EINE NEUE KLASSE VON MÖBIUS m-STRUKTUREN (*)

von WERNER HEISE (in Hannover) (**)

Herrn Prof. THEODOR KALUZA zum 60. Geburtstag gewidmet

SOMMARIO. - *Con ricorrenza transfinita si definisce una classe di m-spazi di Möbius ovoidali. Per ogni coppia di interi $m, n > 0$ ed ogni spazio affine desarguesiano infinito A di dimensione n esiste un m-spazio di Möbius ovoidale ad n dimensioni, il cui spazio affine dedotto risulta isomorfo ad A. In particolare, il piano affine desarguesiano sopra il corpo complesso o dei quaternioni può essere chiuso, mediante aggiunta di un punto, in un piano di Möbius ovoidale.*

SUMMARY. - *A class of ovoidal Möbius m-spaces is defined by transfinite recursion. For all integers $m, n > 0$ and all infinite desarguesian affine spaces A of dimension n there is a n-dimensional ovoidal Möbius m-space the derived affine space of which is isomorphic to A. A special result is the hitherto unknown fact, that the desarguesian affine plane over the field of complex numbers or the quaternions may be closed by one point to an ovoidal Möbius plane.*

R. PERMUTTI definierte in [5] und [6] den Begriff der Möbius m-Struktur und bestimmte alle Modelle der Ordnung 2. In [3] wurde eine Möbius 2 — und 3 — Struktur der Ordnung 3 mit Hilfe ihrer Automorphismengruppe, der Mathieuschen Gruppe M_{12} bzw. M_{11} gefunden. Entsprechend der Ausweitung des Begriffs der Möbiusebene auf höhere Dimensionen [2] wurden in [3] auch räumliche Strukturen betrachtet, die im ebenen Fall den Möbius m-Strukturen entsprechen. A BARLOTTI gab in [1] zwei umfangreiche Klassen

(*) Pervenuto in Redazione il 24 agosto 1970.
(**) Indirizzo dell'Autore: Lehrstuhl für Geometrie der Technischen Universität — 3 Hannover, Welfengarten 1 (West Deutschland).

von unendlichen Möbius m-Strukturen an. In dieser Note wird mit Hilfe einer — der von N. KRIER in [4] zur Suche von Ovalen in « unendlichen Räumen » benutzten ähnlichen — Methode eine neue Klasse von Möbius m-Strukturen beschrieben.

Die dieser Arbeit zugrundeliegende Idee entnahm ich einer unveröffentlichten Note von TH. KALUZA, in der er ein Problem löste, das ich am 8.6.1970 in einem Vortrag im Mathematischen Kolloquium der Technischen Universität Hannover erwähnte. Ich möchte Herrn Prof. TH. KALUZA an dieser Stelle nochmals sehr herzlich dafür danken.

1. Grundlengende Begriffe und Tatsachen (1).

Es sei $m \geq 0$ eine natürliche Zahl. Ein Paar $(P, \mathfrak{K})$, bestehend aus einer Menge $P = \{p, q, ...\}$ von Punkten und einer Teilmenge der Potenzmenge von P, der Menge $\mathfrak{K} = \{K, L, ...\}$ der *Kurven*, heisst *m-Kurvenraum*, wenn gilt:

(M1) *Zu $m+2$ verschiedenen Punkten aus P gibt es genau eine sie enthaltende Kurve aus $\mathfrak{K}$.*

Eine Teilmenge $T \subset P$, die mit je $m+2$ verschiedenen Punkten auch deren Verbindungskurve enthält, wird als *Teilraum* bezeichnet. Eine Menge $M \subset T$ heisst *Erzeugendensystem* von T, wenn T der kleinste Teilraum ist, der M umfasst. Ist M ein *unabhängiges*, d. h. minimales Erzeugendensystem von T, so nennen wir M eine *Basis* von T. Ein Teilraum eines m-Kurvenraumes $(P, \mathfrak{K})$, der eine Basis von der Mächtigkeit $m+3$ besitzt, heisst *Fläche*.

