrata da W. A. Coppel [2].

(2) A norma del teorema citato ha senso il simbolo $\varphi^\infty(x)$ ad indicare la funzione limite che associa ad ogni punto $x \in [a, b]$ il punto fisso $y=\lim_n \varphi^n(x)$.

$x \in [a, b]$ e detto $y = \varphi^\infty(x)$, in generale non si può individuare, se non per tentativi, un punto $z \in [a, b]$ tale che $\varphi^\infty(z) \neq y$.

La non-ciclicità, poi, è una proprietà goduta da una classe molto ristretta di funzioni, ed inoltre la verifica che una funzione trasformi l'intervallo in sé può essere, all'atto pratico, poco agevole.

In questa nota si affrontano queste questioni e si propone in definitiva un metodo che consente il calcolo di tutte le radici reali di una equazione contenute in un intervallo, prescindendo dal preliminare problema della loro separazione. Esso è applicabile a tutte le funzioni continue a rapporto incrementale limitato che possiedono, nell'intervallo considerato, un numero finito di radici. Il metodo è stato anche sperimentato, in vari esempi, sul calcolatore elettronico [3] fornendo buoni risultati sia per quanto concerne l'ingombro di memoria, sia per i tempi di esecuzione, sia dal punto di vista della approssimazione.

2. Cominciamo con alcune considerazioni sulle funzioni crescenti. Innanzitutto ogni funzione crescente è non-ciclica [4]; vale conseguentemente la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1. *Sia $f(x)$ una funzione continua e crescente che muti l'intervallo $[a, b]$ in sé. Se, per un dato x, è: $f(x) > x$, la successione $\{f^n(x)\}_N$ è crescente e converge al minimo punto fisso maggiore di x. Se, invece, $f(x) < x$, la successione $\{f^n(x)\}_N$ è decrescente e converge al massimo punto fisso minore di x.*

Sia $f(x)$ una funzione continua su $[a, b]$ (senza che essa muti necessariamente $[a, b]$ in sé). Si dirà che $x^0 \in [a, b]$ è *punto fisso per* $f(x)$ se $f(x^0) = x^0$.

Se $f(x)$ possiede in $[a, b]$ un numero finito di punti fissi, allora, detto x^0 uno di questi, e detto U_{x^0} un suo intorno che escluda gli altri, converremo di dire che:

1. Il punto x^0 è *attrattivo* per $f(x)$ se per ogni $x \in U_{x^0}$ si ha:

$$x < x^0 \Longrightarrow f(x) > x \quad \text{e} \quad x > x^0 \Longrightarrow f(x) < x$$

2. Il punto x^0 è *repulsivo* per $f(x)$ se per ogni $x \in U_{x^0}$ si ha:

$$x < x^0 \Longrightarrow f(x) < x \quad \text{e} \quad x > x^0 \Longrightarrow f(x) > x$$

(3) I calcoli sono stati eseguiti sul calcolatore IBM 1620 in dotazione dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste.

(4) Ciò è ovvio dato che $f(x) \gtrless x \Longrightarrow f^2(x) \gtrless f(x) \gtrless x$.

3. Il punto x^0 è *semiattrattivo a destra* per $f(x)$ se per ogni

$$x \in U_{x^0} - \{x^0\} \text{ si ha } f(x) < x$$

4. Il punto x^0 è *semiattrattivo a sinistra* per $f(x)$ se per ogni

$$x \in U_{x^0} - \{x^0\} \text{ si ha } f(x) > x.$$

PROPOSIZIONE 2. *Se $f(x)$ è una funzione continua e crescente che muta l'intervallo $[a, b]$ in sé, dotata di un numero finito di punti fissi $x_1 \dots x_k$, allora l'insieme $(f^\infty)^{-1}(x_i)$ è costituito, per ogni $i: 1 \leq i \leq k$, da un intervallo o da un punto. Più precisamente:*

1. $(f^\infty)^{-1}(x_i) = (x_{i-1}, x_{i+1}) \Longleftrightarrow x_i$ *è attrattivo.*
2. $(f^\infty)^{-1}(x_i) = \{x_i\} \Longleftrightarrow x_i$ *è repulsivo.*
3. $(f^\infty)^{-1}(x_i) = [x_i, x_{i+1}) \Longleftrightarrow x_i$ *è semiattrattivo a destra.*
4. $(f^\infty)^{-1}(x_i) = (x_{i-1}, x_i] \Longleftrightarrow x_i$ *è semiattrattivo a sinistra.*

dove si intenderà che $x_0 = a$ e $x_{k+1} = b$.

