SU ALCUNE APPROSSIMAZIONI DI TIPO RAZIONALE PER LE FUNZIONI CIRCOLARI (*)

di SERGIO GUERRA (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Utilizzando una ben nota formula di quadratura, si conseguono, per le funzioni circolari, approssimazioni di tipo razionale numericamente efficaci.*

SUMMARY. - *By a well known quadrature formula, we obtain, for the circular functions, rational approximations which are numerically efficient.*

In altra occasione ([1]) ci siamo occupati di un procedimento atto alla costruzione di polinomi di « buona » approssimazione, nel solito senso di « minimo ingombro di calcolo e massima precisione », utilizzabili per il calcolo, in precisione multipla, di talune funzioni elementari. In questa nota ci occupiamo dello stesso problema, relativamente a funzioni circolari, con la variante della ricerca di funzioni razionali anzichè polinomi.

La tecnica quì usata fa ricorso ad una ben nota formula di quadratura.

1. La funzione $f(t)$ sia definita in $[0, 1]$ ed ivi dotata di derivate continue fino a quella di ordine $2n$. In queste circostanze vale la seguente formula di quadratura:

$$\int_0^1 f(t)\, dt = \frac{1}{c_0^n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} c_{k+1}^n\, y_k + R_n(f), \tag{1}$$

(*) Pervenuto in Redazione il 10 ottobre 1970.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R..

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

([1]) Cfr. U. BARBUTI e S. GUERRA, *Osservazioni sulla utilizzazione...*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), pg. 127-138.

con

$$c_k^n = \frac{(2n-k)!}{(n-k)!\,k!}, \tag{2}$$

$$y_k = f^{(k)}(0) + (-1)^k f^{(k)}(1) \tag{3}$$

e

$$R_n(f) = \frac{(-1)^n}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \int_0^1 (1-t)^n t^n \, dt, \tag{4}$$

con ξ opportuno compreso tra 0 ed 1 [2].

Poichè riesce

$$\int_0^1 (1-t)^n t^n \, dt = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}, \tag{5}$$

la (4), con qualche semplificazione, può poi scriversi nella forma

$$R_n(f) = \frac{(-1)^n f^{(2n)}(\xi)}{2^{2n}(2n-1)!!\,(2n+1)!!}. \tag{6}$$

2. La (1), applicata alla funzione $f(t) = e^{\alpha t}$, con α reale comunque fissato, conduce all'uguaglianza

$$e^\alpha = \frac{\sum_{k=0}^{n} c_k^n \alpha^k}{\sum_{k=0}^{n} c_k^n (-\alpha)^k} + \frac{c_0^n \alpha}{\sum_{k=0}^{n} c_k^n (-\alpha)^k} \cdot R_n(e^{\alpha t}) \text{ [3]}. \tag{7}$$

Valendo la (7), come subito si osserva, anche per α complesso, dalla (7) medesima, per $\alpha = ix$, con x reale comunque fissato, posto

$$\begin{cases} A_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k c_{2k}^n x^{2k} \\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} (-1)^k c_{2k+1}^n x^{2k+1}, \end{cases} \tag{8}$$

(2) Cfr. C. Lanczos, *Applied Analysis*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1956, pg. 419-425.

(3) Cfr., a pg. 425, loc. cit. alla nota (2). L'approssimazione (di tipo razionale) dell'esponenziale, rappresentata dal 1° addendo al 2° membro della (7), è stata considerata, per la 1a volta, da P. M. Hummel e C. L. Seebeck in « *A Generalization of Taylor's Theorem* », Assoc. Monthly, 56, pg. 243-247 (1949)

segue

$$e^{ix} = \frac{A_n(x) + iB_n(x)}{A_n(x) - iB_n(x)} + \frac{c_0^n\,(ix)}{A_n(x) - iB_n(x)} \cdot R_n\,(e^{ixt}). \tag{9}$$

