

# CONNESSIONI METRICHE SULLE VARIETÀ QUASI HERMITIANE (\*)

di GIOVANNI BATTISTA RIZZA (a Parma) (\*\*)

SOMMARIO. - *Un precedente lavoro contiene teoremi di rappresentazione per le connessioni di una varietà quasi complessa, appartenenti alle classi  $e_0, e_+, e_-$ , e di MARTINELLI e per le connessioni nelle quali la struttura quasi complessa è parallela. Si danno qui i corrispondenti teoremi di rappresentazione per le connessioni metriche su di una varietà quasi hermitiana.*

SUMMARY. - *Some previous papers on almost complex spaces considered  $e_0, e_+, e_-$  connexions, MARTINELLI's connexions and connexions with the property that the almost complex structure is parallel. In this paper, concerning almost Hermite spaces, representation theorems for metric connexions of the above mentioned classes are given.*

## 1. Introduzione.

Come è noto, ricerche di vari Autori nel periodo 1953-65 hanno condotto ad individuare sulle varietà quasi complesse alcune notevoli classi di connessioni. Mi riferisco precisamente alle *connessioni*  $e_0, e_+, e_-$ , alle *connessioni* di MARTINELLI ed alle *connessioni nelle quali il campo  $\mathcal{H}$ , che definisce sulla varietà la struttura quasi complessa, riesce parallelo* <sup>(1)</sup>.

Per queste classi ho stabilito nel lavoro [8] alcuni teoremi di rappresentazione. Nel presente lavoro, considerate in particolare

(\*) Pervenuto in Redazione il 16 dicembre 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito del Raggruppamento di Ricerca matematica n. 9 del C. N. R. Una parte dei risultati sono stati annunciati al VIII Congresso U. M. I. (ved. il n. [7] della bibliografia).

(\*\*) Indirizzo dell'Autore: Via Linati 5 — 43100 Parma.

(1) Si vedano p. es. nella bibliografia i n. [2], [4], [5], [10].

le varietà quasi hermitiane, si danno corrispondenti teoremi di rappresentazione per le sottoclassi costituite dalle connessioni metriche (teor.  $T_1, T_2, T_3, T_4$ , n. 7; teor.  $T_5$ , n. 8).

Questi teoremi, come quelli dai quali provengono, riflettono in modo essenziale la decomposizione canonica di una connessione in connessione simmetrica associata e torsione (n. 5). Interviene nelle formule un arbitrario campo tensoriale emisimmetrico di tipo (1, 2), ciò che consente di farsi una idea quantitativa sulle connessioni appartenenti alle singole classi.

Nelle considerazioni, che conducono ai risultati di cui sopra, ha un ruolo importante un isomorfismo involutorio, denotato con  $\gamma$ , legato alla struttura riemanniana della varietà (n. 3).

Questo lavoro contiene anche un secondo teorema di rappresentazione per le connessioni metriche a campo  $\mathcal{H}$  parallelo (teor.  $T_6$ , n. 11). Esso appare di natura diversa da quella del teor.  $T_5$  e corrisponde ad una nota formula, rappresentante le connessioni a campo  $\mathcal{H}$  parallelo.

Infine, al n. 12, sono indicate due connessioni, che generalizzano opportunamente, al caso delle varietà quasi hermitiane, la seconda o la terza connessione, ben note nella letteratura e relative alle varietà hermitiane. Le due connessioni introdotte, unitamente alla classica prima connessione, sono ottenute come casi particolari a partire dai teoremi generali di rappresentazione  $T_5, T_6$ .

Da segnalare ancora, in ogni punto di una varietà quasi complessa, una nuova relazione tra il tensore  $R(A)$ , associato ad una arbitraria connessione  $A$ , (in particolare, il tensore di NIJENHUIS  $N = R(\overset{\circ}{I})$ ) ed il tensore  $D_A h$ , ottenuto per derivazione covariante a partire dal campo  $\mathcal{H}$  (teor.  $T_0$ , n. 5).

Ne discende una nuova caratterizzazione delle varietà complesse, entro le varietà quasi complesse.

## 2. Struttura quasi hermitiana.

Sia  $V$  una varietà a struttura quasi hermitiana <sup>(2)</sup>,  $\dim V = 2n$  ( $n \geq 2$ ),  $cl V = r$  ( $r \geq 1$ ). Sia  $x$  un punto di  $V$ ,  $\tau$  lo spazio vettoriale tangente in  $x$  a  $V$ ,  $\tau_*$  lo spazio vettoriale duale.

(<sup>2</sup>) Per le nozioni fondamentali si veda p. es. B. ECKMANN, [2], I, II, III, VI; K. YANO [10], V, VI, IX.

