SEMINORME DI BEPPO LEVI E MISURE ESTERNE AD ESSE ASSOCIATE (*)

di MARIO A. PUGLISI (a Bari) (**)

SOMMARIO. - *Si prosegue lo studio dell'integrale connesso con un funzionale J subadditivo, omogeneo e crescente su un cono ereditario di funzioni positive. Si indaga poi sulle relative nozioni di misurabilità per insiemi e per funzioni.*

SUMMARY. - *We are carring on the study of the integral connected with a subadditive, homogeneous and encreasing functional J on a hereditary cone of positive functions. Relative notions of measurability for sets and functions have been investigated.*

Introduzione.

Nella presente Nota si prosegue lo studio delle proprietà dell'integrale dedotto da una seminorma di Beppo Levi nonchè dei concetti di misurabilità per funzioni e per insiemi ad esso connessi. Conviene segnalare subito che la denominazione di *seminorma di Beppo Levi* è stata introdotta, molto verosimilmente in modo non ortodosso, dallo scrivente in altra Nota (cfr. [8]: introduz. e [9] § 1) per designare una funzione reale J finitamente subadditiva, crescente e positivamente omogenea sopra un cono convesso ereditario $\mathcal{C}$ di funzioni reali positive, definite in un insieme E, soddisfacente una condizione di sequenziale continuità meglio precisata nel n. 1 del successivo § 1.

Attraverso la nozione di misurabilità ed alla conseguente nozione di integrabilità rispetto ad J, le quali si ispirano a quelle

(*) Pervenuto in Redazione il 31 marzo 1970.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Analisi matematica dell'Università — Via Nicolai 2 — 70121 Bari.

indicate da R. CAIROLI in [3], sul δ-anello degli insiemi integrabili rispetto ad J (§ 2: def. 1) viene introdotta la cosiddetta *misura canonicamente associata ad* J, denotata con μ_J. Si pone, allora, la questione di riconoscere sotto quali condizioni le funzioni integrabili rispetto ad J siano tutte e sole le funzioni integrabili rispetto a μ_J. Nel teor. 1 del § 2 si riconosce che ciò si viene a realizzare se e soltanto se è verificata la condizione seguente (cfr. ([1])):

$$f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J) \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J) \tag{1}$$

dove $\mathcal{L}^{(1)}\mathcal{C}, J)$ denota lo spazio di Riesz delle funzioni integrabili rispetto a J.

Ulteriormente, introdotta su un opportuno δ-anello ereditario di parti di E una misura esterna nel senso di Carathéodory μ_J^*, denominata *misura esterna canonicamente associata ad* J, ci si è posta la questione di riconoscere sotto quali condizioni gli insiemi misurabili nel senso di Carathéodory rispetto a μ_J^* sono tutti e soli gli insiemi misurabili rispetto a J (§ 3: def. 3). Ora, nel caso in cui sia verificata la condizione seguente

$$\varphi \in \mathcal{C} \Longrightarrow \exists\ \psi \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J) \ni' \varphi \leq \psi, J(\varphi) = J(\psi) \tag{2}$$

dove $\mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J)$ denota l'insieme delle funzioni misurabili positive rispetto a J, si riconosce che una condizione necessaria e sufficiente affinchè ciò accada è che risulti

$$1_E \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J). \tag{3}$$

Ciò viene provato nel teor. 1 del § 3 nel quale, attraverso una serie di caratterizzazioni, vengono dati ulteriori chiarimenti a riguardo, raffrontando le nozioni di misurabilità sopra indicate anche con una nozione di locale misurabilità introdotta nella def. 4 del medesimo § 3. Di più, sempre nell'ipotesi (2), la condizione (1) è necessaria e sufficiente affinchè le funzioni integrabili rispetto a J siano tutte e sole le funzioni integrabili rispetto alla misura ν_J dedotta dalla misura esterna μ_J^* ed in tal caso, per ogni f integrabile rispetto a J risulta

$$\int f d\mu_J = \int f d\nu_J .$$

Beninteso, non appena si riferiscano i risultati di cui sopra alla teoria del prolungamento di DANIELL-STONE, mentre da una parte si riottengono risultati ormai classici quali il teorema di rappresentazione indicato da G. AQUARO in [1], dall'altra si hanno informazioni relative alla *misura esterna canonicamente associata ad un integrale di Daniell*, intendendo con ciò la misura esterna canonicamente associata all'integrale superiore dedotto dal suddetto integrale di Daniell il quale, notoriamente (cfr. [9]), è una seminorma di Beppo Levi, nel senso sopra precisato, per la quale è verificata la condizione (2). A ciò, per comodità del Lettore, si fa rapidamente cenno alla fine dei successivi § 2 e 3.

§ 1. Funzioni misurabili e funzioni integrabili rispetto ad una seminorma di Beppo Levi e rispetto ad un integrale di Daniell.

Nel presente § si richiamano brevemente, per comodità del Lettore, le nozioni ed i risultati di cui si farà uso nel seguito.

1. Sia $\mathcal{C}$ *un cono convesso ereditario di funzioni reali positive* definite in un assegnato insieme E, cioè un insiemi di funzioni reali positive definite in E assoggettato alle condizioni seguenti [1]:

(1.1.1) $$\varphi \in \mathcal{C},\ \psi \in \mathcal{C} \Longrightarrow \varphi + \psi \in \mathcal{C},$$

(1.1.2) $$\varphi \in \mathcal{C},\ \alpha \in \mathbf{R},\ 0 \leq \alpha \Longrightarrow \alpha \cdot \varphi \in \mathcal{C},$$

(1.1.3) $$f \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R}),\ 0_E \leq f,\ \varphi \in \mathcal{C},\ f \leq \varphi \Longrightarrow f \in \mathcal{C}.$$

Sia, inoltre, J *una seminorma di Beppo Levi* su $\mathcal{C}$ cioè (cfr. [8], introduz.) una funzione reale definita in $\mathcal{C}$ assoggettata alle condizioni seguenti:

(1.1.4) $$\varphi \in \mathcal{C},\ \psi \in \mathcal{C} \Longrightarrow J(\varphi + \psi) \leq J(\varphi) + J(\psi),$$

(1.1.5) $$\varphi \in \mathcal{C},\ \alpha \in \mathbf{R},\ 0 \leq \alpha \Longrightarrow J(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot J(\varphi),$$

(1.1.6) $$\varphi \in \mathcal{C},\ \psi \in \mathcal{C},\ \varphi \leq \psi \Longrightarrow J(\varphi) \leq J(\psi),$$

(1.1.7) *se* $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *è una successione monotona crescente convergente di elementi di* $\mathcal{C}$ *e se la successione numerica* $(J(\varphi_n))_{n \in \mathbf{N}}$ *è maggiorata, risulta*

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n \in \mathcal{C} \quad e \quad J(\lim_{n \to \infty} \varphi_n) = \lim_{n \to \infty} J(\varphi_n).$$

(1) Qui e nel seguito si denota con $\mathcal{F}(E, \mathbf{R})$ la totalità delle funzioni reali definite in E mentre, con 0_E e, successivamente, con 1_E si denotano, rispettivamente, le funzioni reali definite in E di costante valore 0 e 1.