Da questa, uguagliando le parti reali ed i coefficienti dell'immaginario al 1° ed al 2° membro, seguono poi, per le funzioni $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$, le approssimazioni razionali seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} \cos x &\simeq \frac{A_n^2(x) - B_n^2(x)}{A_n^2(x) + B_n^2(x)} \\ \operatorname{sen} x &\simeq \frac{2A_n(x)\,B_n(x)}{A_n^2(x) + B_n^2(x)} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

e, per i rispettivi termini d'errore $\eta_n^{(1)}(x)$, $\eta_n^{(2)}(x)$, tenendo conto della (6), risulta

$$\left\{\begin{aligned} \eta_n^{(1)}(x) &= -\frac{c_0^n\,x^{2n+1}\,[A_n(x)\operatorname{sen} x\xi + B_n(x)\cos x\xi]}{A_n^2(x) + B_n^2(x)} \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot \frac{1}{2^{2n}\,(2n-1)!!\,(2n+1)!!} \\ \eta_n^{(2)}(x) &= \frac{c_0^n\,x^{2n+1}\,[A_n(x)\cos x\xi - B_n(x)\operatorname{sen} x\xi]}{A_n^2(x) + B_n^2(x)} \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot \frac{1}{2^{2n}\,(2n-1)!!\,(2n+1)!!}\,. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Osserviamo subito che, essendo le due quantità $|\,A_n(x)\operatorname{sen} x\xi + B_n(x)\cos x\xi\,|$, $|\,A_n(x)\cos x\xi - B_n(x)\operatorname{sen} x\xi\,|$, come facilmente si verifica, non superiori a $\sqrt{A_n^2(x) + B_n^2(x)}$, per il massimo errore assoluto $E_n(x)$ relativo sia alla 1ª che alla 2ª delle (10), riesce

$$E_n(x) \leq \frac{c_0^n\,|\,x\,|^{2n+1}}{\sqrt{A_n^2(x) + B_n^2(x)}} \cdot \frac{1}{2^{2n}\,(2n-1)!!\,(2n+1)!!}\,. \tag{12}$$

3. Supponiamo ora che sia

$$0 \leq x \leq 1. \tag{13}$$

In questa ipotesi, poichè i numeri (interi positivi) c_k^n, definiti in (2), decrescono al crescere di k, risulta

$$(14)\qquad \begin{cases} c_0^n - c_2^n \leq A_n(x) \leq c_0^n \\ 0 \leq B_n(x) \leq c_1^n, \end{cases}$$

per ogni n e per ogni x. Essendo, inoltre, sempre per ogni x e qualunque sia ξ ($\in [0, 1]$),

$$(15)\qquad \begin{cases} 0 \leq \operatorname{sen} x\xi \leq \operatorname{sen} 1 < 0{,}85 \\ 0{,}54 < \cos 1 \leq \cos x\xi \leq 1, \end{cases}$$

riesce

$$(16)\qquad \begin{cases} A_n(x) \operatorname{sen} x\xi + B_n(x) \cos x\xi \geq 0 \\ A_n(x) \cos x\xi - B_n(x) \operatorname{sen} x\xi > 0, \end{cases}$$

onde

$$(17)\qquad \begin{cases} \eta_n^{(1)}(x) \leq 0 \\ \eta_n^{(2)}(x) \geq 0, \end{cases}$$

per ogni x e dunque il 2^0 membro della 1^a delle (10) approssima $\cos x$ per eccesso, il 2^0 membro della 2^a delle (10) approssima $\operatorname{sen} x$ per difetto.

In virtù della 1^a delle (14) si ha poi

$$(18)\qquad \frac{c_0^n \mid x \mid^{2n+1}}{\sqrt{A_n^2(x) + B_n^2(x)}} \leq \frac{c_0^n}{A_n(x)} \leq \frac{c_0^n}{c_0^n - c_2^n} = \frac{1}{1 - \dfrac{c_2^n}{c_0^n}}$$

ed anche, essendo, per ogni n,

$$(19)\qquad \frac{c_2^n}{c_0^n} = \frac{n-1}{8n-4} < \frac{1}{8},$$

$$(20)\qquad \frac{c_0^n \mid x \mid^{2n+1}}{\sqrt{A_n^2(x) + B_n^2(x)}} < \frac{8}{7}.$$

