SUL TEOREMA DI RADON-NIKODYM NEL CASO NON σ-FINITO. (*)

di ALESSIO VOLČIČ (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *In questo lavoro sono ripresi alcuni risultati di I. E. Segal, A. C. Zaanen e J. L. Kelley, riguardanti il teorema di Radon-Nikodym nel caso non σ-finito. Si dimostrano due teoremi* (*teorema* 3.1 *e teorema* 5.1) *che caratterizzano la validità del detto teorema con opportune condizioni sulla relazione tra gli insiemi che sono σ-finiti rispetto ad una misura ed un suo integrale indefinito qualunque.*

SUMMARY. - *In this paper we start from previous results obtained by I. E. Segal, A. C. Zaanen and J. L. Kelley on the Radon-Nikodym theorem in the non-σ-finite case. We prove two theorems* (*theorem* 3.1 *and theorem* 5.1) *characterizing the validity of the Radon-Nikodym theorem with proper conditions on sets, which are σ-finite with respect to a measure and its arbitrary indefinite integral.*

1. Questa nota reca, attraverso uno studio dettagliato, qualche contributo al teorema di Radon-Nikodym nel caso non σ-finito.

Vogliamo, innanzitutto, per evitare incertezze in chi legge, definire i concetti fondamentali, da cui parte la nostra ricerca, concetti, la cui presentazione varia sensibilmente da autore ad autore.

Una funzione d'insieme μ sopra un semianello si dirà una *misura* se è non negativa, numerabilmente additiva e nulla sull'insieme vuoto (μ può assumere anche il valore $+\infty$). Applicando

(*) Pervenuto in Redazione il 14 marzo 1970.

Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

il procedimento di estensione alla Carathéodory, la misura μ può essere prolungata alla σ-algebra di tutti gli insiemi μ-misurabili.

La terna $(S, \mathscr{A}, \mu)$ si dirà *spazio mensurale*, se $\mathscr{A}$ è la σ-algebra di tutti gli insiemi μ-misurabili su S. Un insieme $A \in \mathscr{A}$ si dirà *sommabile*, se $\mu(A) < +\infty$. Una funzione f, definita su tutto δ si dirà $(S, \mathscr{A})$-*misurabile*, se $\{x : f(x) < r\} \in \mathscr{A}$, $\forall r \in R$. Una funzione $(S, \mathscr{A})$-misurabile h si dirà *semplice*, se assume soltanto un numero finito di valori reali. Si potrà allora scrivere $h = \sum_1^n{}_i \alpha_i \chi_{E_i}$, dove con χ_{E_i} si sono indicate le funzioni caratteristiche degli insiemi E_i e gli α_i sono numeri reali diversi da zero. Una funzione semplice h si dirà *sommabile*, se $\mu\left(\bigcup_1^n{}_i E_i\right) < +\infty$ e si assumerà come suo integrale il numero reale $\int h\, d\mu = \sum_1^n{}_i \alpha_i \mu(E_i)$. Una funzione non negativa ed $(S, \mathscr{A})$-misurabile f si dirà *sommabile*, se risulta limite di una successione crescente di funzioni semplici sommabili $\{h_n\}$ a integrali superiormente limitati e si assumerà come suo integrale il numero reale $\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int h_n\, d\mu$. Una funzione non negativa ed $(S, \mathscr{A})$-misurabile f si converrà di chiamarla *integrabile* assumendo, se essa non è sommabile, $\int f d\mu = +\infty$.

Una funzione $(S, \mathscr{A})$-misurabile a segno variabile si dirà *sommabile*, se lo sono sia la sua parte positiva f^+ che la sua parte negativa f^- e si assumerà come suo integrale il numero reale $\int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$. Analogamente si definisce l'integrale per la classe più ampia delle funzioni $(S, \mathscr{A})$-misurabili *integrabili*, che sono quelle per le quali almeno una delle due funzioni f^+ ed f^- è sommabile.

Se f è una funzione integrabile, la funzione di figura $\psi(E) = \int_E f d\mu = \int f \cdot \chi_E\, d\mu$ si dice il suo *integrale indefinito*.