Dopo ciò, una funzione reale *positiva* f definita in E dicesi *misurabile rispetto a* J se e solo se è verificata la condizione seguente (cfr. [8]: § 1, def. 1)

$$(1.1.8) \qquad \varphi \in \mathcal{C} \Longrightarrow J(\varphi) = J(\inf(\varphi, f)) + J(\varphi - \inf(\varphi, f)).$$

Denotato con $\mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J)$ l'insieme delle funzioni positive misurabili rispetto a J, si riconosce che (cfr. [8]: § 1, n. 1, osserv. 1, prop. 1, 2 e 3)

$$(1.1.9) \qquad f \in \mathcal{C},\ J(f) = 0 \Longrightarrow f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J),$$

$$(1.1.10) \qquad f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J),\ g \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J) \Longrightarrow f + g \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J),$$

$$(1.1.11) \qquad f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J),\ g \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J) \Longrightarrow \inf(f, g) \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J),$$

$$(1.1.12) \qquad f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J),\ \alpha \in \mathbf{R},\ 0 \leq \alpha \Longrightarrow \alpha \cdot f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J),$$

$$(1.1.13) \qquad f \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J),\ g \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J),\ f \leq g \Longrightarrow g - f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J),$$

(1.1.14) *se* $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *è una successione monotona crescente convergente di funzioni positive misurabili rispetto a* J, *risulta anche*

$$\lim_{n \to \infty} f_n \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J).$$

Ulteriormente, introdotta la nozione di misurabilità per funzioni di segno qualunque chiamando misurabile rispetto a J una funzione reale f definita in E ogniqualvolta la sua parte positiva f^+ e la sua parte negativa f^- sono misurabili rispetto a J e denotato con $\mathcal{M}(\mathcal{C}, J)$ l'insieme delle funzioni misurabili rispetto a J, si dice che una funzione reale f definita in E è *integrabile rispetto a* J se e solo se risulta $|f| \in \mathcal{C}$ e $f \in \mathcal{M}(\mathcal{C}, J)$.

Denotato con $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ l'insieme delle funzioni integrabili rispetto a J, si riconosce che (cfr. [8]: § 1, prop. 4)

(1.1.15) $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ *è uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in* E.

Da ultimo, denotata con $J^{(1)}$ la funzione reale definita nel modo seguente

$$(1.1.16) \qquad \forall f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J): J^{(1)}(f) = J(f^+) - J(f^-),$$

si riconosce che (cfr. [8]: § 1)

$$f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J),\ 0_E \leq f \Longrightarrow J^{(1)}(f) = J(f) \tag{1.1.17}$$

e, inoltre, che $J^{(1)}$ è un *integrale di Daniell* su $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ per il quale sono verificati il teorema della convergenza monotona e, conseguentemente, il teorema della convergenza maggiorata.

2. Sia $\mathcal{R}$ uno *spazio di Riesz di funzioni reali* definite in E e sia I un *integrale di Daniell* su $\mathcal{R}$. Seguendo il procedimento indicato da G. AQUARO in [1], denotiamo con $\mathcal{R}^*(I)$ l'insieme definito nel modo seguente

$$\mathcal{R}^*(I) = \{ f \in \mathcal{F}(E, \mathbf{R}) \mid \exists (f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{R}^{\mathbf{N}} \ni \forall\, n \in \mathbf{N} : f_n \leq f_{n+1},$$
$$|f| = \lim_{n \to \infty} (\inf |f|, f_n)), (I(f_n))_{n \in \mathbf{N}} \textit{ è maggiorata} \}.$$

Siffatto $\mathcal{R}^*(I)$ risulta uno spazio di Riesz ereditario di funzioni reali definite in E includente $\mathcal{R}$. Su $\mathcal{R}^*(I)$ si può, ulteriormente, definire un *integrale superiore* I^* chiamando, per ogni $f \in \mathcal{R}^*(I)$, con $I^*(f)$ l'estremo inferiore dell'insieme dei numeri reali ciascuno dei quali è del tipo $\lim_{n \to \infty} I(f_n)$ con $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{R}$ tale che $f = \lim_{n \to \infty} (\inf(f, f_n))$ e $(I(f_n))_{n \in \mathbf{N}}$ sia maggiorata.

Posto, inoltre, per ogni $f \in \mathcal{R}^* I), I_*(f) = -I^*(-f)$, risulta $I_*(f) \leq I^*(f)$. Dopo ciò, detto *integrabile rispetto ad* I ogni elemento f di $\mathcal{R}^*(I)$ tale che $I_*(f) = I^*(f)$, si perviene a costruuire l'insieme $\mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$ delle funzioni integrabili rispetto ad I il quale, a sua volta, risulta uno spazio di Riesz includente $\mathcal{R}$ mentre, posto, per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$, $I_1(f) = I^*(f) = I_*(f)$, I_1 risulta l'unico prolungamento di I ad $\mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$ e, per esso, sono verificati il teorema della convergenza monotona, prima, ed il teorema della convergenza maggiorata, poi.

La nozione di misurabilità rispetto ad I viene introdotta chiamando *misurabile* (secondo Stone) *rispetto ad* I una funzione reale f definita in E se e solo se essa è misurabile secondo Stone rispetto ad $\mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$ nel senso della def. 1 del § 3 di [6]. L'insieme $\mathcal{S}(\mathcal{R}, I)$, delle funzioni misurabili rispetto ad I che così si viene ad ottenere, essendo $\mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$ uno spazio di Riesz-Lebesgue (cfr. [6]: § 1: def. 5), risulta uno spazio di Riesz chiuso rispetto al passaggio al limite delle successioni convergenti (cfr. [6]: § 3, coroll. 2).

§ 2. Teorema di rappresentazione.

In quanto segue $\mathcal{C}$ e J sono quelli del n. 1 del § 1.

1. Premettiamo alcuni lemmi:

LEM. 1. *Se f è un'arbitraria funzione reale definita in E, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$,

b) $\exists f' \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J) \exists f'' \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J) \ni' f' \leq f \leq f'', J^{(1)}(f') = J^{(1)}(f'')$.

Inoltre, vera a) o, equivalentemente, b), risulta

$$J^{(1)}(f) = J^{(1)}(f') = J^{(1)}(f''). \tag{2.1.1}$$

DIM. Poichè, evidentemente, se è vera *a*) è vera *b*) e, conseguentemente la (2.1.1.), basta riconoscere che *b*) $\Longrightarrow$ *a*). A tal fine siano f' ed f'' quelle previste in *b*). È, allora, $0_E \leq f'' - f \leq \leq f'' - f' \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ donde, essendo $f'' - f' \in \mathcal{C}$, consegue che (cfr. (1.1.3))

$$f'' - f \in \mathcal{C} \tag{2.1.2}$$

e, inoltre, $0 \leq J(f'' - f) \leq J(f'' - f') = J^{(1)}(f'' - f') = 0$ donde

$$J(f'' - f) = 0. \tag{2.1.3}$$

Da (2.1.2) e (2.1.3), a causa di (1.1.9) consegue $f'' - f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J)$ e anche, ancora per (2.1.2), $f'' - f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ da cui $f = f - f'' + + f'' \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$.