Dimostreremo soltanto la 1, dato che le altre si dimostrano con un ragionamento del tutto simile.

Sia x_i attrattivo. Prendiamo come suo intorno che esclude gli altri punti fissi, l'intervallo (x_{i-1}, x_{i+1}); in esso si ha, per definizione di punto attrattivo:

$$x < x_i \Longrightarrow f(x) > x$$

$$x > x_i \Longrightarrow f(x) < x.$$

Da ciò segue, per la prop. 1, che:

$$\text{per ogni } x \in (x_{i-1}, x_i) \text{ si ha } f^\infty(x) = x_i$$

$$\text{e per ogni } x \in (x_i, x_{i+1}) \text{ si ha } f^\infty(x) = x_i.$$

Da cui, essendo $f(x_i) = x_i$, segue che:

$$\text{per ogni } x \in (x_{i-1}, x_{i+1}) \text{ è } f^\infty(x) = x_i$$

e quindi $(x_{i-1}, x_{i+1}) \subset (f^\infty)^{-1}(x_i)$.

D'altra parte per ogni $x \notin (x_{i-1}, x_{i+1})$ si avrà, ancora per la prop. 1, $f^\infty(x) = x_j$ con $j \leq i - 1$ o $i + 1 \leq j$ e quindi $(f^\infty)^{-1}(x_i) = (x_{i-1}, x_{i+1})$. Viceversa sia $(f^\infty)^{-1}(x_i) = (x_{i-1}, x_{i+1})$, allora ogni intorno U_{x_i} di x_i che non contiene altri punti fissi deve essere incluso in (x_{i-1}, x_{i+1}) e quindi per ogni $x \in U_x{}^i$ è $f^\infty(x) = x_i$.

Sia $x \in U_{x_i}$ e $x < x_i$, dimostriamo che è: $f(x) > x$. Infatti se fosse $f(x) < x$ (non può essere $f(x) = x$ perché x_i è l'unico punto fisso in U_{x_i}) allora, per la crescenza di $f(x)$, si avrebbe $f^2(x) < < f(x) < x$ ed anche $f^n(x) < x$ per ogni n e quindi $f^\infty(x) \leq x < x_i$ contro l'ipotesi che $f^\infty(x) = x_i$ per ogni $x \in U_{x_i}$.

Analogamente si dimostra che se $x > x_i$ allora $f(x) < x$, e quindi x_i è attrattivo.

3. Indichiamo con $R_f(x_1, x_2)$ il seguente rapporto:

$$R_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \qquad (x_1 \neq x_2)$$

e con R_f la classe numerica $\{R_f(x_1, x_2)\}$ al variare di x_1 e x_2. Con la scrittura $R_f < K$ si intenderà che $R_f(x_1, x_2) < K$ per ogni coppia x_1, x_2 tale che $x_1 \neq x_2$.

TEOREMA 1. *Se $\varphi(x)$ è una funzione continua, crescente e tale che $R_\varphi < 2$, la funzione $\psi(x) = 2x - \varphi(x)$ gode delle seguenti proprietà:*

(*a*) *$\psi(x)$ è crescente*

(*b*) *$\psi(x)$ ha gli stessi punti fissi di $\varphi(x)$*

(*c*) *$\psi(x) > x \Longleftrightarrow \varphi(x) < x$*

(*a*) Sia $x > y$. Per ipotesi è $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} < 2$ da cui

$$\varphi(x) - \varphi(y) < 2(x - y) \Longrightarrow 2x - \varphi(x) > 2y - \varphi(y) \Longrightarrow \psi(x) > \psi(y).$$

(*b*) $\varphi(x) = x \Longrightarrow \psi(x) = 2x - \varphi(x) = 2x - x = x$

$$\psi(x) = x \Longrightarrow 2x - \varphi(x) = x \Longrightarrow \varphi(x) = x$$

(*c*) $\varphi(x) < x \Longrightarrow \psi(x) = 2x - \varphi(x) > 2x - x = x$

$$\psi(x) > x \Longrightarrow 2x - \varphi(x) > x \Longrightarrow \varphi(x) < x.$$

Dalla tesi (*c*) segue banalmente che se un punto fisso x^0 è attrattivo per $\varphi(x)$ esso è repulsivo per $\psi(x)$ (e viceversa), mentre se è semiattrattivo a destra per $\varphi(x)$ esso è semiattrattivo a sinistra per $\psi(x)$ (e viceversa).