2. Dato uno spazio mensurale $(S, \mathscr{A}, \mu)$ ed una misura φ sulla σ-algebra $\mathscr{A}$, assolutamente continua rispetto a μ [1], ci si chiede

[1] Cioè per ogni $E \in \mathscr{A}$ per cui si ha $\mu(E) = 0$ si ha che $\varphi(E) = 0$.

se esista una funzione $(S, \mathscr{A})$-misurabile f, tale che risulti

$$\text{(A)} \qquad \varphi(E) = \int_E f d\mu, \qquad \forall\ E \in \mathscr{A}.$$

È noto (si veda, ad esempio, [3], cap. 1, teorema 14.11) che se μ è una misura finita o σ-finita, la risposta a tale problema è senz'altro affermativa.

Nel caso generale appare naturale procedere nel modo che segue: fissato un insieme μ-sommabile E, si considerano le due misure μ e φ ristrette alla σ-algebra $\mathscr{A} \cap E$. Esiste, per il teorema citato, una funzione f_E (unica a meno di una equivalenza rispetto alla μ) $(E, \mathscr{A} \cap E)$-misurabile (2) definita su E, tale che risulta

$$\text{(B)} \qquad \varphi(A) = \int_A f d\mu, \qquad \forall\ A \in \mathscr{A} \cap E.$$

In questo modo, ad ogni insieme μ-sommabile E viene a corrispondere una classe di funzioni misurabili $\mathscr{F}_E$, tra loro μ-equivalenti, con la ulteriore evidente proprietà che se E ed F sono due insiemi μ- sommabili ad intersezione non vuota e se $f_E \in \mathscr{F}_E$, $f_F \in \mathscr{F}_F$, $f_{F \cap E} \in \mathscr{F}_{E \cap F}$, allora si ha

$$\text{(C)} \qquad f_E \cdot \chi_F = f_F \cdot \chi_E = f_{E \cap F}, \qquad \mu\text{-quasi ovunque.}$$

Si può, fatte queste premesse, affermare che il problema posto è risolubile, se valgono le due seguenti proprietà:

(1) Ad ogni famiglia di classi di funzioni misurabili equivalenti $\mathscr{F}_E$ (una classe per ogni E μ-sommabile) che gode della proprietà (C) si può associare una funzione $(S, \mathscr{A})$-misurabile f, definita su tutto S, tale che si abbia, per ogni insieme μ-sommabile E

$$\text{(D)} \qquad \forall\ f_E \in \mathscr{F}_E \Longrightarrow f_E = f \cdot \chi_E, \qquad \mu\text{-quasi ovunque.}$$

(2) L'identità (A), che risulta vera, con questa f, per tutti gli insiemi μ-sommabili, risulta vera per tutti gli insiemi di $\mathscr{A}$.

(2) Se la pensiamo definita su tutto S, facendola nulla fuori di E, allora f è $(S, \mathscr{A})$-misurabile. Riterremo nel seguito di fare questa convenzione.

Bisognerà quindi, a questo punto, fare delle ipotesi sulle due misure μ e φ atte a realizzare le proprietà (1) e (2).

Alla questione (1) è già stata data una risposta esauriente (vedi [5] o [6]), nel modo che segue; poniamo la seguente definizione:

DEFINIZIONE: diremo che uno spazio mensurale $(S, \mathcal{A}, \mu)$ è localizzabile, se e solo se, per ogni famiglia $\mathcal{D}$ di insiemi μ-sommabili, esiste un insieme $G \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(D - G) = 0 \quad \forall D \in \mathcal{D}$ ed inoltre, se $H \in \mathcal{A}$ è tale che $\mu(D - H) = 0 \quad \forall D \in \mathcal{D}$, allora $\mu(G - H) = 0$ (3).

Sussiste allora il seguente

TEOREMA 2.1. *Le due seguenti proposizioni sono equivalenti:*

(a) *lo spazio mensurale* $(S, \mathcal{A}, \mu)$ *è locabizzabile*;

(b) *per ogni famiglia* $\{\mathcal{F}_E\}$ *di classi di funzioni* $(S, \mathcal{A})$*-misurabili, nulle fuori di un insieme* μ*-sommabile e soddisfacenti alla* (C), *esiste una funzione* $(S, \mathcal{A})$*-misurabile* f *tale che per essa valga la* (D) (4).

Per quanto riguarda la proprietà (2), si è data, in [5], soltanto una risposta parziale attraverso una condizione sufficiente, richiedendo che le due misure μ e φ siano prolungamenti di due misure finite sopra uno stesso semianello (5).