Indicati con  $\mathcal{H}$  il campo tensoriale misto  $cl \mathcal{H} = s$  ( $1 \leq s \leq r-1$ ),  
 $\mathbf{R}$   
 che determina la struttura quasi complessa di  $V$  e con  $\mathcal{H}$  il campo  
 di NIJENHUIS associato ad  $\mathcal{H}$ , siano  $h \in \tau_* \otimes \tau$  ed  $N \in \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$   
 i corrispondenti tensori nel punto  $x$  <sup>(3)</sup>.

Sia poi  $g \in \tau_* \otimes \tau_*$  il  *tensore metrico*  nel punto  $x$  di  $V$ , e  
 $G \in \tau \otimes \tau$  il tensore definito dall'uguaglianza

$$(1) \quad c_1^1 (g \otimes G) = \delta \quad (4).$$

Poichè la metrica è «adattata» alla struttura quasi complessa <sup>(5)</sup>,  
 nel punto  $x$  di  $V$  si ha

$$(2) \quad g = c_1^1 c_2^2 (g \otimes h \otimes h).$$

La (2) equivale ad affermare che il tensore  $H = c_2^1 (h \otimes g)$  di  $\tau_* \otimes \tau_*$   
 è *emisimmetrico* <sup>(6)</sup>.

### 3. Isomorfismo $\gamma$ .

L'esistenza su  $V$  di una struttura quasi hermitiana consente  
 di introdurre nello spazio vettoriale  $\mathcal{T} = \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$  l'*isomorfismo*  $\gamma$ ,  
 essenziale nel seguito, definito, per ogni tensore  $L$  di  $\mathcal{T}$ , da

$$(3) \quad \gamma(L) = c_2^2 (c_1^1 (g \otimes L) \otimes G).$$

Tenuta presente la (1), si riconosce subito che  $\gamma$  è un *isomor-*  
*fismo involutorio*, cioè

$$(4) \quad \gamma^2 = I,$$

ove  $I$  è l'identità in  $\mathcal{T}$ .

<sup>(3)</sup> Ved. p. es. G. B. RIZZA, [5], n. 2; [8], n. 2, cui si rinvia per le nota-  
 zioni.

<sup>(4)</sup>  $\delta$  è il tensore di KRONECKER. In generale  $c_k^j$  è l'applicazione tensoriale  
 di contrazione relativa allo  $j$ -esimo indice di controvarianza ed al  $k$ -esimo  
 indice di covarianza (ved. p. es. N. BOURBAKI, [1], p. 45).

<sup>(5)</sup> A questo caso ci si può sempre ricondurre. Ved. p. es. B. ECKMANN,  
 [2], p. 18.

<sup>(6)</sup> Ved. p. es. B. ECKMANN, [2] p. 19.

Indicati con  $\sigma, \varepsilon$  gli omomorfismi di simmetrizzazione, di emisimmetrizzazione di  $\mathcal{C}$  <sup>(7)</sup> e posto

$$\alpha = \sigma - \varepsilon,$$

è facile stabilire la relazione

$$(5) \quad \gamma\alpha\gamma = \alpha\gamma\alpha.$$

Dalle (4), (5). sommando membro a membro, segue

$$(6) \quad 2\gamma\sigma\gamma = I + \alpha\gamma\alpha,$$

da cui

$$(7) \quad 2\sigma\gamma\sigma = \sigma + \sigma\gamma\alpha$$

utile nel seguito.

Sono interessanti anche le relazioni

$$(8) \quad \gamma\lambda\gamma = -\alpha W\alpha\lambda,$$

$$(9) \quad \gamma W\gamma = -\alpha W\alpha W,$$

nelle quali intervengono gli isomorfismi  $\lambda$  e  $W$  introdotti ai n. 5,3 del lavoro [8].

Alle (8), (9) si perviene senza difficoltà utilizzando le (1), (2) e la (1) del lavoro [8].

Dal confronto delle (8), (9), tenuto conto del carattere involutorio di  $W$  e di  $\gamma$  e di quello anti-involutorio di  $\lambda$ , discende infine la relazione

$$(10) \quad W\gamma W = -\lambda\gamma\lambda.$$

#### 4. Osservazioni.

Conviene raccogliere in questo numero alcune osservazioni utili per il seguito.

(7) Indotti in  $\mathcal{C}$  dagli analoghi omomorfismi di  $\tau_* \otimes \tau_*$ .

