ÜBER DIE FIXPUNKTE DER SCHLICHTEN FUNKTIONEN (*)

von HANS HORNICH (in Wien) (**)

SOMMARIO. - *Indicata con f una funzione regolare univalente per $|z| < 1$, con $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, si esaminano i punti fissi di f con $f(z) = z$. Si costruisce lo spazio S di tutte le funzioni f; tale spazio, con un'opportuna metrica, è un continuo. L'insieme di tutte le f possedenti punti fissi non banali, è un insieme aperto in S.*

SUMMARY. - *If f is a regular and univalent function for $|z| < 1$, with $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, the fix-points of f with $f(z) = z$ are investigated. The space of all these functions is considered; it is with a suitable metric, a continuum. The set of all functions f wich have not trivial fix-points is an open set in S.*

Sei f eine reguläre schlichte Funktion im Einheitskreis D mit $|z| < 1$ und es sei $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Wenn für ein $\zeta \in D$ gilt $f(\zeta) = \zeta$, so ist ζ ein Fixpunkt von f. Der Punkt $\zeta = 0$ ist in trivialer Weise Fixpunkt von f. Die identische Funktion $f(z) = z$ hat jeden Punkt aus D als Fixpunkt.

Ist in der Entwicklung $f(z) = z + a_k z^k + \ldots$, $a_k \neq 0$, also a_k der erste nichtverschwindende Koeffizient mit $k \geq 2$, so liegen die nichttrivialen Fixpunkte von f ausserhalb eines Kreises um den Nullpunkt, dessen Radius nur von $|a_k|$ abhängt.

Aus $f(\zeta) - \zeta = 0$ folgt nämlich mit $\zeta \neq 0$

$$|a_k| \leq |a_{k+1}| |\zeta| + \ldots$$

(*) Pervenuto in Redazione il 21 marzo 1970.

(**) Indirizzo dell'Autore: Institut für Mathematik a. d. Technischen Hochschule — Wien IV, Karlsplatz 13.

Wegen der bekannten Abschätzung von Littlewood [4]

$$|a_n| < en,$$

gilt für einen Fixpunkt $\zeta \neq 0$

$$|a_k| < e(k+1)|\zeta| + e(k+2)|\zeta|^2 + \dots$$

$$= ek\frac{|\zeta|}{1-|\zeta|} + e\frac{|\zeta|}{(1-|\zeta|)^2}.$$

Die rechte Seite ist monoton wachsend mit $|\zeta|$ für $0 \leq |\zeta| < 1$; aus dieser Ungleichung folgt aber unsere Behauptung.

Wir geben nun eine Darstellung von f; setzt man

$$\frac{1}{f(z)} - \frac{1}{z} = B(z),$$

so ist $B(z)$ in D regulär; wegen der Schlichtheit von f auf D und wegen $f(0) = 0$ ist $\inf |f(z)| > 0$ für $|z| \to 1$ und $B(z)$ ist in D beschränkt.

Weiter gilt [2]

$$\inf |f(z)| \geq \frac{1}{4} \text{ für } |z| \to 1,$$

woraus

$$|B(z)| \leq 5$$

in D folgt.

Aus

$$f(z) = \frac{z}{1 + zB(z)}$$

folgt:

Die nichttrivialen Fixpunkte von f in D sind die von Null verschiedenen Nullstellen von B in D.

Für ein Polynom $P(z)$ ist die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{1 + czP(z)}$$

für hinreichend kleine Werte $|c|$ in D regulär und schlicht; die nichttrivialen Fixpunkte von f sind die in D gelegenen von Null verschiedenen Nullstellen von P.

Wir betrachten weiter den Raum S der in D regulären und schlichten Funktionen f mit $f(0)=0$, $f'(0)=1$. Eine Folge (f_n) aus S werde als konvergent bezeichnet, wenn für alle $z \in D$ punktweise Konvergenz der Folge $(f_n(z))$ besteht; damit ist S ein topologischer Raum.

S ist vollständig: dies folgt aus der gleichmässigen Beschränktheit der Funktionen $f \in S$ in jedem abgeschlossenen Bereich $\in D$ nach dem Vitalischen Satz und mit Hilfe des Satzes von Rouché.

Wir können S metrisieren, indem wir mit einem $0 < \eta < 1$ als Norm

$$\|f\|_\eta = \sup |\arg f'(z)| \quad \text{für } |z| = \eta,$$

und als Abstand der Funktionen $f, g \in S$ definieren:

$$d_\eta(f, g) = \sup_{|z|=\eta} |\arg f'(z) - \arg g'(z)|,$$

wobei $\arg f'(0) = \arg g'(0) = 0$ sei. Vgl. die Metrik in [2], [3].

