RAPPRESENTAZIONE DEI PIANI LIBERI NELLO SPAZIO PROIETTIVO (*)

di VILIAM CHVÁL (a Košice) (**)

SOMMARIO. - *La nota contiene una costruzione di una struttura di incidenza di punti e piani di uno spazio proiettivo che è isomorfa ad un dato piano proiettivo libero di rango finito ed una analoga costruzione per i piani liberi di Möbius.*

SUMMARY. - *In this note a construction of a incidence structure of points and planes of 3-dimensional projective space is given, which is isomorfic to a given free projective plane of finite rank. A similar result is proved for free inversive planes.*

Nella presente nota sono dimostrati due teoremi sulla rappresentazione dei piani liberi come strutture di incidenza di punti e piani (od iperpiani) dello spazio proiettivo di dimensione tre (oppure quattro).

Nel n. 1 sono definiti alcuni concetti, nel n. 2 è dimostrato il teorema sulla rappresentazione dei piani liberi proiettivi. Il n. 3 contiene cenni elementari sui piani liberi di Möbius ed il n. 4 è dedicato alla costruzione di una rappresentazione per i piani liberi di Möbius.

Per i dettagli sui piani proiettivi liberi cfr. [7], [8], [10], [13], per la teoria dei piani di Möbius cfr. p. e. [2], [5], [6] e per le estensioni libere di questi si veda [10], [11].

Importanti risultati sulla rappresentazione dei piani proiettivi si trovano nei lavori [3], [4] e [12].

(*) Pervenuto in Redazione il 30 ottobre 1970.

Lavoro eseguito nel periodo in cui l'Autore fruiva, presso l'Università di Perugia, di una borsa di Ricerca del C. N. R..

(**) Indirizzo dell'Autore: Katedra Algebry a Geometrie — Prírodovedeckej fakulty UPJS — Košice (Československo).

1. Sia Σ uno spazio proiettivo n-dimensionale, k ed l numeri interi, $0 \leq k \leq l < n$. Chiamiamo *(Σ, k, l)-struttura* una struttura di incidenza $(\mathcal{S}_k, \mathcal{S}_l, \underline{\mathrm{I}})$ dove $\mathcal{S}_k$ è un insieme di sottospazi di Σ k-dimensionali, $\mathcal{S}_l$ un insieme di sottospazi di Σ di dimensione l e per $U \in \mathcal{S}_k$, $V \in \mathcal{S}_l$ risulta $U \underline{\mathrm{I}} V$ se e solo se U è un sottospazio di V.

Diciamo che una struttura di incidenza $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \underline{\mathrm{I}})$ ha una *(Σ, k, l)-rappresentazione* se esiste una (Σ, k, l)-struttura isomorfa ad $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, \underline{\mathrm{I}})$.

2. In questo paragrafo proviamo il seguente

TEOREMA. *Se Σ è uno spazio proiettivo tridimensionale infinito, ogni piano proiettivo libero di rango finito ha una $(\Sigma, 0, 2)$-rappresentazione.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ un piano libero di rango n. Secondo il noto teorema di M. Hall (cfr. [7], [8], [10]) esiste un piano parziale $\mathcal{F}_0$ di $\mathcal{F}$ costituito da una retta p incidente con i punti $A_3, \ldots, A_n$ e da due punti A_1, A_2 non incidenti a p, tale che $\mathcal{F}$ è estensione libera di $\mathcal{F}_0$.

Sia π un piano di Σ. Fissiamo in π i punti $B_3, \ldots, B_n$ in modo che mai tre di essi siano allineati e siano B_1, B_2 due punti di Σ non incidenti con il piano π e non allineati con alcuno dei punti $A_3, \ldots, A_n$.

Costruiamo per induzione una successione

$$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{B}_i \subseteq \ldots$$

di $(\Sigma, 0, 2)$-strutture nel modo seguente.

Se la struttura $\mathcal{B}_{2k}$ è già definita, nell'insieme M_{2k} di tutte le coppie (B, B'), dove B, B' sono punti distinti di $\mathcal{B}_{2k}$, sia dato un ordinamento tale che tutte le coppie $(B, B') \in M_{2k}$ per cui i punti B, B' sono incidenti in $\mathcal{B}_{2k}$ con qualche piano $\beta = \varrho(B, B')$, precedono tutte le altre. Per ciascuna di queste ultime coppie definiamo per induzione un piano $\varrho(B, B')$ che soddisfi le proprietà:

$a_{2k})$ $\varrho(B, B')$ è incidente in $\mathcal{B}_{2k}$ solo con i punti B e B';

$b_{2k})$ se in M_{2k} le coppie (C, C') e (D, D') precedono (B, B') allora i tre piani $\varrho(B, B')$, $\varrho(C, C')$ e $\varrho(D, D')$ si intersecano solo in un punto di Σ.