Questa ipotesi comporta (vedi [5] lemma 3.1 o anche [1], § 10, teorema A) che ogni insieme della σ-algebra $\mathcal{A}$ che è di misura μ σ-finita, è anche di misura φ σ-finita e viceversa.

Il seguente controesempio mostra come l'ipotesi non sia però necessaria:

Sia S un qualunque insieme sostegno non vuoto, $\mathcal{A}$ la σ-algebra «2» (cioè $\mathcal{A} = \{\emptyset, S\}$), μ definita nulla sull'insieme vuoto ed infinita su S e φ la misura identicamente nulla su $\mathcal{A}$. Ovviamente

(3) Per la definizione di localizzabilità (che può pensarsi riferita alla misura, piuttosto che allo spazio mensurale) si veda [2], [4], [5] e [6], dove si troverà tutta una serie di proprietà equivalenti. Questa adottata da noi prende in [2] il nome di «completezza alla Dedekind».

(4) Per una dimostrazione di questo teorema, si veda [5] o [6].

(5) In [5] e [2] questa ipotesi è sostituita dall'altra, equivalente, che μ e φ siano due misure finite sopra uno stesso anello condizionatamente σ-completo.

φ è un integrale della $\mu \left(\dfrac{d\varphi}{d\mu} = 0\right)$, ma μ e φ non sono prolungamenti di due misure finite sopra uno stesso semianello.

Daremo, nel paragrafo seguente, una condizione più debole, che risulterà, sotto una ipotesi restrittiva sulle due misure in questione, necessaria, oltre che sufficiente.

3. Diamo le seguenti due definizioni:

DEFINIZIONE 1. Sia $(S, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio mensurale. Una misura φ, definita sulla σ-algebra $\mathcal{A}$, si dirà *piena* (*o* μ-piena) su $\mathcal{A}$, se per ogni insieme φ-sommabile E, esiste un insieme $E' \in \mathcal{A}$, tale che $\varphi(E - E') = 0$ ed E' ha misura μ σ-finita (6).

DEFINIZIONE 2. Una misura μ si dirà possedere la *proprietà del sottoinsieme finito,* se per ogni $E \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(E) = +\infty$, esiste $F \in \mathcal{A}$ tale che $F \subset E$ e $0 < \mu(F) < +\infty$ (7).

Ciò premesso, si può dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 3.1. *Sia $(S, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio mensurale localizzabile, la φ sia una misura su $(S, \mathcal{A})$ e la μ e la φ godano della proprietà del sottoinsieme finito. Sia inoltre la φ μ-assolutamente continua.*

Le due seguenti proposizioni sono allora equivalenti:

(a) *La φ è μ-piena;*

(b) *La φ è un integrale della μ.*

DIMOSTRAZIONE: È chiaro che (b) $\Longrightarrow$ (a) (vedi [1], § 25, teorema F).

Dimostriamo il viceversa. Sia E un insieme μ-sommabile. Su $\mathcal{A} \cap E$ vale il teorema di Radon-Nikodym, esiste cioè una classe $\mathcal{F}_E$ di funzioni μ-equivalenti, tale che se $f \in \mathcal{F}_E$ e se $A \in \mathcal{A} \cap E$, allora risulta verificata la (B). La famiglia di classi di funzioni che così si ottiene, una classe per ogni E μ-sommabile, soddisfa alle due con-

(6) E' chiaro che non si altera la generalità, se si suppone $E' \subset E$.

(7) Si veda [6], Cap. 7, § 34.

dizioni (C) e (D) e quindi, essendo la μ localizzabile, esiste una funzione f $(S, \mathscr{A})$-misurabile, definita su tutto S, tale che per ogni $E \in \mathscr{A}$ si ha $f \cdot \chi_E \in \mathscr{F}_E$. Si ha quindi, per ogni E μ-sommabile, verificata la (A). Vediamo ora di dimostrare che l'identità (A) è vera per tutti gli insiemi φ-sommabili appartenenti ad $\mathscr{A}$.