Anzitutto, è bene segnalare le *identità*

$$(11) \quad (\sigma W\varepsilon + \sigma K + \varepsilon K^*)(I + W) = I + W,$$

$$(12) \quad (I + W)(\sigma W\varepsilon + \sigma K + \varepsilon K^*) = 2(\sigma W\varepsilon + \sigma K + \varepsilon K^*),$$

dove  $K$  è l'*omomorfismo* introdotto al n. 8 del lavoro [5] e  $K^* = I - K$ . Le (11), (12) si stabiliscono con calcolo diretto, tenendo presenti le uguaglianze

$$2\sigma = I + \alpha, \quad 2\varepsilon = I - \alpha,$$

e la (6) del lavoro [8], che consente di esprimere  $K$  in funzione di  $I, \alpha, W$ , e ricordando la natura involutoria degli isomorfismi  $\alpha$  e  $W$  <sup>(8)</sup>.

Sussistono anche le *identità*

$$(13) \quad (I + W)K = K(I + W) = 2\sigma K = 2K\sigma$$

conseguenza immediata della (9) del lavoro [8].

È opportuno ora stabilire un *Lemma* che mostra come, previa restrizione a convenienti sottospazi di  $\mathcal{C}$ , gli *omomorfismi*  $r, s$ , introdotti da V. MANGIONE nel lavoro [3], possono esprimersi mediante l'*omomorfismo*  $K$  e l'*isomorfismo anti-involutorio*  $\lambda$ , da me introdotti nei lavori [5], [8], rispettivamente.

Si considerino, per i tensori  $L$  di  $\mathcal{C}$ , le condizioni <sup>(9)</sup>:

$$\mathcal{A}_1 \quad W(L) = L,$$

$$\overline{\mathcal{A}}_1 \quad W(L) = -L.$$

Sussiste il Lemma

$L_1$  - Se  $L$  soddisfa alla condizione  $\mathcal{A}_1, \overline{\mathcal{A}}_1$  risulta, rispettivamente

$$(14) \quad s(L) = -K\lambda(L), \quad r(L) = -K\lambda(L).$$

Il risultato si ottiene senza difficoltà a partire dalle (18), (19) del lavoro [8], notando che, in virtù della permutabilità tra  $W$  e  $\lambda$

<sup>(8)</sup> Ved. G. B. RIZZA, [8], n. 3,4.

<sup>(9)</sup> Ved. G. B. RIZZA, [5], p. 240 e [8], p. 12; V. MANGIONE, [3], n. 7.

(proprietà  $P_6$  di [8]), quando  $L$  soddisfa alla condizione  $\mathcal{A}_1$  ovvero alla  $\overline{\mathcal{A}}_1$ , lo stesso accade per  $\lambda(L)$ .

OSSERVAZIONE. Le argomentazioni di questo numero non fanno intervenire la struttura quasi hermitiana di  $V$ , ma soltanto la sua struttura quasi complessa. I risultati sussistono quindi, più in generale, per le varietà quasi complesse.

## 5. Connessioni su $V$ .

Si considerino ora su  $V$  le *connessioni affini*.  
In un punto  $x$  di  $V$  si scriverà brevemente

$$(15) \quad A = \Gamma_A + T_A,$$

$A$  denotando la connessione generica,  $\Gamma_A$  la connessione simmetrica associata e  $T_A$  la torsione (*decomposizione canonica*).  $T_A$  è un tensore emisimmetrico dello spazio  $\mathcal{C} = \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$ .

Sia poi  $D_A h$  il tensore di  $\mathcal{C}$ , che definisce, nel punto  $x$  di  $V$ , il campo tensoriale ottenuto per derivazione covariante nella connessione a partire dal campo  $\mathcal{H}$  della struttura quasi complessa.

Intervengono anche i tensori

$$(16) \quad R(A) = \frac{1}{2} r(D_A h) = \frac{1}{2} \varepsilon W \varepsilon \lambda(D_A h),$$

$$(17) \quad S(A) = \frac{1}{2} s(D_A h) = \frac{1}{2} \sigma W \varepsilon \lambda(D_A h) - \frac{1}{2} \sigma \lambda(D_A h),$$

da me introdotti nel lavoro [5] <sup>(10)</sup>.

È bene ora segnalare un risultato, che pone in evidenza l'interesse degli omomorfismi  $K$  e  $\lambda$ . Precisamente, sussiste il *teorema*

$T_0$  - Se  $A$  denota una arbitraria connessione su di una varietà quasi complessa  $V$ , in ogni punto  $x$  di  $V$ , risulta

$$(18) \quad 2R(A) = -K\lambda(D_A h).$$

<sup>(10)</sup> G. B. RIZZA, [5], n. 3. Ved. anche le (21), (18), (19) del mio lavoro [8].