Die Menge der Zahlen $d_\eta(f, g)$ ist bei festem η beschränkt. Die Konvergenz einer Folge (f_n) im Sinne dieser Metrik ist mit der oben erklärten Konvergenz identisch.

S ist kompakt.

Sei weiter σ, $0 < |\sigma| \leq 1$. Dann ist für jedes $f \in S$ auch $\dfrac{f(\sigma z)}{\sigma} = f_\sigma(z)$ in D regulär, schlicht, es ist $f_\sigma(0) = 0$, $f_\sigma'(0) = 1$, also $f_\sigma \in S$. Für $\sigma = 0$ setzen wir $f_0(z) = z$. Mit jeder Folge (σ_n), $\sigma_n \rightarrow \sigma_0$, $|\sigma_n| \leq 1$ ist auch $f_{\sigma_n} \rightarrow f_{\sigma_0}$. (Es ist $f_\sigma'(z) = f'(\sigma z)$). Da für jedes $f \in S$ auch der Bogen von Funktionen $\{f_t\}$, $0 \leq t \leq 1$, mit $f_1 = f$, $f_0(z) = z$, in S liegt, so ist S zusammenhängend, also ein Kontinuum, in dem je zwei Punkte durch Bogen verbindbar sind.

Sei nun P die Menge aller Funktionen $f \in S$, welche nichttriviale Fixpunkte haben; die identische Funktion $f(z) = z$ gehöre nicht zu P.

P ist eine in S offene Menge.

Ist nämlich $f \in P$, also etwa ζ ein nichttrivialer Fixpunkt von f: $f(\zeta) = \zeta$, $\zeta \neq 0$.

Wegen $f(z) = \dfrac{z}{1 + zB(z)}$ ist also $B(\zeta) = 0$;

sei $\delta > 0$, $\delta < |\zeta|$, $\delta < 1 - |\zeta|$ und δ so gewählt, dass $B(z) \neq 0$ für $|z - \zeta| = \delta$.

$B(z)$ hat mindestens eine Nullstelle für $|z - \zeta| < \delta$.

Wir bestimmen $\varepsilon > 0$ so klein, dass mit einem festen $0 < \eta < 1$ für alle $g \in S$ mit $d_\eta(f,g) < \varepsilon$ und mit $g(z) = \dfrac{z}{1 + zB_g(z)}$ gilt

$$|B(z) - B_g(z)| \leq \min_{|z_0 - \zeta| = \delta} |B(z_0)|$$

für alle $|z - \zeta| = \delta$.

Dann haben nach dem Satz von Rouchè die Funktionen $B(z)$ und $B_g(z)$ gleichviele Nullstellen für $|z - \zeta| < \delta$, also hat $B_g(z)$ von Null verschiedene Nullstellen für $|z - \zeta| < \delta$ und P ist offen in S.

Man erkennt, dass die identische Funktion $f(z) = z$ in S Häufungspunkt von Funktionen aus $S \setminus P$ ist: setzen wir z. B. $f_n(z) = z + \dfrac{1}{n} \cdot z^n$, $n > 2$, so ist $f_n \in S$ und $f_n \to f$; f_n enthält aber keine nichttrivialen Fixpunkte.

Andererseits gibt es beliebig nahe an $f(z) = z$ gelegene Funktionen $g_n \in S$, die nichttriviale Fixpunkte ζ_n, $g_n(\zeta_n) = \zeta_n$ mit $\zeta_n \to \zeta_0 \neq 0$, $|\zeta_0| < 1$, besitzen:

etwa $(n > 2)$

$$g_n(z) = z + \frac{1}{3n} \cdot z^n + \frac{1}{2(n+1)} \cdot z^{n+1}.$$

LITERATUR

[1] BIEBERBACH, L.: *Lehrbuch der Funktionentheorie* II (1931).

[2] HORNICH, H.: *Ein Banachraum analytischer Funktionen in Zusammenhang mit den schlichten Funktionen*, Mh. M. 73 (1969), 36-45.

[3] HORNICH, H.: *Über einen Banachraum analytischer Funktionen*, Manuscripta Math. 1, (1969), 79-86.

[4] LITTLEWOOD, J. E.: *Inequalities in the theory of functions*, Proc. London Math. Soc. 23 (1925), 481-519