Die Menge aller Kurven aus $\mathfrak{K}$, die eine Teilmenge $N \subset P$ enthalten, bezeichnen wir mit $\mathfrak{K}(N)$. Ist M eine Menge, so sei $|M|$ ihre Kardinalzahl (Mächtigkeit).

Ein m-Kurvenraum $(P, \mathfrak{K})$ heisst *Möbius m-Struktur*, wenn gilt:

(M2) *Es sei $K \in \mathfrak{K}$, $M \subset K$ mit $|M| = m$ und $p \in P \setminus K$. Dann gibt es genau eine Kurve $L \in \mathfrak{K}$ mit $p \in L$ und $K \cap L = M$.*

(M3) *Es gibt $m+3$ Punkte, die nicht alle auf einer Kurve liegen. Jede Kurve enthält mindestens m Punkte.*

(1) Beweise und nähere Einzelheiten sind in [3], [5] oder [6] zu finden.

Ein m-Kurvenraum $(P, \mathfrak{A})$, in dem jede Fläche eine Möbius m-Struktur ist und dessen Kurven je mindestens $m+4$ Punkte enthalten, heisst *Möbius m-Raum.* Ist T ein Teilraum eines Möbius m-Raumes $(P, \mathfrak{A})$ und $U \subset T$ eine unabhängige Menge, so gibt es eine Basis B von T mit $U \subset B$. Je zwei Basen von T sind gleichmächtig. Die Kardinalzahl $|B| - (m+1)$ heisst *Dimension* von T. Ein Teilraum $H \neq P$ von $(P, \mathfrak{A})$ heisst *Hyperfläche,* wenn es ein $p \in P$ gibt, so dass $H \cup \{p\}$ ein Erzeugendensystem von P ist. Eine Teilmenge $Q \subset P$ eines Möbius m-Raumes $(P, \mathfrak{A})$ heisst *Ovoid*, wenn gilt:

1) *Es liegen $m+1$ verschiedene Punkte auf Q.*
2) *Keine Kurve aus $\mathfrak{A}$ hat mit Q mehr als $m+2$ Punkte gemeinsam.*
3) *Für jede Teilmenge $M \subset Q$ mit $|M| = m+1$ ist die mengentheoretische Vereinigung aller derjenigen Kurven von $\mathfrak{A}$, die mit Q genau die Menge M gemeinsam haben, eine Hyperfläche.*

Die Punktmenge eines Ovoids Q in einem Möbius m-Raum $(P, \mathfrak{A})$ bildet bezüglich der Schnitte des Ovoids mit denjenigen Flächen aus P, die mit Q mindestens $m+3$ Punkte gemeinsam haben, als Kurven einen Möbius $(m+1)$-Raum.

2. Existenzsatz.

Es sei $(P, \mathfrak{A})$ ein endlich-dimensionaler Möbius-m-Raum der transfiniten Kardinalität $\aleph_\alpha$. In einer festgelegten Wohlordnung $<$ von $\mathfrak{A} = (K_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ des Typs ω_α sei K_0 das kleinste Element. T_0 sei eine Teilmenge von K_0 der Mächtigkeit $m+1$. H_0 sei eine Hyperfläche von $(P, \mathfrak{A})$ mit $K_0 \subset H_0$. Wir setzen $C_0 = H_0 \setminus T_0$. Indem wir abkürzend $T_\lambda^* = \bigcup_{0 \leq \mu < \lambda} T_\mu$ und $C_\lambda^* = \bigcup_{0 \leq \mu < \lambda} C_\mu$ schreiben, definieren wir für $\lambda > 0$ durch transfinite Rekursion:

$$T_\lambda = T_\lambda^* \cup T_\lambda' \text{ und } C_\lambda = C_\lambda^* \cup C_\lambda'$$

wobei T_λ' und C_λ' wie folgt konstruiert sind:

1) Falls K_λ in $T_\lambda^* \cup C_\lambda^*$ enthalten ist, so setzen wir $T_\lambda' = C_\lambda' = \emptyset$.
2) Ist $K_\lambda \not\subset T_\lambda^* \cup C_\lambda^*$, aber gilt $|K_\lambda \cap T_\lambda^*| \neq m+1$, so sei $T_\lambda' = \emptyset$ und $C_\lambda' = K_\lambda \setminus T_\lambda$.
3) Wenn schliesslich K_λ mit T_λ^* genau $m+1$ Punkte gemeinsam hat, so wählen wir einen Punkt $p \in K_\lambda \setminus (T_\lambda^* \cup C_\lambda^*)$ und definieren $T_\lambda' = \{p\}$. Weil nun $|T_\lambda| < \aleph_\alpha$ gilt, ist es uns möglich zu

jeder Menge $M \subset T_\lambda$ mit $|M| = m + 1$ und $p \in M$ eine Hyperfläche auszuwählen, die mit T_λ genau die Punkte von M gemeinsam hat. Es sei nun H_M die mengentheoretische Vereinigung aller dieser Hyperflächen. Wir definieren:

$$C'_\lambda = (H_M \cup \{K \in \mathfrak{K} ; | K \cap T_\lambda | = m + 2\}) \setminus T_\lambda .$$

Wie man sich leicht überlegt, ist $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} T_\lambda$ ein Ovoid in $(P, \mathfrak{K})$. Wir haben also folgenden Satz bewiesen:

Es seien $m, n > 0$ zwei natürliche Zahlen und $(A, \mathfrak{G})$ ein n-dimensionaler desarguesscher affiner Raum (Möbius 0-Raum) mit $|A| \geq \aleph_0$. Dann gibt es einen ovoidalen Möbius m-Raum $(P, \mathfrak{K})$ derart, dass für jede Teilmenge $M \subset P$ mit $|M| = m$ der affine Raum $(P \setminus M; \mathfrak{K}(M))$ zu $(A, \mathfrak{G})$ isomorph ist.

Für endliche Kardinalzahlen ist dieser Satz nicht richtig. In [3] wurde gezeigt, dass jeder mindestens 3-dimensionale Möbius m-Raum endlicher Ordnung ein affiner Raum sein muss. Eine bemerkenswerte Konsequenz des Satzes ist die Existenz von ovoidalen Möbiusebenen, deren abgeleitete Struktur die affine Koordinatenebene über den komplexen Zahlen oder den Quaternionen ist. Es liegt die Vermutung nahe, dass jeder zumindest dreidimensionale Möbius m-Raum sich als Ovoid in einen Möbius $(m - 1)$-Raum einbetten lässt. Eine interessante Aufgabe wäre es, die ovoidalen Möbius m-Räume und Strukturen weiter durch Schliessungssätze und topologische Eigenschaften zu klassifizieren.

LITERATUR

[1] BARLOTTI, A.: *Sulle m-strutture di Möbius.* Rend. Ist. di Matem. Univ. di Trieste, 1 (1969), 35-46.

[2] HEISE, W.: *Eine Definition des Möbiusraumes.* Manuscr. Math., 2 (1970), 39-47.

[3] HEISE, W. und J. TIMM: *n-affine Räume.* Ersch. demn. in Manuscr. Math.

[4] KRIER, N.: *Ovals in infinite Spaces.* Proc. project. geom. Conference. University of Illinois, Chicago 1967, 87-90.

[5] PERMUTTI, R.: *Una generalizzazione dei piani di Möbius.* Le Matematiche, 22 (1967), 360-374.

[6] PERMUTTI, R.: *Sulle m-strutture ovoidali di Möbius.* Le Matematiche, 23 (1968), 50-59.