Sia A un insieme φ-sommabile. Per l'ipotesi fatta sulla φ, esiste un insieme A' di $\mathscr{A}$, tale che $A' \subset A$ e inoltre A' è di misura μ σ-finita e $\varphi(A - A') = 0$. Esiste quindi una successione di insiemi μ-sommabili disgiunti $\{E_n\}$ tali che $\bigcup_N E_n = A'$. Si ha, per quanto visto prima, che

$$\varphi(E_n) = \int_{E_n} f\, d\mu, \qquad \forall\, n \in N$$

e quindi

$$\varphi(A') = \int_{A'} f\, d\mu.$$

Consideriamo ora un qualunque sottoinsieme G μ-sommabile di $A - A'$. $\mathscr{F}_G$ altro non è che la classe delle funzioni μ-quasi ovunque nulle, sempre nulle fuori G. Poichè $f \cdot \chi_G \in \mathscr{F}_G$, per ogni G μ-sommabile contenuto in $A - A'$, la $f \cdot \chi_{A-A'}$ è localmente μ-nulla in $A - A'$ e quindi μ-nulla ([6], § 34, teorema 2) e quindi è nullo il suo integrale su $A - A'$. Ne segue che la identità (A) vale per ogni insieme φ-sommabile di A.

Se noi proviamo che

$$\varphi(A) < +\infty \Longleftrightarrow \int_A f\, d\mu < +\infty,$$

la tesi è completata. E infatti, se $\varphi(A) < +\infty$ si ha $\varphi(A) = \int_A f\, d\mu$.

Viceversa, se $\int_A f\, d\mu < +\infty$, allora l'insieme $A' = A - \{x : f(x) = 0\}$ ha misura μ σ-finita ([1], § 25, teorema F) e quindi $\varphi(A') = \int_{A'} f\, d\mu$.

Essendo inoltre, per ogni $E \in \mathscr{A} \cap \{x : f(x) = 0\}$, tale che

$\varphi(E) < +\infty$,

$$\varphi(E) = \int_E f \, d\mu = 0$$

si ha, per l'ipotesi fatta sulla φ, che $\varphi(A \cap \{x : f(x) = 0\}) = \int_{A \cap \{x : f(x)=0\}} f \, d\mu = 0$.

Ci proponiamo di investigare cosa succeda se ci si svincola dalla ipotesi del sottoinsieme finito. Per poter affrontare questo argomento, ci servono alcune proprietà di cui godono le misure localizzabili e che verranno provate al paragrafo seguente.

4. Il teorema seguente prova una interessante relazione tra la localizzabilità e la proprietà del sottoinsieme finito.

TEOREMA 4.1. *Se lo spazio mensurale* $(S, \mathcal{A}, \mu)$ *è localizzabile, allora* S *può decomporsi in due insiemi di* $\mathcal{A}$ *disgiunti* P' *e* P'', *tali che la misura* $\mu'(E) = \mu(E \cap P')$ *gode della proprietà del sottoinsieme finito ed inoltre la misura* $\mu''(E) = \mu(E \cap P'')$ *assume solo due valori: zero ed infinito* (8).

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\mathcal{D}$ la famiglia di tutti gli insiemi μ-sommabili. Per la localizzabilità della μ, esiste un insieme di P' $(\in \mathcal{A})$, tale che $\mu(D - P') = 0$, $\forall\, D \in \mathcal{D}$ ed inoltre, dall'essere H $(\in \mathcal{A})$ tale che $\mu(D - H) = 0$ per ogni $D \in \mathcal{D}$, segue che $\mu(P' - H) = 0$. Sia E un qualunque insieme non nullo di $\mathcal{A} \cap P'$. Allora esso contiene un insieme appartenente a $\mathcal{D}$ di misura non nulla (9). Quindi μ' gode della proprietà del sottoinsieme finito. Poniamo $P'' = S - P'$ e sia $E \in \mathcal{A} \cap P''$. Supponiamo, per assurdo, che sia $0 < \mu(E) < +\infty$. Ma allora esiste un insieme μ-sommabile (quindi appartenente a $\mathcal{D}$) tale che $\mu(E) = \mu(E - P') > 0$. Dall'assurdo segue anche la seconda parte della tesi (10).

(8) Si noti che in generale non sussiste un tale teorema, se si prescinde dalla ipotesi di localizzabilità. Si noti ancora, che nelle ipotesi di questo teorema, la misura μ' altro non è che la misura contratta di μ, cioè $\mu'(E) = \sup \mu(F)$, con $F \subset E$, F μ-sommabile (confronta [5] n. 10).

(9) Vedi [2] teorema 1. La dimostrazione è d'altronde immediata: supponiamo, per assurdo, che E contenga soltanto insiemi sommabili nulli. Posto $H = P' - E$, si ha che $\mu(D - H) = 0$ $\forall\, D \in \mathcal{D}$ e $\mu(P' - H) = \mu(E) > 0$.