In particolare, se la connessione è simmetrica ( $T_A = 0$ ), risulta

$$(19) \quad 2N = -K\lambda(D_A h).$$

Nella ipotesi ulteriore  $clV = 2n + 1$ ,  $cl\mathcal{H} = 2n$ , dalla seconda parte del teorema discende il corollario

$C_1$  - Condizione necessaria e sufficiente affinché la struttura quasi complessa di  $V$  sia indotta da una struttura complessa è che su  $V$  esista una connessione simmetrica  $A$  per la quale, in ogni punto  $x$  di  $V$ , risulti  $K\lambda(D_A h) = 0$ .

Per stabilire la (18) basta tener presente la (16) e fare uso del Lemma  $L_1$  del n. 4, dopo aver osservato che il tensore  $D_A h$  soddisfa alla condizione  $\overline{\mathcal{A}}_1$  (14). Dalla (18) discende poi immediatamente la (19) in base ad una nota proprietà delle connessioni simmetriche (12). Dalla (19), in virtù di un classico risultato (13) segue infine il corollario  $C_1$ .

Convieni ancora osservare che negli enunciati di  $T_0$  e di  $C_1$  si può scrivere  $\varepsilon\lambda(D_A h)$  in luogo di  $\lambda(D_A h)$ . Ciò è immediata conseguenza della emisimmetria di  $R(A)$  (e, in particolare, di  $N$ ) e della permutabilità di  $K$  con  $\varepsilon$  (14).

Convieni terminare questo numero con alcune osservazioni.

È utile nel seguito l'uguaglianza

$$(20) \quad 2(S(A) + R(A)) - (\sigma W\varepsilon + \varepsilon K^*)\lambda(D_A h) = -\lambda(D_A h),$$

che si ottiene subito in virtù delle (17), (18).

Si noti poi che, a causa della (12) del n. 4 e della permutabilità di  $K$  e  $K^*$  con  $\sigma$  ed  $\varepsilon$  ([8], n. 4) risulta

$$(\sigma W\varepsilon + \varepsilon K^*)\lambda(D_A h) = \frac{1}{2}(I + W)(\sigma W\varepsilon + \sigma K + \varepsilon K^*)\varepsilon\lambda(D_A h),$$

e poichè il tensore  $\lambda(D_A h)$ , come  $D_A h$ , soddisfa alla condizione  $\overline{\mathcal{A}}_1$  (n. 4, 5), può scriversi

$$(I - W)\lambda(D_A h) = 2\lambda(D_A h)$$

(14) Ved. V. MANGIONE, [3], n. 5.

(12) Ved. p. es. G. B. RIZZA [5], n. 3.

(13) Ved. p. es. K. YANO, [10], p. 121.

(14) Ved. p. es. G. B. RIZZA, [8], n. 4.

Ciò premesso, dalla (20), operando sui due membri con l'omomorfismo  $I - W$  e tenendo conto che

$$(I - W)(I + W) = I - W^2 = 0$$

discende immediatamente l'uguaglianza

$$(21) \quad (I - W)(S(A) + R(A)) = -\lambda(D_A h).$$

È opportuno infine osservare esplicitamente che tutte le considerazioni di questo numero non dipendono dalla struttura quasi hermitiana di  $V$ , ma soltanto dalla struttura quasi complessa della varietà<sup>(15)</sup>.

## 6. Connessioni metriche su $V$ .

In relazione alla struttura riemanniana della varietà quasi hermitiana  $V$  (n. 2) si considerino ora le *connessioni metriche* di  $V$ <sup>(16)</sup> e in particolare la connessione di LEVI CIVITA, associata al tensore metrico  $g$ <sup>(17)</sup>.

Per le connessioni metriche di  $V$  sussiste una *rappresentazione locale*, utile nel seguito. Precisamente, in un punto  $x$  di  $V$ , risulta

$$(22) \quad M = \overset{\circ}{I} + 2\sigma\gamma(T_M) + T_M,$$

dove  $\overset{\circ}{I}$  denota la connessione di LEVI CIVITA,  $\gamma$  è l'isomorfismo introdotto al n. 3 e  $T_M$  (torsione di  $M$ ) è un arbitrario tensore emisimmetrico di  $\mathcal{C}$ <sup>(18)</sup>.

È opportuno segnalare ora alcune proprietà delle *connessioni metriche*, che fanno intervenire la struttura quasi complessa di  $V$ .

Considerato un punto qualunque  $x$  sulla varietà  $V$ , si riconosce subito che l'emisimmetria del tensore  $H$  del n. 2 implica l'emisim-

<sup>(15)</sup> Si tenga presente l'osservazione al termine del n. 4.