Si riconosce subito che i piani $\varrho(B, B')$ con le proprietà $a_{2k})$ e $b_{2k})$ esistono, perchè ci sono solo un numero finito di piani passanti per B e B' e non aventi le proprietà $a_{2k})$ e $b_{2k})$.

Sia $\mathcal{B}_{2k+1}$ la $(\Sigma, 0, 2)$-struttura ottenuta con l'aggiunta dei piani $\varrho(B, B')$ alla struttura $\mathcal{B}_{2k}$.

Per ogni coppia (β, β') di piani distinti di $\mathcal{B}_{2k+1}$ sia $\varrho(\beta, \beta')$ un punto di Σ definito come segue.

Sia M_{2k+1} l'insieme di tutte le coppie (β, β') di piani distinti di $\mathcal{B}_{2k+1}$ ordinato in modo tale che tutte le coppie (β, β') aventi in $\mathcal{B}_{2k+1}$ uno [e per la $a_{2k})$ un solo] punto $\varrho(\beta, \beta')$ comune, precedono tutte le altre. Per queste ultime sia $\varrho(\beta, \beta')$ un punto di intersezione $\beta \cap \beta'$ con le proprietà :

$a_{2k+1})$ $\varrho(\beta, \beta')$ è incidente in $\mathcal{B}_{2k+1}$ solo con i piani β e β';

$b_{2k+1})$ se (γ, γ'), (δ, δ') precedono in M_{2k+1} (β, β') i punti $\varrho(\beta, \beta')$, $\varrho(\gamma, \gamma')$ e $\varrho(\delta, \delta')$ non siano allineati.

Poichè la struttura $\mathcal{B}_{2k+1}$ è finita, lo spazio Σ è infinito ed ogni tre piani diversi di $\mathcal{B}_{2k+1}$ hanno in comune esattamente un punto [per la $b_{2k})$], segue immediatamente che è sempre possibile definire i punti $\varrho(\beta, \beta')$ con le proprietà $a_{2k+1})$ e $b_{2k+1})$.

Aggiungendo alla struttura $\mathcal{B}_{2k+1}$ tutti i punti $\varrho(\beta, \beta')$ per ogni coppia $(\beta, \beta') \in M_{2k+1}$ otterremo la struttura $\mathcal{B}_{2k+2}$.

Poniamo $\mathcal{B} = \bigcup\limits_i \mathcal{B}_i$ e proviamo che $\mathcal{B}$ è la struttura cercata.

Ogni $\mathcal{B}_k$ *è un piano parziale.* Infatti, l'affermazione sia vera per $\mathcal{B}_k$ e siano $a, b \in \mathcal{B}_{k+1}$ due elementi dello stesso tipo (cioè o entrambi punti o entrambi piani). Se $a \in \mathcal{B}_{k+1} - \mathcal{B}_k$ e $b \in \mathcal{B}_k$, vale che $a = \varrho(c, c')$ con $c, c' \in \mathcal{B}_k$ e, per la proprietà $a_k)$, la coppia (c, c') è determinata univocamente da a. Allora a e b possono essere incidenti al più con c o c'. Se anche $b \in \mathcal{B}_{k+1} - \mathcal{B}_k$, $b = \varrho(d, d')$ con $d, d' \in \mathcal{B}_k$ e, sempre per la $a_k)$, almeno tre elementi fra c, c', d, d' sono distinti; ne segue immediatamente l'affermazione fatta.

Poichè, per il modo in cui è stata fatta la costruzione della successione $\mathcal{B}_k$, ogni due elementi di $\mathcal{B}$ dello stesso tipo sono incidenti con almeno un elemento di $\mathcal{B}$, questo ultimo è *un piano proiettivo*. Dalla proprietà $a_k)$ segue che ogni elemento di $\mathcal{B}_{k+1} - \mathcal{B}_k$ è incidente con esattamente due elementi di $\mathcal{B}_k$. Questo significa che $\mathcal{B}$ *è estensione libera di* $\mathcal{B}_0$ e poichè questo è ovviamente isomorfo con $\mathcal{F}_0$, il teorema è provato.