(10) Si osservi che questa decomposizione è unica a meno di insiemi nulli.

Per poter provare un'altra proprietà delle misure localizzabili, che ci interessa, premettiamo due lemmi.

LEMMA 1. *Se $(S, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio mensurale localizzabile, allora per ogni famiglia $\mathcal{G}$ di insiemi di misura σ-finita esiste un insieme misurabile F, tale che $\mu(G - F) = 0$ per ogni $G \in \mathcal{G}$ ed inoltre, se H è un insieme di $\mathcal{A}$, tale che $\mu(G - H) = 0$ per ogni $G \in \mathcal{G}$, allora $\mu(F - H) = 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $\mathcal{K}$ la famiglia di tutti quegli insiemi μ-sommabili, che sono contenuti in qualcuno dei $G \in \mathcal{G}$.

Per la definizione di localizzabilità, esiste un insieme di $\mathcal{A}$, F, tale che $\mu(K - F) = 0$ per ogni $K \in \mathcal{K}$ e tale che, se $\mu(K - H) = 0$ per ogni $K \in \mathcal{K}$, allora $\mu(F - H) = 0$. Proviamo che F gode della stessa proprietà nei confronti della famiglia $\mathcal{G}$. Sia $G \in \mathcal{G}$. Esiste allora una successione $\{K_n\}$ di insiemi μ-sommabili disgiunti, tale che $\bigcup_N K_n = G$. Essendo $\mu(K_n - F) = 0$ per ogni $n \in N$, si ha che

$$\mu(G - F) = \sum_N \mu(K_n - F) = 0$$

Sia d'altro canto H un insieme tale che $\mu(G - H) = 0$ per ogni $G \in \mathcal{G}$. Allora si ha che $\mu(K - H) = 0$ per ogni $K \in \mathcal{K}$ e quindi $\mu(F - M) = 0$ (11).

LEMMA 2. *Siano $(S', \mathcal{A}', \mu')$ ed $(S'', \mathcal{A}'', \mu'')$ due spazi mensurali localizzabili. Allora, posto $S = S' \cup S''$, $\mathcal{A} = \{A : A' \cup A'', A' \in \mathcal{A}', A'' \in \mathcal{A}''\}$ e $\mu(A) = \mu'(A') + \mu''(A'')$, lo spazio mensurale $(S, \mathcal{A}, \mu)$ è locabilizzabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{D}$ una famiglia di insiemi μ-sommabili. Consideriamo le due famiglie $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap S'$ e $\mathcal{D}'' = \mathcal{D} \cap S''$. Essendo μ' e μ'' localizzabili, esistono $G' \in \mathcal{A}'$ e $G'' \in \mathcal{A}''$ tali che $\mu'(D' - G') = 0$ per ogni $D' \in \mathcal{D}'$ e $\mu''(D'_{\iota} - G'') = 0$ per ogni $D'' \in \mathcal{D}''$ ed inoltre da $\mu'(D' - H') = 0$, per ogni $D' \in \mathcal{D}'$ segue $\mu(G' - H') = 0$ ed analogamente per la μ''. Consideriamo allora l'insieme $G = G' \cup G''$.

(11) Si noti che questo lemma fornisce un'altra proprietà equivalente alla localizzabilità: una misura è localizzabile se, e solo se, per ogni famiglia $\mathcal{G}$ di insiemi di misura σ-finita esiste un insieme di $\mathcal{A}$, F, tale che $\mu(G - F) = 0$ per ogni $G \in \mathcal{G}$ e se $\mu(G - H) = 0$ per ogni $G \in \mathcal{G}$, allora $\mu(F - H) = 0$. Il «solo se» è provato dal lemma 1, il «se» è banale.

Si ha che

$$\mu(D - G) = \mu(D' - G') + \mu(D'' - G'') =$$

$$\mu'(D' - G') + \mu''(D'' - G'') = 0$$

Sia inoltre H tale che $\mu(D - H) = 0$ per ogni $D \in \mathcal{D}$. Posto $H' = H \cap S'$ ed $H'' = H \cap S''$, si ha $\mu(\mathcal{D} - H) = \mu'(D' - H') + \mu''(D'' - H'') = 0$, quindi $\mu'(D' - H') = \mu''(D'' - H'') = 0$ e quindi $\mu'(G' - H') = \mu''(G'' - H'') = 0$. Da ciò segue che $\mu(G - H) = 0$.