<sup>(16)</sup> Cioè, in ogni punto, il tensore metrico  $g$  è costante per derivazione covariante nella connessione.

<sup>(17)</sup> Definita cioè dai simboli di CHRISTOFFEL.

<sup>(18)</sup> La (22) è sostanzialmente nota. Cfr. ad es. J. A. SCHOUTEN, [9], (3.5), p. 32 con  $Q = 0$  e K. YANO, [10], (5.10), p. 144.



metria del tensore  $\gamma(D_M h)$ , associato ad una arbitraria connessione metrica  $M$ ; risulta cioè

$$(23) \quad \sigma \gamma(D_M h) = 0.$$

Sussistono inoltre le *relazioni*

$$(24) \quad \lambda \gamma \alpha(D_M h) = -\alpha \lambda(D_M h),$$

$$(25) \quad \gamma \lambda \alpha(D_M h) = -\alpha \lambda(D_M h).$$

Si consideri la (6) del n. 3 applicata al tensore  $D_M h$ . Tenuto conto della (23) si ha

$$(26) \quad \alpha \gamma \alpha(D_M h) = -D_M h.$$

Operando sui due membri con l'isomorfismo  $\alpha \lambda = \lambda \alpha$  <sup>(19)</sup>, si perviene subito alla (24). Per stabilire la (25), si fa agire sulla (24) l'isomorfismo  $\gamma$ , tenendo presente la (8) del n. 3 e ricordando che  $\lambda(D_M h)$ , come  $D_M h$ , soddisfa alla condizione  $\bar{\mathcal{A}}_1$  (n. 5).

Un'altra proprietà di emisimmetria è questa

$$(27) \quad \sigma \gamma \lambda(D_M h) = 0,$$

che si ottiene operando sulla (25) con l'isomorfismo  $\alpha$ , in virtù della (5) del n. 3 e del carattere involutorio di  $\gamma$ .

Infine, interviene nel seguito il *tensore emisimmetrico*

$$(28) \quad \mathcal{K} = 2\varepsilon(D_{\mathcal{P}} h) - \gamma(D_{\mathcal{P}} h),$$

il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente perchè  $V$  sia una *varietà quasi kähleriana* <sup>(20)</sup>.

Sussiste la *relazione*

$$(29) \quad \mathcal{K} = -\gamma \mathcal{K},$$

che deriva direttamente dalla (28) in virtù della (26).

<sup>(19)</sup> Ved. G. B. RIZZA, [8], proprietà  $P_6$ , n. 5.

<sup>(20)</sup> Cfr. K. YANO, [10], (1.5) p. 152. A  $I^{\mathcal{O}}$  può sostituirsi una qualunque connessione metrica  $M$ . L'emisimmetria è immediata conseguenza della (23).

## 7. Connessioni metriche di MARTINELLI. Connessioni metriche

$\varrho_0, \varrho_+, \varrho_-$ .

Per le classi di connessioni sopra indicate sussistono alcuni teoremi di rappresentazione, già annunciati al n. 1. In essi intervengono, oltre alla connessione di LEVI CIVITA  $\overset{\circ}{\Gamma}$ , gli omomorfismi  $K$  e  $Q$ , da me introdotti nei lavori [5], [6]<sup>(21)</sup>.

Precisamente, denotato con  $E$  un arbitrario tensore emisimmetrico di  $\mathcal{C}$ , si ha

$T_1$  - Le connessioni metriche  $\varrho_+$  sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla

$$(30) \quad M = \overset{\circ}{\Gamma} + 2\sigma\gamma Q(E) + Q(E).$$

$T_2$  - Le connessioni metriche  $\varrho_-$  sono, tutte e sole, rappresentate nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla

$$(31) \quad M = \overset{\circ}{\Gamma} + 2\sigma\gamma K(E) + K(E).$$

$T_3$  - Le connessioni metriche  $\varrho_0$  sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla

$$(32) \quad M = \overset{\circ}{\Gamma} + 2\sigma\gamma(I - K - Q)(E) + (I - K - Q)(E).$$

$T_4$  - Le connessioni metriche di MARTINELLI sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla

$$(33) \quad M = \overset{\circ}{\Gamma} + 2\sigma\gamma(K + Q)(E) + (K + Q)(E).$$

In virtù di un noto risultato<sup>(22)</sup> le connessioni metriche  $\varrho_+$  e le connessioni metriche  $\varrho_-$  rientrano tra le connessioni metriche di MARTINELLI.

<sup>(21)</sup> Ved. p. es. [8], n. 4.