3. Alcuni cenni sui piani liberi di Möbius.

Se $\mathcal{M}$ è un piano parziale di Möbius ed A è un punto di $\mathcal{M}$ incidente con un cerchio k di $\mathcal{M}$ indicheremo con $[A, k]$ il fascio di tutti i cerchi l che sono tangenti a k nel punto A (compreso il cerchio k).

Se è dato un piano parziale di Möbius $\mathcal{M}_0$, definiamo la successione

$$\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_i, \dots$$

nel modo seguente:

1) La struttura $\mathcal{M}_{3k+1}$ si ottiene da $\mathcal{M}_{3k}$ aggiungendo, in corrispondenza ad ogni tre punti diversi di $\mathcal{M}_{3k}$ non incidenti con un medesimo cerchio di $\mathcal{M}_{3k}$, un nuovo cerchio incidente con e solo con questi tre punti;

2) $\mathcal{M}_{3k+2}$ si ottiene da $\mathcal{M}_{3k+1}$ se per ogni fascio $[A, k]$ e per ogni punto $B \neq A$ $(A, B, k \in \mathcal{M}_{3k+1})$ tali che non esiste in $[A, k]$ un cerchio passante per B, aggiungeremo un nuovo cerchio l incidente con e solo con i punti A e B e tale che $l \in [A, k]$.

3) Da $\mathcal{M}_{3k+2}$ si passa ad $\mathcal{M}_{3k+3}$ se per ogni coppia di cerchi che in $\mathcal{M}_{3k+2}$ non sono tangenti e hanno in $\mathcal{M}_{3k+2}$ un punto comune, aggiungiamo un nuovo punto incidente, in $\mathcal{M}_{3k+3}$, esattamente con questi due cerchi.

La struttura $\mathcal{F}(\mathcal{M}_0) = \bigcup_k \mathcal{M}_k$ *è un piano di Möbius chiamato estensione libera di* $\mathcal{M}_0$. Se $\mathcal{M}_0$ è formata da un cerchio k incidente con i punti $A_2, \dots, A_n$ e da un punto $A_1 \mathbin{\bar{+}} k$, chiamiamo $\mathcal{F}(\mathcal{M}_0)$ *piano libero di Möbius di rango* $n+4$.

Il concetto di geometrie dei cerchi «libere» si trova esposto in modo più ampio insieme a varii risultati nei lavori [10] e [11].

4. Per i piani liberi di Möbius è valido il seguente

TEOREMA. *Sia* Σ *uno spazio proiettivo 4-dimensionale infinito. Ogni piano libero di Möbius di rango finito ha una* $(\Sigma, 0, 3)$*-rappresentazione.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{M} = \mathcal{F}(\mathcal{M}_0)$ un piano libero di Möbius dove $\mathcal{M}_0 = \{k, A_1, \dots, A_n;\ A_1 \mathbin{\bar{+}} k \mathbin{\underline{\mathrm{I}}} A_2, \dots, A_n\}$.

Nello spazio Σ scegliamo un iperpiano π ed i punti B_1, B_2, $, \dots, B_n$ in modo che mai quattro di questi siano complanari e

$B_1 \mp \pi \mathbin{\underline{|}} B_2, \ldots, B_n$. Indichiamo questa $(\Sigma, 0, 3)$-struttura con $\mathcal{B}_0$ e definiamo per induzione la successione di strutture:

$$\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_i, \ldots$$

nel modo seguente.

Se $\mathcal{B}_{3k}$ è già definito, sia M_{3k} l'insieme di tutte le terne (A, B, C) (dove A, B, C sono punti distinti di $\mathcal{B}_{3k}$) ordinato in modo che tutte le terne (A, B, C) per cui i punti A, B, C in $\mathcal{B}_{3k}$ sono incidenti con un (e solo un) medesimo iperpiano, $\varrho(A, B, C)$, precedono tutte le altre. Per queste ultime sia $\varrho(A, B, C)$ un iperpiano di Σ definito per induzione e verificante le proprietà:

a_{3k}) $\varrho(A, B, C)$ è incidente solo con i punti A, B, C di $\mathcal{B}_{3k}$;

b_{3k}) se (A', B', C'), (A'', B'', C'') precedono in M_{3k} la terna (A, B, C), $\varrho(A, B, C) \cap \varrho(A', B', C') \cap \varrho(A'', B'', C'')$ è una retta di Σ.