Possiamo ora provare il seguente teorema.

TEOREMA 4.2. *Se $(S, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio mensurale localizzabile e φ è un integrale della μ, allora φ è localizzabile* (12).

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $S' = \left\{ x : \dfrac{d\varphi}{d\mu} = 0 \right\}$ e $S'' = S - S'$. La misura $\varphi'(E) = \varphi(E \cap S')$ è evidentemente localizzabile. Se proviamo che è localizzabile anche la misura $\varphi''(E) = \varphi(E \cap S'')$, la tesi è raggiunta, in virtù del lemma precedente. Osserviamo che sulla σ-algebra $\mathcal{A} \cap S''$ le due misure $\mu''(E) = \mu(E \cap S'')$ e φ'' sono « equivalenti », cioè $\varphi'' << \mu''$ e $\mu'' << \varphi''$. Si ha quindi (vedi [6], Cap. 7 § 32, lemma α) che $\mathcal{A} \cap S''$ è anche la σ-algebra di tutti i sottoinsiemi φ-misurabili di S''.

Sia ora $\mathcal{D}$ una famiglia di insiemi φ''-sommabili. Essi hanno misura μ e μ'' σ-finita e quindi, per il lemma 1, esiste un insieme G'' $(\in \mathcal{A} \cap S'')$, tale che $\mu''(D - G'') = 0$ per ogni $D \in \mathcal{D}$ e inoltre tale che se $H'' \in \mathcal{A} \cap S''$ è tale che $\mu''(D - H'') = 0$ per ogni $D \in \mathcal{D}$, allora $\mu''(G'' - H'') = 0$. Ma essendo $\varphi'' << \mu''$, si ha che per lo stesso G'' $\varphi''(D - G'') = 0$, per ogni $D \in \mathcal{D}$, e che $H'' \in \mathcal{A} \cap S''$, $\varphi''(D - H'') = 0$, per ogni $D \in \mathcal{D}$, implica $\varphi''(G'' - H'') = 0$. Quindi φ'' è localizzabile e la tesi è raggiunta.

Concludiamo il paragrafo con il seguente teorema:

TEOREMA 4.3. *Sia $(S, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio mensurale, φ un integrale della μ. Supponiamo che φ goda della proprietà del sottoinsieme finito.*

(12) Cioè lo spazio mensurale $(S, \mathcal{A}', \varphi)$ è localizzabile, dove con $\mathcal{A}'$ si è indicata la σ-algebra degli insiemi φ-misurabili.

Allora posto $H = \left\{ x : \dfrac{d\varphi}{d\mu} = 0 \right\}$, *la misura* $\overline{\mu}(E) = \mu(E - H)$ *gode della proprietà del sottoinsieme finito.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $E \in \mathcal{A} - H$ tale che $\overline{\mu}(E) = +\infty$. Su $\mathcal{A} - H$ la φ e la μ sono equivalenti, quindi $\varphi(E) > 0$. Per l'ipotesi fatta sulla φ, esiste $E' \subset E$ (eventualmente $E' = E$) tale che $0 < \varphi(E') < +\infty$. E' ha misura $\overline{\mu}$ σ-finita, quindi esiste un $E'' \subset E'$ tale che $0 < \overline{\mu}(E'') < +\infty$. Da ciò segue la tesi.

5. Procederemo ora nel modo seguente: supporremo che $(S, \mathcal{A}, \mu)$ sia uno spazio mensurale localizzabile e che φ sia un integrale della μ. Da ciò dedurremo che l'insieme S può decomporsi in tre insiemi disgiunti, appartenenti ad $\mathcal{A}$ sui quali il comportamento della μ e della φ è ben caratterizzato. Alla fine proveremo che l'esistenza di una tale decomposizione è, oltre che necessaria, anche sufficiente perché la φ sia un integrale della μ.

Per il teorema 4.2, essendo la μ localizzabile, lo è anche la φ e per il teorema 4.1 esiste un insieme φ-misurabile P'', tale che la misura $\varphi''(E) = \varphi(E \cap P'')$ gode della proprietà del sottoinsieme finito. Si è già osservato (nel corso della dimostrazione del teorema 4.2) che se φ è un integrale della μ, posto $P''' = \left\{ x : \dfrac{d\varphi}{d\mu} = 0 \right\}$, si ha che $\varphi(P''') = 0$ e su $\mathcal{A} - P'''$ la μ e la φ sono equivalenti. Essendo $\varphi(P'' \cap P''') = 0$, si può sempre supporre che sia $P'' \cap P''' = \emptyset$. Allora, per l'osservazione allora fatta, $P'' \in \mathcal{A}$.