<sup>(22)</sup> Vedi p. es. G. B. RIZZA, [8], p. 16.

In relazione all'esistenza di connessioni dei quattro tipi considerati, si potrà scegliere, in ogni punto  $x$  di  $V$ , come  $E$  il tensore  $N$  (n. 2) ovvero il tensore  $\varepsilon(D_F h)$  (n. 5) o ancora uno dei tensori  $\gamma\lambda(D_F h)$ ,  $\gamma(D_F h)$ , entrambi emisimmetrici in virtù delle (27), (23).

I teoremi  $T_1, T_2, T_3, T_4$  si ottengono immediatamente dai corrispondenti teoremi al n. 7 del lavoro [8], notando che, in base alla (22) del n. 6, ogni connessione metrica  $M$  riesce completamente determinata dalla sua torsione  $T_M$ .

### 8. Connessioni metriche a campo $\mathcal{H}$ parallelo.

Questo numero ed i successivi sono dedicati alle connessioni metriche, per le quali il campo  $\mathcal{H}$  della struttura quasi complessa (n. 2) è parallelo<sup>(23)</sup>.

Anche per questa classe di connessioni sussiste un teorema di rappresentazione. Intervengono la connessione di LEVI CIVITA  $\overset{\circ}{I}$  ed il tensore  $S(\overset{\circ}{I})$  (n. 5, 6), gli omonorfismi  $W, \lambda, K$  e  $K^* = I - K$ , dipendenti dalla struttura quasi complessa (n. 3, 4), e l'isomorfismo  $\gamma$ , dipendente dalla struttura riemanniana di  $V$  (n. 3).

Precisamente indicato con  $\overset{\circ}{E}$  un arbitrario tensore emisimmetrico di  $\mathcal{C}$ , sussiste il teorema

$T_5$  - Le connessioni metriche per le quali il campo  $\mathcal{H}$  è parallelo sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla

$$(34) \quad M = \overset{\circ}{I} + S(\overset{\circ}{I}) + \sigma W(E) + K(\Sigma) + K^*(E) + N,$$

con

$$(35) \quad 2\Sigma = \sigma(I + W)\gamma(\overset{\circ}{E}); \quad 2E = \varepsilon(I + W)\gamma(\overset{\circ}{E}) - \varepsilon\lambda(D_F h).$$

### 9.

La dimostrazione del teorema  $T_5$  richiede varie premesse.

Anzitutto è bene osservare che la (34) con  $\Sigma, E$  arbitrari tensori di  $\mathcal{C}$ , rispettivamente simmetrico ed emisimmetrico, rappresenta, in ogni punto  $x$  di  $V$ , tutte e sole, le connessioni a campo  $\mathcal{H}$  parallelo.

<sup>(23)</sup> In altrî termini si considerano su  $V$  le connessioni metriche  $M$  (n. 6), per le quali in ogni punto  $x$ , il tensore  $D_M h$  (n. 5) risulta nullo.

Il risultato è facile conseguenza del teorema di rappresentazione  $T_5$ , stabilito da G. B. RIZZA in [8]. Invero è immediato rilevare che la (34) è caso particolare della (31) del lavoro ora citato. D'altra parte, indicato  $\Phi$  il tensore simmetrico di  $\mathcal{C}$ , ottenuto per differenza a partire dalle connessioni simmetriche  $\chi$  e  $\overset{\circ}{I}$ , risulta<sup>(24)</sup>

$$S(\chi) = S(\overset{\circ}{I}) + K(\Phi) - \Phi,$$

onde la (31) di [8] assume la forma (34), sol che si ponga  $\Sigma' = \Sigma + \Phi$

Tenuto conto ora dell'osservazione segnalata, il confronto della (34) con la (22) del n. 6 porta a concludere che le *connessioni metriche a campo  $\mathcal{H}$  parallelo* sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla (34), con  $\Sigma$ ,  $E$  tensori di  $\mathcal{C}$  (rispettivamente simmetrico ed emisimmetrico), soddisfacenti alla *condizione*

$$(36) \quad S(\overset{\circ}{I}) + \sigma W(E) + K(\Sigma) = 2\sigma\gamma(K^*(E) + N).$$

È utile per il seguito rilevare che, considerata in generale la *espressione*

$$(37) \quad \mathcal{D} = S(\overset{\circ}{I}) + \sigma W(E) + K(\Sigma) + K^*(E) + N$$

(che figura a secondo membro della (34)), la *condizione*

$$(38) \quad \sigma\gamma(\mathcal{D}) = 0,$$

*risulta equivalente alla condizione (36).*

Infatti, dalla (36), che può scriversi

$$(39) \quad \sigma(\mathcal{D}) = 2\sigma\gamma\epsilon(\mathcal{D}),$$

segue

$$2\sigma\gamma\sigma\gamma\epsilon(\mathcal{D}) = \sigma\gamma\sigma(\mathcal{D});$$

d'altronde, dalla (7) del n. 3 segue

$$2\sigma\gamma\sigma\gamma\epsilon(\mathcal{D}) = -\sigma\gamma\epsilon(\mathcal{D}).$$

<sup>(24)</sup> Ved. G. B. RIZZA, [5], teor.  $T_4$ , p. 248.