OSSERVAZIONE 1. Sia $\varphi(x)$ la funzione del teorema 1, e supponiamo che essa sia dotata di un numero finito di punti fissi

$x_1 \dots x_k$ nell'intervallo $[a, b]$ (senza che questo sia necessariamente mutato in sé dalla funzione $\varphi(x)$). Assegnato comunque un punto x compreso fra due punti fissi

$$x_{i-1} \leq x \leq x_i$$

entrambe le successioni $\}\varphi^n(x)\{_N$ e $\}\psi^n(x)\{_N$ convergono (prop. 1), in quanto $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono entrambe continue, crescenti e mutano l'intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ in sé (l'ultima asserzione discende dal fatto che φ e ψ sono crescenti e che $\varphi(x_{i-1}) = \psi(x_{i-1}) = x_{i-1}$ e $\varphi(x_i) = \psi(x_i) = x_i$).

Assegnato invece un punto x non compreso fra due punti fissi, per esempio

$$a \leq x \leq x_1$$

(supposto $a \neq x_1$), se è $\varphi(x) > x$ $(\psi(x) > x)$ allora la successione $\}\varphi^n(x)\{_N$ $(\}\psi^n(x)\{_N)$ converge, in quanto $\varphi(x)$ $(\psi(x))$ è ancora continua e crescente e muta l'intervallo $[a, x_1]$ in sé (5).

Analogamente per un punto x tale che

$$x_k \leq x \leq b$$

(supposto $x_k \neq b$), se è $\varphi(x) < x$ $(\psi(x) < x)$, allora la successione $\}\varphi^n(x)\{_N$ $(\}\psi^n(x)\{_N)$ converge, in quanto $\varphi(x)$ $(\psi(x))$ è continua, decrescente e muta l'intervallo $[x_k, b]$ in sé.

OSSERVAZIONE 2. Sia $\varphi(x)$ una funzione che possiede un numero finito di punti fissi $x_1 \dots x_k$ nell'intervallo $[a, b]$ (senza che questo sia necessariamente mutato in sé dalla φ). Se $\varphi(x)$ soddisfa, in $[a, b]$, alle ipotesi del teorema 1, siamo in grado di dare un procedimento, nel quale si farà uso della funzione $\psi(x)$, atto a calcolare tutti i punti fissi della $\varphi(x)$ contenuti in $[a, b]$.

Introduciamo, per semplicità, le seguenti notazioni:

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi^\infty(x) & \text{se } \varphi(x) > x \\ \psi^\infty(x) & \text{se } \psi(x) > x \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi^\infty(x) & \text{se } \varphi(x) < x \\ \psi^\infty(x) & \text{se } \psi(x) < x \end{cases}$$

(5) Le notazioni in ( ) sono poste in alternativa.

le quali, per l'oss. 1, hanno entrambe senso per ogni $x \in [x_1, x_k]$, mentre per ogni $x \in [a, x_1)$ ha senso solo la $\Phi(x)$, e per ogni $x \in (x_k, b]$ ha senso solo la $\Psi(x)$.

Si noti che, in virtù della prop. 1, $\Phi(x)$ è il minimo punto fisso maggiore di x, e $\Psi(x)$ è il massimo punto fisso minore di x, e di conseguenza:

$$\Phi(a) = x_1 \qquad \text{e} \qquad \Psi(b) = x_k .$$

Per la ricerca degli altri punti fissi si può agire nel seguente modo. Scelto un numero $\delta > 0$, si valuti $\Psi(x_1 + \delta)$.

Se è $\Psi(x_1 + \delta) = x_1$, allora fra x_1 e $x_1 + \delta$ non c'è alcun punto fisso, e quindi $\Phi(x_1 + \delta) = x_2$; si prosegue quindi riapplicando il procedimento al punto $x_2 + \delta$.