Dalla (20) e dalla (12) segue allora, per ogni x,

$$(21)\qquad E_n(x) < \frac{8}{7} \cdot \frac{1}{2^{2n}(2n-1)!!\,(2n+1)!!}.$$

4. In virtù della (9), risulta

$$(22)\qquad \operatorname{tang}\frac{x}{2} = -\,i\cdot\frac{e^{ix}-1}{e^{ix}+1} = \frac{2B_n(x)+c_0^n\, xR_n(e^{ixt})}{2A_n(x)+c_0^n(ix)\,R_n(e^{ixt})}$$

e quindi

$$(23)\qquad \operatorname{tang}\frac{x}{2} - \frac{B_n(x)}{A_n(x)} = \frac{c_0^n\, x\, R_n(e^{ixt})}{A_n(x)}\cdot\frac{A_n(x)-iB_n(x)}{2A_n(x)+c_0^n(ix)\,R_n(e^{ixt})},$$

dalla quale, passando ai moduli e tenendo conto della (6), segue

$$(24)\qquad \left|\operatorname{tang}\frac{x}{2} - \frac{B_n(x)}{A_n(x)}\right| = \frac{c_0^n\,|x|^{2n+1}}{|A_n(x)|}\cdot\frac{1}{2^{2n}(2n-1)!!\,(2n+1)!!}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\frac{A_n^2(x)+B_n^2(x)}{[2A_n(x)-c_0^n\, x^{2n+1}\operatorname{sen} x\xi]^2+[c_0^n\, x^{2n+1}\cos x\xi]^2}}\,.$$

Nell'ipotesi (13), per le (14) e per la (20), si ha allora

$$(25)\qquad \left|\operatorname{tang}\frac{x}{2} - \frac{B_n(x)}{A_n(x)}\right| < \frac{c_0^n}{A_n(x)}\cdot\frac{1}{2^{2n}(2n-1)!!\,(2n+1)!!}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{A_n^2(x)+B_n^2(x)}}{2A_n(x)-c_0^n} < \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{2^{2n}(2n-1)!!\,(2n+1)!!}\cdot$$

$$\cdot\frac{\sqrt{(c_0^n)^2+(c_1^n)^2}}{c_0^n-2c_2^n} = \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{2^{2n}(2n-1)!!\,(2n+1)!!}\cdot\frac{\sqrt{5}\,(2n-1)}{3n-1} <$$

$$< \frac{8}{7}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{3}\cdot\frac{1}{2^{2n}(2n-1)!!\,(2n+1)!!} < \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)!!\,(2n+1)!!}\,.$$

Dunque, assumendo, per ogni $x \in [0, 1]$,

$$(26)\qquad \operatorname{tang}\frac{x}{2} \simeq \frac{B_n(x)}{A_n(x)},$$

per il corrispondente massimo errore assoluto $H_n(x)$, riesce

$$(27)\qquad H_n(x) < \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)!!\,(2n+1)!!}\,.$$

5. La disuguaglianza (21) bene evidenzia l'efficacia numerica delle (10) nel calcolo simultaneo delle due funzioni seno e coseno, per ogni $x \in [0, 1]$. Si osservi, a tal proposito, che, per ogni fissato n, l'uso delle (10) coinvolge soltanto 7 effettive operazioni razionali oltre quelle inerenti al calcolo dei due polinomi (8) ([4]); in tutto

$$2n + 6 \tag{28}$$

operazioni razionali.

La (27) evidenzia altrettanto bene l'efficacia numerica della (26) nel calcolo di $\operatorname{tang} \frac{x}{2}$, per ogni $x \in [0, 1]$. Quì, per ogni fissato n, l'uso della (26) coinvolge in tutto soltanto

$$2n \tag{29}$$

operazioni razionali.

A titolo esemplificativo riportiamo, nel caso $n = 10$, le espressioni effettive dei due polinomi (8) nonchè le maggiorazioni di $E_{10}(x)$ e $H_{10}(x)$ che scaturiscono dalla (21) e dalla (27), rispettivamente.

$$A_{10}(x) = 670442572800 - 79394515200\, x^2 + \\ + 1210809600\, x^4 - 5045040\, x^6 + 5940\, x^8 - x^{10}$$

$$B_{10}(x) = 335221286400\, x - 11762150400\, x^3 + \\ + 90810720\, x^5 - 205920\, x^7 + 110\, x^9$$

$$E_{10} < 1{,}2 \cdot 10^{-25}, \qquad H_{10} < 2{,}1 \cdot 10^{-25}.$$

([4]) Essendo, per ogni n, $A_n(x)$ pari e $B_n(x)$ dispari, per il calcolo di tali polinomi (di cui, si osservi, quello di grado n col coefficiente di modulo 1 per la potenza massima della variabile), scritto $B_n(x)$ nella forma $x . B_n^*(x)$ e posto $x^2 = y$, conviene ricondurci a quello dei due polinomi $A_n(\sqrt{y})$, $B_n^*(\sqrt{y})$.