Il confronto conduce subito alla (38).

Inversamente, in virtù della (7) risulta

$$\begin{aligned} 2\sigma\gamma\sigma\gamma(\mathcal{D}) &= \sigma(\mathcal{D}) + \sigma\gamma\alpha(\mathcal{D}) \\ &= \sigma(\mathcal{D}) + \sigma\gamma(\mathcal{D}) - 2\sigma\gamma\epsilon(\mathcal{D}), \end{aligned}$$

onde, dalla (38) segue immediatamente la (39) e cioè la (36).

## 10.

Le premesse del n. 9 consentono ora di dimostrare il teorema  $T_5$ .

Si denoti anzitutto con  $\mathcal{D}_0$  l'espressione cui si perviene assumendo nella (37) i tensori  $\Sigma, E$  della forma (35).

Sussiste l'identità

$$(40) \quad 2\mathcal{D}_0 = -\lambda(D_{\hat{r}} h) + (I + W)\gamma(\overset{\circ}{E}).$$

La (40) si stabilisca con calcolo diretto, sfruttando la (20) del n. 5 e la (11) del n. 4 e ricordando che  $R(\overset{\circ}{I}) = N$  <sup>(25)</sup>.

Risulta inoltre

$$\sigma\gamma(\mathcal{D}_0) = 0.$$

Infatti, tenute presenti la (27) del n. 6, la (4) del n. 3 e l'emisimmetria di  $\overset{\circ}{E}$ , dalla (40) segue subito

$$\sigma\gamma(\mathcal{D}_0) = \frac{1}{2} \sigma\gamma W\gamma(\overset{\circ}{E})$$

e da questa si giunge immediatamente all'asserto in virtù della (9) del n. 3 e della permutabilità di  $\sigma = \frac{1}{2}(I + \alpha)$  con  $\alpha W \alpha W$  <sup>(26)</sup>.

In base alla (38) del n. 9 è ora possibile concludere che ogni connessione rappresentata nel punto generico  $x$  di  $V$  dalla (34) del

<sup>(25)</sup> Ved. p. es. G. B. RIZZA, [5], n. 3.

<sup>(26)</sup> Dalla  $\alpha W \alpha W = W \alpha W \alpha$  ([8], n. 3) appare subito che  $\alpha$  è permutabile con  $\alpha W \alpha W$ .

n. 8, con  $\Sigma$ ,  $E$  espressi dalla (35) ed  $\overset{\circ}{E}$  arbitrario tensore emisimmetrico di  $\mathcal{C}$ , è una connessione metrica a campo  $\mathcal{H}$  parallelo.

Per completare la dimostrazione del teorema  $T_5$  conviene segnalare l'identità

$$(41) \quad 2\mathcal{D} = -\lambda(D_{\overset{\circ}{F}} h) + (I + W)(\mathcal{D}).$$

Questa si stabilisce senza difficoltà notando che

$$2\mathcal{D} = S(\overset{\circ}{I'}) + R(\overset{\circ}{I'}) + (\sigma W\varepsilon + \sigma K + \varepsilon K^*)(E) + K(\Sigma),$$

e tenendo conto della (21) del n. 5 e delle (12), (13) del n. 4.

Ciò premesso, sia  $M$  una connessione metrica a campo  $\mathcal{H}$  parallelo. Nel punto generico  $x$  di  $V$ ,  $M$  è rappresentata dalla (34) e sussiste la condizione (36) ovvero la condizione equivalente (38) (n. 9). Pertanto  $\gamma(\mathcal{D})$  è un tensore emisimmetrico di  $\mathcal{C}$ , denotato nel seguito con  $\overset{\circ}{E}$ .

Poiché  $\gamma^2 = I$ , il secondo membro della (41) non differisce dal secondo membro della (40), onde  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ .

In conclusione la connessione  $M$ , nel punto generico  $x$  di  $V$ , è rappresentata dalla (34) con  $\Sigma$ ,  $E$  necessariamente del tipo (35).