Se, invece, è $\Psi(x_1 + \delta) = y \ (\neq x_1)$, allora fra x_1 e y ci potrebbero essere altri punti fissi. Questa eventualità sarà esclusa se

$$\Psi\left(\frac{x_1 + y}{2}\right) = x_1 \qquad \text{e} \qquad \Phi\left(\frac{x_1 + y}{2}\right) = y$$

nel qual caso $y = x_2$. In caso contrario si procederà con ulteriori suddivisioni.

OSSERVAZIONE 3. Il procedimento esposto nella oss. 2 mette in luce il fatto che ogni punto fisso x^0 può essere calcolato come limite di una successione crescente ed anche come limite di una successione decrescente. Ciò sarà sempre possibile escluso il caso in cui $x^0 = a$ oppure $x^0 = b$. Di conseguenza, la distanza tra un punto qualsiasi della prima successione ed un punto qualsiasi della seconda, costituisce una maggiorazione dell'errore che si commette assumendo il loro punto medio come punto fisso.

In pratica potremo calcolare i punti fissi cercati, con la precisione desiderata.

Dimostriamo, infine, che il metodo esposto nella oss. 2 per calcolare i punti fissi contenuti in $[a, b]$ di una funzione $\varphi(x)$ continua, crescente e tale che $R_\varphi < 2$, può essere usato per il calcolo dei punti fissi di una classe assai più vasta di funzioni, e ciò in virtù del seguente teorema.

TEOREMA 2. *Se $f(x)$ è una funzione continua tale che:*

$$H \leq R_f \leq K$$

allora esiste una funzione $\varphi(x)$ che ha gli stessi punti fissi e tale che:

$$0 < R_\varphi < 2.$$

Dimostriamo dapprima che per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una funzione $\varphi(x)$ che ha gli stessi punti fissi della $f(x)$ ed è tale che

$$|R_\varphi - 1| < \varepsilon.$$

Introduciamo la seguente famiglia di funzioni:

$$\varphi_n(x) = x + \frac{f(x) - x}{n}.$$

È immediato verificare che per ogni n la funzione $\varphi_n(x)$ ha gli stessi punti fissi di $f(x)$.

Inoltre per ogni coppia di punti x, y

$$R_{\varphi_n}(x, y) = \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n(y)}{x - y} = \frac{x + \frac{f(x) - x}{n} - y - \frac{f(y) - y}{n}}{x - y} =$$

$$= \frac{x - y + \frac{f(x) - f(y)}{n} - \frac{x - y}{n}}{x - y} = 1 + \frac{R_f(x, y)}{n} - \frac{1}{n}.$$

Dall'ipotesi $R_f(x, y) \geq H$ per ogni x, y segue che

$$R_{\varphi_n} \geq 1 + \frac{H - 1}{n}$$

e quindi, detto r un numero reale tale che $r > \frac{1 - H}{\varepsilon}$, si ha $\frac{H - 1}{r} > -\varepsilon$ e quindi $R_{\varphi_r} > 1 - \varepsilon$.

D'altra parte dall'essere $R_f(x, y) \leq K$ per ogni x, y segue che

$$R_{\varphi_n} \leq 1 + \frac{K - 1}{n}$$

e quindi, detto s un numero reale tale che $s > \frac{K - 1}{\varepsilon}$, si ha $\frac{K - 1}{s} < \varepsilon$ e quindi $R_{\varphi_s} < 1 + \varepsilon$.

Ponendo $n = \max(r, s)$, ossia $n > \max\left(\frac{1-H}{\varepsilon}, \frac{K-1}{\varepsilon}\right)$, la funzione

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) = x + \frac{f(x) - x}{n}$$

è tale che

$$1 - \varepsilon < R_\varphi < 1 + \varepsilon.$$

Posto $\varepsilon = 1$ e indicato con m un numero reale tale che

$$m > \max(1 - H, K - 1)$$

la funzione

$$\varphi = \varphi_m = x + \frac{f(x) - x}{m}$$

soddisfa alla condizione

$$0 < R_\varphi < 2.$$

La funzione φ così trovata soddisfa alle ipotesi del teorema 1, e quindi col metodo descritto nella oss. 2 si possono trovare tutti i suoi punti fissi, e quindi quelli della $f(x)$.