LEM. 2. *Sia $\mathcal{R}$ uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E e sia I un integrale di Daniell su $\mathcal{R}$. Si supponga, inoltre, che $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ e che per ogni $g \in \mathcal{R}$ risulti $J^{(1)}(g) = I(g)$. Allora, se f è un arbitrario elemento di $\mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$ ed f' e f'' sono elementi di $\mathcal{R}$ tali che $f' \leq f \leq f''$, risulta anche*

$$f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J) \ e \ J^{(1)}(f) = I_1(f). \tag{2.1.4}$$

DIM. Siano f, f' ed f'' quelle previste nell'asserto e sia $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$. Essendo $f' \leq f$ e tenuto conto delle definizioni di I^* e I_1, esiste, allora, una successione monotona crescente $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di elementi di $\mathcal{R}$ tale che per ogni $n \in \mathbf{N}$ si abbia $f' \leq f_n$ e, inoltre,

$$f = \lim_{n \to \infty} (\inf (f, f_n)) \ e \ \lim_{n \to \infty} I(f_n) < I_1(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.5}$$

Si ponga, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $h''_n = \inf(f'', f_n)$. La $(h''_n)_{n \in \mathbf{N}}$ risulta, evidentemente, una successione monotona crescente di elementi di $\mathcal{R}$ e, quindi, di $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$. Si ha, inoltre, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $h''_n \leq f''$ e, inoltre, per la (2.1.5),

$$J^{(1)}(h''_n) = I(h''_n) \leq I(f_n) < I_1(f) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1.6}$$

Dopo ciò, posto $h'' = \lim_{n \to \infty} h''_n$, risulta $h'' \leq f''$ e, per la (2.1.5),

$$f \leq \lim_{n \to \infty} (\inf(f'', f_n)) = h''.$$

Ulteriormente, essendo maggiorata, a causa di (2.1.6), la successione numerica $(J^{(1)}(h''_n))_{n \in \mathbf{N}}$, risulta

$$h'' \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J) \ \ e \ \ J^{(1)}(h'') = \lim_{n \to \infty} J^{(1)}(h''_n) < I_1(f) + \varepsilon.$$

Da quanto sopra, a causa dell'arbitrarietà di ε, consegue che esiste una successione, che si può supporre monotona decrescente, $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di elementi di $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ tale che

$$\forall\, n \in \mathbf{N} : f \leq h_n \leq f'', J^{(1)}(h_n) < I_1(f) + \frac{1}{n+1},$$

e, quindi, posto $h = \lim_{n \to \infty} h_n$, risulta $h \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ e, inoltre,

$$f \leq h \ \ e \ \ J^{(1)}(h) \leq I_1(f). \tag{2.1.7}$$

Analogamente, essendo $-f'' \leq -f \leq -f'$, esiste $k \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ tale che

$$-f \leq -k \ \ e \ \ J^{(1)}(-k) \leq I_1(-f). \tag{2.1.8}$$

Da (2.1.7) e (2.18) consegue, allora, che $k \leq f \leq h$ e, inoltre, $J^{(1)}(k) = I_1(f) = J^{(1)}(h)$. Pertanto, a causa del lemma precedente, risulta $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ e $J^{(1)}(f) = I_1(f)$.

Abbiamo, ora, i mezzi per dimostrare la seguente.

Prop. 1. *Se $\mathcal{R}$ è uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E ed I è un integrale di Daniell su $\mathcal{R}$, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) $\mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I) \subset \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$, $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I) : J^{(1)}(f) = I_1(f)$,

b) $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$, $\forall f \in \mathcal{R} : J^{(1)}(f) = I(f)$.

DIM. Poichè, evidentemente, $a) \Longrightarrow b)$, basta riconoscere che $b) \Longrightarrow a)$. A tal fine sia vera la $b)$ e sia f un arbitrario elemento positivo di $\mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$. Esiste, allora, una successione monotona crescente $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di elementi positivi di $\mathcal{R}$ tale che $f = \lim\limits_{n \to \infty} (\inf(f, f_n))$. Dopo ciò, essendo, per ogni $n \in \mathbf{N}$, $0_E \leq \inf(f, f_n) \leq f_n$ con $\inf(f, f_n) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$, a causa del lemma precedente risulta $\inf(f, f_n) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ e $J^{(1)}(\inf(f, f_n)) = I_1(\inf(f, f_n))$ donde, convergendo (ad $I_1(f)$) la successione numerica $(I_1(\inf(f, f_n)))_{n \in \mathbf{N}}$, consegue $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ e

$$J^{(1)}(f) = \lim_{n \to \infty} J^{(1)}(\inf(f, f_n)) = \lim_{n \to \infty} I_1(\inf(f, f_n)) = I_1(f).$$

2. Si denoti, ora, con $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$ *l'anello associato* allo spazio di Riesz $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ delle funzioni integrabili rispetto ad J. In altri termini, si ponga, per definizione (cfr. [6]: § 3, prop. 1, def. 1) (2)

$$\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)\}.$$

OSSERVAZIONE 1. Essendo $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ uno spazio di Riesz-Lebesgue, a causa della prop. 3 del § 2 di [6] si ha che (3)

(2.2.1) $\quad \mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$ *è un δ-anello di parti di E.*

DEF. 1. *Si dice che una parte X di E è integrabile rispetto ad J se e solo se X appartiene al δ-anello $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$.*

Ulteriormente si ponga

(2.2.2) $$\forall X \in \mathfrak{A}(\mathcal{C}, J) : \mu_J(X) = J^{(1)}(\varphi_X).$$

OSSERVAZIONE 2. Tenuto conto che $J^{(1)}$ è un integrale di Daniell su $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$, si ha che

(2.2.3) $\quad \mu_J$ *è una misura su* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$.

(2) Per ogni parte X di E si denota con φ_X la *funzione caratteristica* di X.

(3) Per le definizioni di anello, δ-anello, σ-anello e σ-algebra di parti di E si confronti ad es. [5].

Dopo ciò è giustificata la seguente

DEF. 2. *La funzione d'insieme* μ_J *definita in* (2.2.2) *prende il nome di misura canonicamente associata a* J.