Non è difficile riconoscere che per tutte le terne $(A, B, C) \in M_{3k}$ è possibile costruire un iperpiano $\varrho(A, B, C)$ con le proprietà a_{3k}), b_{3k}).

Sia $\mathcal{B}_{3k+1}$ la struttura ottenuta dalla $\mathcal{B}_{3k}$ aggiungendo a questa gli iperpiani $\varrho(A, B, C)$.

Tra gli iperpiani $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{3k+1}$ definiamo una relazione τ ponendo $\alpha \tau \beta$ in $\mathcal{B}_{3k+1}$ se e solo se $\alpha \tau \beta$ in $\mathcal{B}_{3k}$ o $\alpha = \beta$. Per un punto $A \in \mathcal{B}_{3k+1}$ e un iperpiano $\alpha \in \mathcal{B}_{3k+1}$ sia α_A l'insieme di tutti gli iperpiani $\beta \in \mathcal{B}_{3k+1}$ tali che $\alpha \tau \beta$ e α e β hanno in $\mathcal{B}_{3k+1}$ a comune solo il punto A.

In $\mathcal{B}_{3k+1}$ consideriamo l'insieme M_{3k+1} di tutte le coppie (α_A, B) con $A \neq B$, $A, B, \alpha \in \mathcal{B}_{3k+1}$ e M_{3k+1} sia ordinato in modo tale che tutte le coppie (α_A, B) per cui esiste un (e, come segue dalla costruzione della struttura $\mathcal{B}$, solo uno) iperpiano β tale che $B \mathbin{\underline{|}} \beta \in \alpha_A$ precedano tutte le altre. Per le prime poniamo $\varrho(\alpha_A, B) = \beta$ e per le rimanenti coppie (α_A, B) di M_{3k+1} definiamo $\varrho(\alpha_A, B)$ per induzione in modo che risulti:

a_{3k+1}) $\varrho(\alpha_A, B)$ passa solo per i punti A, B di $\mathcal{B}_{3k+1}$;

b_{3k+1}) se le coppie (β_C, D) e (γ_E, F) precedono in M_{3k+1} la (α_A, B), il sottospazio $\varrho(\alpha_A, B) \cap \varrho(\beta_C, D) \cap \varrho(\gamma_E, F)$ è una retta di Σ.

L'esistenza di $\varrho(\alpha_A, B)$ segue dal fatto che $\mathcal{B}_{3k+1}$ è finito e dalla proprietà b_{3k}).

Sia $\mathcal{B}_{3k+2}$ la struttura $\mathcal{B}_{3k+1}$ ampliata con tutti gli iperpiani $\varrho(\alpha_A, B)$. In $\mathcal{B}_{3k+2}$ poniamo $\varrho(\alpha_A, B) \tau \beta$ se e solo se $\beta = \varrho(\alpha_A, B)$ oppure $\beta \in \alpha_A$.

Sia M_{3k+2} l'insieme di tutte le terne (α, β, A) con $\alpha, \beta, A \in \mathcal{B}_{3k+2}$, $\alpha, \beta \mathbin{\underline{|}} A$ ed $\alpha \overline{\in} \beta_A$. Ordiniamo M_{3k+2} in modo tale che tutte le terne (α, β, A) nelle quali gli iperpiani α e β hanno in $\mathcal{B}_{3k+2}$ a comune anche un punto $B = \varrho(\alpha, \beta, A)$, $B \neq A$, precedano tutte le altre. Per queste definiamo per induzione un punto $\varrho(\alpha, \beta, A)$ di Σ con le proprietà:

a_{3k+2}) il punto $\varrho(\alpha, \beta, A)$ è incidente in $\mathcal{B}_{3k+2}$ solo con gli iperpiani α e β;

b_{3k+2}) se A_1, A_2, A_3 sono tre punti distinti di $\mathcal{B}_{3k+2}$, oppure dei punti $\varrho(\alpha', \beta', A')$ già costruiti, $\varrho(\alpha, \beta, A)$ non è complanare con essi.

Aggiungiamo i punti $\varrho(\alpha, \beta, A)$ alla struttura $\mathcal{B}_{3k+2}$ e indichiamo la nuova struttura con $\mathcal{B}_{3k+3}$. Infine per $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_{3k+3}$ stabiliamo che $\alpha \tau \beta$ se e solo se $\alpha \tau \beta$ in $\mathcal{B}_{3k+2}$.