OSSERVAZIONE 4. Si noti che nel teorema 2, la sola ipotesi $R_f \geq H$ è sufficiente per l'esistenza di una funzione $\varphi(x)$ tale che $R_\varphi > 1 - \varepsilon$. Ponendo $\varepsilon = 2$, detto n un numero reale tale che

$$n > \frac{1 - H}{2},$$

la funzione φ_n gode della proprietà che

$$R_{\varphi_n} > -1$$

e quindi [6] è non-ciclica.

4. Come applicazioni del procedimento esposto al paragrafo precedente, consideriamo dapprima un polinomio $P(x)$, e cerchiamo

[6] È stato dimostrato in [3] che una funzione continua $f(x)$ che muta l'intervallo $[a, b]$ in sé è ciclica, se e solo se esiste una coppia di punti x, y per i quali $f(y) \leq x < y \leq f(x)$. La condizione $R_f > -1$ è quindi sufficiente per la non-ciclicità.

le sue radici reali contenute nell'intervallo $[a, b]$. A tale scopo basterà calcolare i punti fissi di $Q(x) = P(x) + x$ in $[a, b]$.

Il metodo è certamente applicabile ai polinomi in quanto questi sono derivabili su tutto l'asse reale e quindi hanno il rapporto incrementale limitato su ogni intervallo limitato; supponiamo quindi che sia in $[a, b]$

$$H \leq R_Q \leq K.$$

Applicando il teorema 2, troviamo le due funzioni

$$\varphi(x) = x + \frac{Q(x) - x}{m} = x + \frac{P(x)}{m}$$

$$\psi(x) = 2x - \varphi(x) = x - \frac{P(x)}{m}$$

dove $m > \max(1 - H, K - 1)$.

Consideriamo ora il seguente esempio numerico

$$P(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120.$$

Supponiamo di aver valutato l'intervallo che contiene tutte le sue radici; sia esso:

$$[0{,}7 \ , \ 5{,}3].$$

Consideriamo quindi:

$$Q(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 275x - 120$$

e

$$Q'(x) = 5x^4 - 60x^3 + 255x^2 - 450x + 275$$

Supponiamo di aver dato, relativamente all'intervallo considerato, una limitazione superiore ed inferiore di R_Q dalla quale si ricavi:

$$m = 50.$$

Applicando il metodo esposto nella osservazione 2 si sono avuti i seguenti risultati (7):

(7) Le radici esatte del polinomio $P(x)$ sono: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$; $x_4 = 4$; $x_5 = 5$.

n^0 della iterazione	valore approssimato della radice	maggiorazione dell'errore
17	1,0000009	0,0000085
69	2,0000004	0,0000720
109	3,0000102	0,0001140
81	3,9999702	0,0000750
23	5,0000005	0,0000080.

È evidente che la validità del metodo dipende dalla possibilità di dare una limitazione del rapporto incrementale, e che la velocità di convergenza sarà tanto maggiore quanto minore è il numero m; comunque anche per valutazioni molto approssimative del numero m, il metodo ha dato buoni risultati.

Una classe di funzioni alla quale molto bene si adatta il metodo esposto, proprio per la facilità con cui si può dare una buona valutazione del numero m, è quella dei polinomi trigonometrici.

Consideriamo il seguente esempio:

$$f(x) = \operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x - 5\cos 2x + \operatorname{sen} x + 1 = 0.$$

Per le radici contenute nell'intervallo di periodicità

$$[0, 2\pi]$$

si sono avuti i seguenti risultati:

n^0 della iterazione	valore approssimato della radice	maggiorazione dell'errore
39	0,5236017	0,00092
13	2,6179886	0,00004
8	3,8635835	0,00006
14	5,2943263	0,00012.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. C. CHU-R. D. MOYER, *On continous functions, commuting functions and fixed points,* Fund. Math. 59 (1966) 91-95.

[2] W. A. COPPEL, *The solution of equations by iteration,* Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955) 41-43.

[3] A. VOLČIČ, *Some remarks on a S. C. Chu and R. D. Moyer's theorem.* Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei-Rendiconti: XLIX n° 5 (1970).