Qui e nel seguito ci atterremo alla seguente convezione (cfr. ad es. [1], § 7):

CONVENZIONE 1. Se $\mathfrak{A}$ è un anello di parti di E, denotiamo con $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ lo spazio di Riesz delle funzioni semplici rispetto ad $\mathfrak{A}$. Se, poi, μ è una misura su $\mathfrak{A}$, denotiamo con I_μ l'integrale di Daniell canonicamente associato a μ, con $\mathcal{L}^1(\mathfrak{A}, \mu)$ lo spazio di Riesz delle funzioni integrabili rispetto a I_μ e, per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{A}, \mu)$, poniamo $\int f d\mu = (I_\mu)_1(f)$.

È di ovvia dimostrazione il seguente

LEM. 3. *Se* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$ *è l'anello degli insiemi integrabili rispetto a* J (def. 1) *e* μ_J *è la misura canonicamente associata a* J (def. 2), *risulta che* (conv. 1)

1⁰) $$\mathcal{R}(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)) \subset \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J),$$

2⁰) $$\forall f \in \mathcal{R}(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)) : J^{(1)}(f) = I_{\mu_J}(f).$$

Dal lemma precedente e dalla proposizione 1 consegue che

PROP. 2. *Se* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$ *è l'anello degli insiemi integrabili rispetto a* J (def. 1) *e* μ_J *è la misura canonicamente associata a* J (def. 2), *risulta che* (conv. 1)

1⁰) $$\mathcal{L}^1(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J), \mu_J) \subset \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J),$$

2⁰) $$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J), \mu_J) : J^{(1)}(f) = \int f d\mu_J.$$

3. Richiamiamo un teorema di approssimazione di cui in [6], che dovremo qui appresso adoperare, dando qualche ulteriore chiarimento a riguardo.

PROP. 3. *Sia* $\mathcal{L}$ *uno spazio di Riesz-Lebesgue di funzioni reali definite in* E *e sia* $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ *il* δ*-anello ad esso associato* (cfr. [6]: § 1, def. 5 e § 3, prop. 1, def. 1). *Allora, se* $\mathcal{S}(\mathcal{L})$ *è lo spazio di Riesz* *delle funzioni misurabili secondo Stone rispetto ad* $\mathcal{L}$ (cfr [6] : § 3, def. 1), *le seguenti quattro proprietà sono equivalenti* :

$$a) \qquad f \in \mathcal{L} \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L},$$

b) ogni elemento positivo di $\mathcal{L}$ *è il limite di una successione monotona crescente di funzioni positive semplici rispetto ad* $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$,

$$c) \qquad 1_E \in \mathcal{S}(\mathcal{L}),$$

$$d) \qquad f \in \mathcal{S}(\mathcal{L}) \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{S}(\mathcal{L}).$$

DIM. Poichè $a) \Longleftrightarrow c) \Longleftrightarrow d)$ (cfr. [6] : §3, prop. 5) e $a) \Longrightarrow b)$ (cfr. [6] : § 2, coroll. 1), vasta riconoscere che $b) \Longrightarrow c)$. A tal fine, sia vera $b)$ e si consideri $f \in \mathcal{L}$, $0_E \leq f$. Esiste, allora, una successione monotona crescente $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di elementi positivi di $\mathcal{R}(\mathfrak{A}_{\mathcal{L}})$ tale che $f = \lim_{n \to \infty} f_n$. È, quindi, $\inf(1_E, f) = \lim_{n \to \infty} (\inf(1_E, f_n))$ e poichè per ogni $n \in \mathbf{N}$ è ancora $\inf(1_E, f_n) \in \mathcal{R}(\mathfrak{A}_{\mathcal{L}})$ e, quindi, $\inf(1_E, f_n) \in \mathcal{L}$ nonchè $0_E \leq \inf(1_E, f_n) \leq f$, essendo $\mathcal{L}$ uno spazio di Riesz-Lebesgue consegue $\inf(1_E, f) \in \mathcal{L}$. Da ciò, a causa dell'arbitrarietà di f, consegue $1_E \in \mathcal{S}(\mathcal{L})$.

Abbiamo, ora, i mezzi per dimostrare il fondamentale

TEOR. 1. *Se* $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$ *è l'anello degli insiemi integrabili rispetto a* J (def. 1) *e* μ_J *è la misura canonicamente associata a* J (def. 2), *le seguenti due proprietà sono equivalenti* :

$$a) \qquad \mathcal{L}^1(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J), \mu_J) = \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J),$$

$$b) \qquad f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J) \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J).$$

Inoltre, vera a) o, equivalentemente, b), risulta che

$$\forall f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J) : J^{(1)}(f) = \int f d\mu_J. \tag{2.3.1}$$

DIM. Poichè per ogni $f \in \mathcal{R}(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J))$ risulta $\inf(1_E, f) \in \mathcal{R}(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J))$ e, conseguentemente, per ogni $f \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J), \mu_J)$ risulta $\inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J), \mu_J)$, è del tutto ovvio che $a) \Longrightarrow b)$.

Al fine di riconoscere che $b) \Longrightarrow a)$, supposta vera la $b)$, si consideri $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$, $0_E \leq f$. A causa di $b)$ e del risultato della prop. 3 esiste, allora, una successione monotona crescente $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di elementi positivi di $\mathcal{R}(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J))$ tale che $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Dopo ciò, essendo, a causa del lem. 3 e quale che sia $n \in \mathbf{N}$, $f_n \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ e $J^{(1)}(f_n) = I_{\mu_J}(f_n)$, la successione numerica $(I_{\mu_J}(f_n))_{n\in\mathbf{N}}$ e, quindi, la successione $\left(\int f_n \, d\mu_J\right)_{n\in\mathbf{N}}$ risulta maggiorata (da $J^{(1)}(f)$).

Pertanto si ha $f \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J), \mu_J)$ e, inoltre

$$\int f d\mu_J = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu_J = \lim_{n\to\infty} J^{(1)}(f_n) = J^{(1)}(f).$$

Quanto si è ora riconosciuto assieme al risultato della prop. 2 prova l'asserto.

Osservazione 1. La proprietà $b)$ del teorema precedente è verificata ogniqualvolta è verificata la condizione seguente

$$f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J) \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J), \tag{2.3.2}$$

o, più in particolare, la condizione

$$1_E \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J). \tag{2.3.3}$$

Allo scrivente non risulta che la (2.3.2) o la (2.3.3) equivalgano alla $b)$ del teorema precedente. Purtuttavia, nel successivo § 3 verrà indicato un caso particolare in cui le suddette equivalenze sussistono.

4. Sia, ora, $\mathcal{R}$ uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E e sia I un integrale di Daniell su $\mathcal{R}$. Posto $\mathcal{C} = \{f \in \mathcal{R}^*(I) \mid 0_E \leq f\}$ e denotata con J la restrizione di I^* a $\mathcal{C}$, siffatti $\mathcal{C}$ ed J verificano le proprietà da (1.1.1) a (1.1.7). Dopo ciò, se $\mathcal{S}(\mathcal{R}, I)$ è l'insieme delle funzioni misurabili secondo Stone rispetto ad I, risulta (cfr. [7]: n. 2, teor. 1) $\mathcal{S}(\mathcal{R}, I) = \mathcal{M}(\mathcal{C}, J)$ e, conseguentemente (cfr. [8]: § 2, teor. 6) $\mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I) = \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ e $I_1 = J^{(1)}$.