Sia $\mathcal{B} = \bigcup_k \mathcal{B}_k$. Vogliamo provare che la struttura $\mathcal{B}$ è isomorfa al piano di Möbius $\mathcal{M}$. Per questo definiamo per induzione una corrispondenza ω fra $\mathcal{M}$ e $\mathcal{B}$.

Per $k, A_1, \ldots, A_n$ sia $k^\omega = \pi$ e $A_i^\omega = B_i (i = 1, \ldots, n)$. Se ω è già definita per tutti gli elementi di $\mathcal{M}_{3k}$ e l è un cerchio di $\mathcal{M}_{3k+1} - \mathcal{M}_{3k}$ passante per i punti A, B, C di $\mathcal{M}_{3k}$, poniamo $l^\omega = \varrho(A^\omega, B^\omega, C^\omega)$.

Se $m \in \mathcal{M}_{3k+2} - \mathcal{M}_{3k+1}$ è un cerchio incidente con i punti A, $B \in \mathcal{M}_{3k+1}$ e $m \in [A, l]$, sia $m^\omega = \varrho(l^\omega_{A^\omega}, B^\omega)$.

Infine sia B un punto di $\mathcal{M}_{3k+3} - \mathcal{M}_{3k+2}$; B è allora incidente con i cerchi k, $l \in \mathcal{M}_{3k+2}$, aventi in questa struttura a comune un punto $A \neq B$. Poniamo $B^\omega = \varrho(k^\omega, l^\omega, A^\omega)$. Dalla costruzione delle successioni $\mathcal{M}_k$ e $\mathcal{B}_k$ segue immediatamente che la corrispondenza ω è ben definita ed anzi *ω è un isomorfismo fra le strutture di incidenza $\mathcal{M}$ e $\mathcal{B}$.*

OSSERVAZIONE. I teoremi dei nn. 2 e 4 sono validi anche se i ranghi dei piani liberi sono numeri cardinali infiniti e l'insieme dei punti dello spazio Σ ha potenza maggiore di essi. Infatti, se gli insiemi M_k usati nei nn. 2 e 4 sono ben ordinati, non ci sono difficoltà a definire le corrispondenze ϱ mediante induzione trasfinita e ad eseguire tutta la costruzione in modo completamente analogo a quello indicato nei nn. 2 e 4.

Osserviamo anche che con un procedimento analogo si può costruire una $(\Sigma, 0, m+2)$-rappresentazione per una m-struttura di Möbius libera (cfr. [1], [9]) nello spazio proiettivo $m+3$-dimensionale.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARLOTTI, A.: *Sulle m-strutture di Möbius,* Rend. Ist. di Matem. Univ. Trieste, I (1969), 35-46.

[2] BENZ, W.: *Über Möbiusebenen,* Jahresbericht der DMV, 63 (1960), 1-27.

[3] BRUCK, R. H., BOSE, R. C.: *The construction of translation planes from projective spaces,* Journal of algebra, 1 (1964), 85-102.

[4] BRUCK, R. H., BOSE, R. C.: *Linear representations of projective planes in projective spaces,* Journal of algebra, 4 (1966), 117-172.

[5] DEMBOWSKI, P.: *Möbiusebenen gerader Ordnung,* Math. Ann., 157 (1964), 179-205.

[6] DEMBOWSKI, P.: *Finite geometries,* Springer Verlag, 1968.

[7] HALL M. jr.: *Projective planes,* Trans. Am. Math. Soc., 54 (1943) 229-277.

[8] KOPEJKINA, L. I.: *Svobodnyje razlozenja projektivnych ploskostej,* Izvestja Ak. nauk SSSR, 9 (1945), 495-526.

[9] PERMUTTI, R.: *Una generalizzazione dei piani di Möbius,* Le Matematiche, 22 (1967), 360-374.

[10] SCHLEIERMACHER, A., STRAMBACH, K.: *Freie Erweiterungen in der affinen Geometrie und in der Geometrie des Kreises* I. Abh. Math. Sem. Un. Hamburg, 34 (1969), 22-37.

[11] SCHLEIERMACHER, A., STRAMBACH, K.: *Freie Erweiterungen in der affinen Geometrie und in der Geometrie des Kreises* II, Abh. Math. Sem. Un. Hamburg, 34 (1970), 209-226.

[12] SEGRE, B.: *Teoria di Galois, fibrazioni proiettive e geometrie non desarguesiane,* Ann. Mat. Pura ed Appl. (4) 64, (1964), 1-76.

[13] SIEBENMANN, L. C.: *A characterization of free projective planes,* Pacific J. Math., 15 (1965), 293-298.