Poniamo ora $P' = S - (P'' \cap P''')$ e studiamo il comportamento delle restrizioni delle due misure μ e φ alle σ-algebre $\mathcal{A} \cap P'$, $\mathcal{A} \cap P''$ e $\mathcal{A} \cap P'''$.

(1) Per il teorema 4.3, sulla σ-algebra $\mathcal{A} \cap P'$ la misura $\mu'(E) = \mu(E \cap P')$ gode della proprietà del sottoinsieme finito, godendone la $\varphi'(E) = \varphi(E \cap P')$. Per il teorema 3.1 la φ' è μ'-piena su $\mathcal{A} \cap P'$.

(2) Sulla σ-algebra $\mathcal{A} \cap P''$ le due misure $\mu''(E) = \mu(E \cap P'')$ e $\varphi''(E) = \varphi(E \cap P'')$ sono equivalenti, essendo $P'' \cap P''' = \emptyset$. Inoltre la φ prende solo i valori zero ed infinito. Si ha quindi

$$\varphi''(E) = 0 \iff \mu''(E) = 0$$

$$\varphi''(E) = +\infty \iff \mu''(E) > 0, \qquad \forall\, E \in \mathcal{A} \cap P''$$

(3) Sulla σ-algebra $\mathscr{A} \cap P'''$ la misura $\varphi'''(E) = \varphi(E \cap P''')$ è identicamente nulla.

Premesse queste osservazioni, si può provare il seguente teorema:

TEOREMA 5.1. *Se $(S, \mathscr{A}, \mu)$ è uno spazio mensurale localizzabile e φ è una misura su $(S, \mathscr{A})$, assolutamente continua rispetto a μ, allora le due seguenti proprietà sono equivalenti:*

(a) *φ è un integrale della μ;*

(b) *esiste una decomposizione di S in tre insiemi disgiunti P', P'' e P''', appartenenti ad $\mathscr{A}$, tali che:*

(1) *su $\mathscr{A} \cap P'$ le due misure $\mu'(E) = \mu(E \cap P')$ e $\varphi'(E) = \varphi(E \cap P')$ godono della proprietà del sottoinsieme finito e la φ' è μ'-piena.*

(2) *su $\mathscr{A} \cap P''$ le due misure $\mu''(E) = \mu(E \cap P'')$ e $\varphi''(E) = \varphi(E \cap P'')$ sono equivalenti, la φ'' prende solo i due valori zero ed infinito e si ha*

$$\varphi''(E) = 0 \iff \mu''(E) = 0 \,; \quad \varphi''(E) = +\infty \iff \mu''(E) > 0.$$

(3) *su $\mathscr{A} \cap P'''$ la $\varphi'''(E) = \varphi(E \cap P''')$ è identicamente nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Il «se» è stato provato nelle righe che precedono l'enunciato del teorema. Rimane da provare il «solo se».

Sul σ-anello $\mathscr{A} \cap P'$ le due misure μ' e φ' soddisfano al teorema 3.1, quindi esiste una funzione $(P', \mathscr{A} \cap P')$-misurabile f' tale che

$$\varphi(A) = \int_A f' \, d\mu, \qquad \forall \ A \in \mathscr{A} \cap P'$$

Consideriamo ora questa funzione

$$f(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in P' \\ +\infty & x \in P'' \\ 0 & x \in P''' \end{cases}$$

È facile vedere che essa è $(S, \mathscr{A})$-misurabile e che verifica l'identità (A).

BIBLIOGRAFIA

[1] HALMOS, P. R., *Measure Theory*, New York 1950.

[2] KELLEY, J. L., *Decomposition and Rapresentation Theorems in Measure Theory*, Math. Annalen 163, 89-94 (1966).

[3] SAKS, S. *Theory of the Integral*, New York 1937.

[4] SEGAL, I. E., *Equivalences of Measure Spaces*, Am. Journal of Mathematics 73, 275-313 (1951).

[5] ZAANEN, A. C., *The Radon-Nikodym Theorem I, II*, Indagationes Mathematicae vol. XXIII 157-187 (1961).

[6] ZAANEN, A. C., *Integration*, Amsterdam 1967.