Dopo ciò, posto

$$\mathfrak{A}(\mathcal{R}, I) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)\}, \tag{2.4.1}$$

$$\forall\, X \in \mathfrak{A}(\mathcal{R}, I) : \mu_J(X) = I_1(\varphi_X), \tag{2.4.2}$$

risulta anche $\mathfrak{A}(\mathcal{R}, I) = \mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$, $\mu_I = \mu_J$. Pertanto, il risultato del teorema 1 dà luogo al

COROLL. 1. *Sia $\mathcal{R}$ uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E e sia I un integrale di Daniell su $\mathcal{R}$. Allora, se $\mathfrak{A}(\mathcal{R}, I)$ e μ_I sono quelli definiti in* (2.4.1) *e* (2.4.2), *le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

$$a) \qquad \mathcal{L}^1(\mathfrak{A}(\mathcal{R}, I), \mu_I) = \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I),$$

$$b) \qquad f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I) \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I).$$

Inoltre, vera a) o, equivalentemente, b) risulta che

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I) : I_1(f) = \int f d\mu_I . \tag{2.4.3}$$

OSSERVAZIONE 1. Si ritrova, cosí, un ben noto risultato della teoria del prolungamento di Daniell-Stone di cui, ad es., in [1], in quanto, notoriamente, la proprietà *b*) del corollario precedente equivale alla condizione

$$f \in \mathcal{R} \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I). \tag{2.4.4}$$

§ 3. La misura esterna canonicamente associata a J.

In quanto segue $\mathcal{C}$ e J sono ancora quelli del n. 1 del § 1.

1. Dimostriamo il seguente

LEM. 1. *Posto* $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}} = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{C}\}$ *e, inoltre, per ogni* $X \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ $\mu_J^*(X) = J(\varphi_X)$, *risulta che:*

1⁰) $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ *è un anello ereditario (e, quindi, un δ-anello) di parti di E,*

2⁰) μ_J^* *è una misura esterna su* $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ (cfr. [2]: Cap. IV, § 3, n. 1).

DIM. È, intanto, $\emptyset \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$. Sia $Y \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ e sia $X \in \mathfrak{P}(E)$ tale che $X \subset Y$. Essendo $\varphi_X \leq \varphi_Y$ con $\varphi_Y \in \mathcal{C}$, a causa di (1.1.3) risulta $\varphi_X \in \mathcal{C}$ e, quindi, $X \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$. Se, poi, $X \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ e $Y \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$, essendo $\varphi_{X \cup Y} \leq \leq \varphi_X + \varphi_Y$ con $\varphi_X + \varphi_Y \in \mathcal{C}$, risulta $\varphi_{X \cup Y} \in \mathcal{C}$ e, quindi, $X \cup Y \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ mentre, essendo $X \cap Y \subset Y$ e $Y - X \subset Y$, per quanto sopra risulta $X \cap Y \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ e $Y - X \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$.

È, poi, evidentemente, $\mu_J^*(\emptyset) = 0$ e $\mu_J^*(X) \leq \mu_J^*(Y)$ se $X \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$, $Y \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ e $X \subset Y$. Se, infine, $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è una successione di elementi di $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$ tutti contenuti in un ulteriore elemento di $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$, a causa di (1.1.4) e (1.1.7), risulta

$$\mu_J^*(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} X_n) = J(\sup_{n \in \mathbf{N}} \varphi_{X_n}) = J(\sup_{n \in \mathbf{N}}(\sup_{0 \leq k \leq n} \varphi_{X_k})) =$$

$$= \sup_{n \in \mathbf{N}}(J(\sup_{0 \leq k \leq n} \varphi_{X_k})) \leq \sup_{n \in \mathbf{N}}\left(\sum_{k=0}^{n} J(\varphi_{X_k})\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_J^*(X_n).$$

Dopo ciò è giustificata la seguente

DEF. 1. *Dicesi misura esterna canonicamente associata a J la funzione d'insieme μ_J^* definita nel lemma precedente.*

Sussiste l'ulteriore

DEF. 2. *Si dice che una parte X di E è misurabile rispetto a μ_J^* se e solo se è verificata la condizione seguente*

(3.1.1) $$A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \Longrightarrow \mu_J^*(A) = \mu_J^*(A \cap X) + \mu_J^*(A - X).$$

OSSERVAZIONE 1. Denotato con $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^*(J)$ l'insieme delle parti di E misurabili rispetto *a* μ_J^*, come è noto (cfr. ad es. [2]: Cap. IV, § 3, n. 2)

(3.1.2) $\mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^*(J)$ *è una σ-algebra di parti di E.*

Dopo ciò, posto

(3.1.3) $$\mathfrak{B}(\mathcal{C}, J) = \mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}^*(J),$$

risulta che

(3.1.4) $\mathfrak{B}(\mathcal{C}, J)$ *è un δ-anello di parti di E.*

OSSERVAZIONE 2. Poichè risulta che

$$X \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}, J),\ Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}, J),\ X \cap Y = \emptyset \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mu_J^*(X \cup Y) = \mu_J^*(X) + \mu_J^*(Y),$$

denotata con ν_J la funzione d'insieme definita nel modo seguente

(3.1.5) $$\forall X \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}, J) : \nu_J(X) = \mu_J^*(X),$$

risulta che (cfr. [2]: Cap. IV, § 3, n. 1)

$$\nu_J \text{ è una misura su } \mathcal{B}(\mathcal{C}, J). \tag{3.1.6}$$

Introduciamo l'ulteriore

DEF. 3. *Si dice che una parte X di E è misurabile rispetto a J se e solo se risulta $\varphi_X \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J)$.*

Qui e nel seguito denoteremo con il simbolo $\mathfrak{M}(\mathcal{C}, J)$ l'insieme delle parti di E misurabili rispetto a J.

OSSERVAZIONE 3. Evidentemente, risulta

$$\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J) = \mathfrak{A}_{\mathcal{C}} \cap \mathfrak{M}(\mathcal{C}, J). \tag{3.1.7}$$

OSSERVAZIONE 4. Risulta

$$\mathfrak{M}(\mathcal{C}, J) \subset \mathfrak{A}^*_{\mathcal{C}}(J). \tag{3.1.8}$$

Invero, se $X \in \mathfrak{M}(\mathcal{C}, J)$ e $A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$, si ha

$$\mu^*_J(A) = J(\varphi_A) = J(\inf(\varphi_A, \varphi_X)) + J(\varphi_A - \inf(\varphi_A, \varphi_X)) =$$

$$= J(\varphi_{A \cap X}) + J(\varphi_{A-X}) = \mu^*_J(A \cap X) + \mu^*_J(A - X).$$

OSSERVAZIONE 5. Da (3.1.3), (3.1.7) e (3.1.8) consegue che

$$\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{C}, J) \tag{3.1.9}$$

e, inoltre, tenuto conto delle definizioni di ν_J, μ^*_J e μ_J, che

$$\forall X \in \mathfrak{A}(\mathcal{C}, J): \nu_J(X) = \mu_J(X). \tag{3.1.10}$$

Sussiste, da ultimo, la seguente

DEF. 4. *Una parte X di E si dice localmente misurabile rispetto a J se e solo se essa è localmente misurabile, nel senso della* def. 1 *del* § 4 *di* [6], *rispetto al δ-anello $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$.*

OSSERVAZIONE 6. Denotato con $\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{C}, J)$ l'insieme delle parti di E localmente misurabili rispetto a J, a causa della prop. 2 del § 4 di [6] si ha che

(3.1.11) $\mathfrak{U}^{(l)}(\mathcal{C}, J)$ *è una σ-algebra di parti di E.*

2. Passiamo a riconoscere che

LEM. 2. *Se è verificata la condizione seguente*

$$(*) \qquad \varphi \in \mathcal{C} \Longrightarrow \exists\, \psi \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J) \ni' \varphi \leq \psi, J(\varphi) = J(\psi),$$

per un'arbitraria funzione reale positiva f definita in E le seguenti due proprietà sono equivalenti:

a) $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J)$,

b) $\varphi \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J) \Longrightarrow J(\varphi) = J(\inf(\varphi, f)) + J(\varphi - \inf(\varphi, f))$.

DIM. Evidentemente, $a) \Longrightarrow b)$. Si supponga, allora, vera la $b)$ e sia φ un arbitrario elemento di $\mathcal{C}$. A causa di (*) esiste, allora, $\psi \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J)$ tale che $\varphi \leq \psi$ e $J(\varphi) = J(\psi)$. Dopo ciò, essendo $\inf(\psi, f) - \inf(\varphi, f) \leq \psi - \varphi$, risulta $\varphi - \inf(\varphi, f) \leq \psi - \inf(\psi, f)$ e, quindi, essendo a causa di $b)$

$$J(\psi) = J(\inf(\psi, f)) + J(\psi - \inf(\psi, f)),$$

si ha $J(\inf(\varphi, f)) + J(\varphi - \inf(\varphi, f)) \leq J(\psi) = J(\varphi)$.

Dal lemma precedente consegue che

COROLL. 1. *Se è verificata la condizione* (*), *denotato con* $\mathcal{S}(\mathcal{C}, J)$ *l'insieme delle funzioni misurabili secondo Stone rispetto a* $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$, *si ha*

$$\mathcal{M}(\mathcal{C}, J) = \mathcal{S}(\mathcal{C}, J). \tag{3.2.1}$$

DIM. Invero, se f è un arbitrario elemento positivo di $\mathcal{S}(\mathcal{C}, J)$, per ogni $\varphi \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J)$ risulta $J(\varphi) = J(\inf(\varphi, f)) + J(\varphi - \inf(\varphi, f))$.

Abbiamo, ora, i mezzi per riconoscere il successivo

TEOR. 1. *Se è verificata la condizione* (*), *le seguenti proprietà sono equivalenti:*

a) $1_E \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J)$,

b) $f \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J) \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J)$,

c) $\quad f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J) \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$,

d) $\quad \mathfrak{A}^*_{\mathcal{C}}(J) = \mathfrak{M}(\mathcal{C}, J)$,

e) $\quad \mathfrak{M}(\mathcal{C}, J)$ *è una σ-algebra di parti di E*,

f) $\quad \mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{C}, J) = \mathfrak{M}(\mathcal{C}, J)$,

g) $\quad \mathcal{M}(\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{C}, J)) = \mathcal{M}(\mathcal{C}, J)$ (4).

DIM. $a) \Longrightarrow b)$ e $b) \Longrightarrow c)$ sono ovvie.

$c) \Longrightarrow d)$. Si supponga vera la $c)$ e sia X un arbitrario elemento di $\mathfrak{A}^*_{\mathcal{C}}(J)$. Allora, se $A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{C}}$, risulta $J(\varphi_A) = \mu^*_J(A) = \mu^*_J(A \cap X) + \mu^*_J(A - X) = J(\varphi_{A \cap X}) + J(\varphi_{A-X}) = J(\varphi_A \cdot \varphi_X) + J(\varphi_A \cdot (1_E - \varphi_X))$. Conseguentemente si ha che

$$(3.2.2) \qquad A \in \mathfrak{A}(\mathcal{C}, J) \Longrightarrow J^{(1)}(\varphi_A) = J(\varphi_A \cdot \varphi_X) + J(\varphi_A \cdot (1_E - \varphi_X)).$$

Sia, ora, χ un arbitrario elemento di $\mathcal{R}(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J))$. Esiste, allora, una famiglia finita $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ di numeri reali positivi ed una famiglia (finita) $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ di elementi di $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$ tale che $\chi = \sum_{\lambda \in L} a_\lambda \cdot \varphi_{A_\lambda}$. È, quindi, per (3.2.2),

$$J(\chi \cdot \varphi_X) + J(\chi \cdot (1_E - \varphi_X)) \leq$$
$$\leq \sum_{\lambda \in L} a_\lambda \cdot (J(\varphi_{A_\lambda} \cdot \varphi_X) + J(\varphi_{A_\lambda} \cdot (1_E - \varphi_X))) =$$
$$= \sum_{\lambda \in L} a_\lambda \cdot J^{(1)}(\varphi_{A_\lambda}) = J^{(1)}(\chi).$$

D'altra parte è $J^{(1)}(\chi) = J(\chi) \leq J(\chi \cdot \varphi_X) + J(\chi \cdot (1_E - \varphi_X))$ e, quindi, si ha che

$$(3.2.3) \qquad \chi \in \mathcal{R}(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)), 0_E \leq \chi \Longrightarrow J^{(1)}(\chi) = J(\chi \cdot \varphi_X) + J(\chi \cdot (1_E - \varphi_X)).$$

Sia, adesso, χ un arbitrario elemento positivo di $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$. A causa di $c)$ e della prop. 3 del § 2, esiste, allora, una successio-

(4) Con $\mathcal{M}(\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{C}, J))$ si denota l'insieme delle funzioni reali definite in E misurabili in senso classico rispetto alla σ-algebra $\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{C}, J)$ (cfr. [5]).

ne monotona crescente $(\chi_n)_{n \in \mathrm{N}}$ di elementi positivi di $\mathcal{R}(\mathfrak{U}(\mathcal{C}, J))$ tale che $\chi = \lim\limits_{n \to \infty} \chi_n$. Da qui, tenuto conto di (3.2.3), di (1.1.7) e della circostanza che $J^{(1)}$ è un integrale di Daniell, consegue che

$$J^{(1)}(\chi) = \lim_{n \to \infty} J^{(1)}(\chi_n) = \lim_{n \to \infty} J(\chi_n \cdot \varphi_X) + \lim_{n \to \infty} J(\chi_n \cdot (1_E - \varphi_X)) =$$
$$= J(\chi \cdot \varphi_X) + J(\chi \cdot (1_E - \varphi_X)).$$

Pertanto risulta che

$$\chi \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J),\, 0_E \leq \chi \Longrightarrow J^{(1)}(\chi) = J(\chi \cdot \varphi_X) + J(\chi \cdot (1_E - \varphi_X)) \tag{3.2.4}$$

e, conseguentemente, che

$$\chi \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J),\, 0_E \leq \chi \leq 1_E \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow J(\chi) = J(\inf(\chi, \varphi_X)) + J(\chi - \inf(\chi, \varphi_X)). \tag{3.2.5}$$

Sia, ancora, $\chi \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ e si supponga che $0_E \leq \chi \leq 1_E$. È,

$$\inf(\chi, \varphi_X) \in \mathcal{C} \tag{3.2.6}$$

e, quindi, a causa di $(*)$ esiste $\psi \in \mathcal{C} \cap \mathcal{M}_+(\mathcal{C}, J)$ tale che

$$\inf(\chi, \varphi_X) \leq \psi, \tag{3.2.7}$$

$$J(\inf(\chi, \varphi_X)) = J(\psi). \tag{3.2.8}$$

Da (3.2.7) consegue

$$\inf(\chi, \varphi_X) = \inf(\inf(\chi, \psi), \varphi_X) \tag{3.2.9}$$

e, quindi, tenuto conto di (3.2.8), $J(\psi) = J(\inf(\chi, \varphi_X)) = J(\inf(\inf(\chi, \psi), \varphi_X)) \leq J(\inf(\chi, \psi)) \leq J(\psi)$ donde

$$J(\inf(\chi, \psi)) = J(\inf(\inf(\chi, \psi), \varphi_X)). \tag{3.2.10}$$

D'altra parte è $\inf(\chi, \psi) \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ con $0_E \leq \inf(\chi, \psi) \leq 1_E$ e, quindi, a causa di (3.2.5),

$$J(\inf(\chi, \psi)) = J(\inf(\inf(\chi, \psi), \varphi_X) +$$
$$+ J(\inf(\chi, \psi) - \inf(\inf(\chi, \psi), \varphi_X))).$$

Da questa e da (3.2.10) consegue, allora, $J(\inf(\chi,\psi)-\inf(\inf(\chi,\psi),\varphi_X)))=0$ donde (cfr. (1.1.9))

$$\inf(\chi,\psi)-\inf(\inf(\chi,\psi),\varphi_X))\in\mathcal{M}_+(\mathcal{C},J)$$

e anche, essendo, per (3.2.9),

$$\inf(\chi,\varphi_X)=\inf(\chi,\psi)-(\inf(\chi,\psi)-\inf(\inf(\chi,\psi),\varphi_X)),$$

e tenuto conto di (3.2.1) o, se si vuole, di (1.1.13),

$$\inf(\chi,\varphi_X)\in\mathcal{M}_+(\mathcal{C},J)$$

e quest'ultima, assieme alla (3.2.6), prova che $\inf(\chi,\varphi_X)\in\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C},J)$.

Se, poi, χ è un arbitrario elemento positivo di $\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C},J)$, essendo $\inf(\chi,\varphi_X)=\inf(\inf(\chi,1_E),\varphi_X)$ ed essendo, ancora a causa di c), $\inf(\chi,1_E)\in\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C},J)$ con $0_E\leq\inf(\chi,1_E)\leq 1_E$, per il caso particolare precedentemente considerato risulta $\inf(\inf(\chi,1_E),\varphi_X)\in\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C},J)$ e, quindi, anche $\inf(\chi,\varphi)\in\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C},J)$. Dopo ciò, tenuto conto dell'arbitrarietà di χ, si può asserire che $\varphi_X\in\mathcal{S}(\mathcal{C},J)$ ovvero, per (3.2.1), che $\varphi_X\in\mathcal{M}_+(\mathcal{C},J)$ e, quindi, $X\in\mathfrak{M}(\mathcal{C},J)$.

Da quanto precede, a causa dell'arbitrarietà di X, consegue che $\mathfrak{A}^*_{\mathcal{C}}(J)\subset\mathfrak{M}(\mathcal{C},J)$ e ciò, tenuto conto di (3.1.8), prova la d).

$d)\Longrightarrow e)$. Consegue da (3.1.2).

$e)\Longrightarrow f)$. Infatti, se è vera la e), risulta $E\in\mathfrak{M}(\mathcal{C},J)$ ovvero $1_E\in\mathcal{M}_+(\mathcal{C},J)$ e, quindi, per (3.2.1), $1_E\in\mathcal{S}(\mathcal{C},J)$. Da ciò, a causa del teor. 2 del § 4 di [6], consegue che

$$\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{C},J)=\{X\in\mathfrak{P}(E)\mid\varphi_X\in\mathcal{S}(\mathcal{C},J)\}$$

donde, ancora per (3.2.1), $\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{C},J)=\mathfrak{M}(\mathcal{C},J)$.

$f)\Longrightarrow g)$. Infatti, se è vera la f), essendo per (3.1.11) $E\in\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{C},J)$, risulta $E\in\mathfrak{M}(\mathcal{C},J)$ ovvero $1_E\in\mathcal{M}_+(\mathcal{C},J)$ e, quindi, per (3.2.1), $1_E\in\mathcal{S}(\mathcal{C},J)$. Da ciò, a causa del coroll. 1 del § 4 di [6] e ancora per (3.2.1), consegue la g).

$g)\Longrightarrow a)$. Invero, essendo $E\in\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{C},J)$, risulta $1_E\in\mathcal{M}(\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{C},J))$.

Dal teorema precedente consegue il

COROLL. 1. *Se è verificata la condizione* (*), *le seguenti due proprietà sono equivalenti*

a) $\mathcal{L}^1(\mathfrak{B}(\mathcal{C},J),\nu_J)=\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C},J)$,

b) $f\in\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C},J)\Longrightarrow\inf(1_E,f)\in\mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C},J)$.

Inoltre, vera a) o, equivalentemente, b), risulta che

(3.2.11) $$\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J) = \mathfrak{B}(\mathcal{C}, J),\ \mu_J = \nu_J\,,$$

(3.2.12) $$\forall f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J) : J^{(1)}(f) = \int f d\,\nu_J = \left(\int f d\,\mu_J\right).$$

DIM. $a) \Longrightarrow b)$. È analoga alla $a) \Longrightarrow b)$ del teor. 1 del § 2.

$b) \Longrightarrow a)$. A causa di $b)$ e dell'equivalenza $c) \Longleftrightarrow d)$ del teorema precedente, risulta $\mathfrak{A}^*(\mathcal{C}, J) = \mathfrak{M}(\mathcal{C}, J)$ donde, tenuto conto di (3.1.3) e (3.1.7), $\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J) = \mathfrak{B}(\mathcal{C}, J)$. Essendo, poi, per ogni $X \in \mathfrak{A}(\mathcal{C}, J)$, $\mu_J(X) = J^{(1)}(\varphi_X) = J(\varphi_X) = \mu_J^*(X) = \nu_J(X)$, risulta anche $\mu_J = \nu_J$. Dopo ciò, essendo a causa di $b)$ e del teor. 1 del § 2 $\mathcal{L}^1(\mathfrak{A}(\mathcal{C}, J), \mu_J) = \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ e per ogni $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$, $J^{(1)}(f) = \int f d\,\mu_J$, risulta $\mathcal{L}^1(\mathfrak{B}(\mathcal{C}, J), \nu_J) = \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$ e, per ogni $f \in \mathcal{L}^{(1)}(\mathcal{C}, J)$, $J^{(1)}(f) = \int f d\,\nu_J$.

3. Siano, ora, come nel n. 4 del § 2, $\mathcal{R}$ uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E ed I un integrale di Daniell su $\mathcal{R}$. Si ponga

$$\mathfrak{A}(R, I) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)\},$$

$$\forall X \in \mathfrak{A}(\mathcal{R}, I) : \mu_I(X) = I_1(\varphi_X),$$

$$\mathfrak{S}(\mathcal{R}, I) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{S}(\mathcal{R}, I)\},$$

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{R}^*(I)} = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \varphi_X \in \mathcal{R}^*(I)\},$$

$$\forall X \in \mathfrak{A}_{\mathcal{R}^*(I)} : \mu_I^*(X) = I^*(\varphi_X),$$

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{R}}^*(I) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \forall A \in \mathfrak{A}_{\mathcal{R}^*(J)} : \mu_I^*(A) = \mu_I^*(A \cap X) + \mu_I^*(A - X)\},$$

$$\mathfrak{B}(\mathcal{R}, I) = \mathfrak{A}_{\mathcal{R}^*(I)} \cap \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}^*(I),$$

$$\forall X \in \mathfrak{B}(\mathcal{R}, I) : \nu_I(X) = \mu_I^*(X),$$

$$\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{R}, I) = \{X \in \mathfrak{P}(E) \mid \forall A \in \mathfrak{A}(\mathcal{R}, I) : A \cap X \in \mathfrak{A}(\mathcal{R}, I)\}.$$

Per quanto si è notato nel n. 4 del § 2, a causa del lem. 1, di (3.1.2), (3.1.6), (3.1.8) e (3.1.11), si ha che

(3.3.1) $\mathfrak{A}_{\mathcal{R}^*(I)}$ *è un δ-anello ereditario di parti di E,*

(3.3.2) μ_I^* *è una misura esterna su* $\mathfrak{A}_{\mathcal{R}^*(I)}$,

(3.3.3) $\mathfrak{A}_{\mathcal{R}}^*(I)$ *è una σ-algebra di parti di E,*

(3.3.4) $\mathfrak{B}(\mathcal{R}, I)$ *è un δ-anello di parti di E,*

(3.3.5) ν_I *è una misura su* $\mathfrak{B}(\mathcal{R}, I)$,

(3.3.6) $\mathfrak{G}(\mathcal{R}, I) \subset \mathfrak{A}_{\mathcal{R}}^*(I)$,

(3.3.7) $\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{R}, I)$ *è una σ-algebra di parti di E.*

Sussiste il seguente

TEOR. 2. *Se $\mathcal{R}$ è uno spazio di Riesz di funzioni reali definite in E ed I è un integrale di Daniell su $\mathcal{R}$, le seguenti proprietà sono equivalenti :*

a) $f \in \mathcal{R} \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$,

b) $\mathfrak{A}_{\mathcal{R}}^*(I) = \mathfrak{G}(\mathcal{R}, I)$,

c) $\mathfrak{G}(\mathcal{R}, I)$ *è una σ-algebra di parti di E,*

d) $\mathfrak{G}(\mathcal{R}, I) = \mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{R}, I)$,

e) $\mathcal{S}(\mathcal{R}, I) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}^{(l)}(\mathcal{R}, I))$.

DIM. È ovvia conseguenza del teor. 2 non appena si tenga presente che nel caso in esame è verificata la condizione (*) del n. 2 (cfr. (1.20) di [7]).

Il coroll. 1 dà luogo, infine, al seguente

COROLL. 2. *Nelle ipotesi e con le notazioni del teorema precedente le seguenti due proprietà sono equivalenti :*

a) $\mathcal{L}^1(\mathfrak{B}(\mathcal{R}, I), \nu_I) = \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$,

b) $f \in \mathcal{R} \Longrightarrow \inf(1_E, f) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I)$.

Inoltre, vera a) o, equivalentemente, b), risulta

$$\mathfrak{A}(\mathcal{R}, I) = \mathfrak{B}(\mathcal{R}, I),\ \mu_I = \nu_J\,, \tag{3.3.8}$$

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{R}, I) : I_1(f) = \int f d\,\nu_I \left(= \int f d\,\mu_J\right). \tag{3.3.9}$$

BIBLIOGRAFIA

[1] AQUARO, G.: *Alcuni aspetti della teoria dell'integrale di Daniell-Stone*, « Conferenze del Seminario di Matematica dell'Università di Bari » (1965) (in corso di stampa).

[2] CAFIERO, F.: *Misura e Integrazione*, « Monografie Matematiche », Ed. Cremonese, Roma (1959).

[3] CAIROLI, R.: *Fonctions d'ensemble et Intégration*, 1, C. M. H., vol. 39 (1963).

[4] DINCULEANU, N.: *Vector Measures*, Veb. Deut. Ver. der Wiss., Berlin (1967).

[5] HALMOS, P. R.: *Measure theory*, Van Nostrand, New York (1954).

[6] PUGLISI, M. A.: *Misurabilità secondo M. H. Stone per funzioni reali ecc.*, « Le Matematiche », vol. XXI, fasc. 1, pp. 30-65 (1966).

[7] PUGLISI, M. A.: *Sopra una caratterizzazione delle funzioni misurabili secondo M. H. Stone, ecc.*, « Le Matematiche », vol. XXIV, fasc. 1, pp. 17-27 (1969).

[8] PUGLISI, M. A.: *Seminorme di Beppo Levi ed integrali di Daniell, ecc.*, « Ricerche di Matematica », vol. XVIII, fasc. 1, pp. 181-214 (1969).

[9] PUGLISI, M. A.: *Spazi seminormati di funzioni reali ecc.*, « Le Matematiche », vol. XXIV, fasc. 1, pp. 270-302 (1969).

[10] STONE, M. H.: *Notes on Integration*, I-III, Proc. Nat. Acad. Science U. S. A., vol. 34 (1948).