Il teorema  $T_5$  è ora dimostrato.

## 11. Osservazioni.

Conviene osservare che il teorema di rappresentazione  $T_5$  del n. 8 (come il teorema  $T_5$  del lavoro [8], da cui proviene) *rispecchia in modo essenziale la decomposizione canonica di una connessione in connessione simmetrica associata e torsione* (n. 5). In altri termini il teorema  $T_5$  contiene una caratterizzazione delle connessioni simmetriche associate ovvero delle torsioni, relative alle connessioni metriche a campo  $\mathcal{H}$  parallelo.

È interessante segnalare un *secondo teorema di rappresentazione* di struttura più semplice.

Precisamente, considerato in  $\mathcal{C}$  l'omomorfismo

$$(42) \quad O = \frac{1}{2}(I + W),$$

ed indicando con  $\overset{\circ}{E}$  un arbitrario tensore emisimmetrico di  $\mathcal{C}$ , sussiste il teorema

$T_6$  - Le connessioni metriche per le quali il campo  $\mathcal{H}$  è parallelo sono, tutte e sole, rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , dalla

$$(43) \quad M = \overset{\circ}{I} - \frac{1}{2} \lambda(D_{\overset{\circ}{F}} h) + O\gamma(\overset{\circ}{E}).$$

Il risultato discende subito dal teorema  $T_5$  del n. 8, tenendo presente la definizione di  $\mathcal{D}$  (n. 9), l'identità (40) ed il significato di  $O$ .

Dal punto di vista strutturale il teorema  $T_6$  (relativo a connessioni metriche) è da riguardarsi come corrispondente ad un noto teorema di rappresentazione per le connessioni a campo  $\mathcal{H}$  parallelo <sup>(27)</sup>.

## 12. Esempi.

È bene terminare segnalando *tre esempi di connessioni metriche a campo  $\mathcal{H}$  parallelo*.

Gli esempi accennati si ottengono assumendo nella (35) del n. 8 il tensore  $\overset{\circ}{E}$  rispettivamente uguale ai tensori

$$(44) \quad 0, \quad -\frac{1}{2} \lambda(\mathcal{K}), \quad -\frac{1}{2} W \gamma \lambda(\mathcal{K}),$$

essendo  $\mathcal{K}$  il tensore di  $\mathcal{T}$  definito alla fine del n. 6.

Nel quadro del teorema di rappresentazione  $T_6$  del n. 11, le corrispondenti *connessioni* sono rappresentate, nel punto generico  $x$  di  $V$ , da

$$(45) \quad M_1 = \overset{\circ}{I} - \frac{1}{2} \lambda(D_{\overset{\circ}{F}} h),$$

$$(46) \quad M_2 = \overset{\circ}{I} - \frac{1}{2} \lambda(D_{\overset{\circ}{F}} h) - \frac{1}{2} O \gamma \lambda(\mathcal{K}),$$

$$(47) \quad M_3 = \overset{\circ}{I} - \frac{1}{2} \lambda(D_{\overset{\circ}{F}} h) - \frac{1}{2} O \gamma W \gamma \lambda(\mathcal{K}).$$

<sup>(27)</sup> Ved. p. es. G. B. RIZZA. [8], formula (43). In essa, anzichè far variare arbitrariamente la connessione  $C$ , può fissarsi una connessione particolare, ad esempio, quando la varietà è quasi hermitiana, la connessione di LEVI CIVITA  $\overset{\circ}{I}$  (n. 6) (Cfr. p. es. K. YANO, [10], Ch. VI, § 1 2).

La prima di queste tre connessioni è ben nota nella letteratura ed è chiamata *prima connessione* <sup>(28)</sup>. Le altre costituiscono naturali generalizzazioni di due connessioni anch'esse note nella letteratura (*seconda e terza connessione*), relative al caso particolare delle *varietà hermitiane*.

Convieni accennare subito al procedimento, che permette di giustificare quanto si è ora affermato, rinviando invece al n. 13 i dettagli della dimostrazione.

Un primo passo consiste nell'osservare che i tensori  $-\frac{1}{2}\lambda(\mathcal{K})$  e  $-\frac{1}{2}W\gamma\lambda(\mathcal{K})$  della (44) sono *emisimmetrici*.

Posto poi

$$(48) \quad O^* = I - O = \frac{1}{2}(I - W),$$

risulta

$$(49) \quad O^* \gamma\lambda(\mathcal{K}) = O^* \gamma W \gamma\lambda(\mathcal{K}).$$

D'altro canto, si perviene a stabilire la *relazione*

$$(50) \quad O^* \gamma\lambda(\mathcal{K}) - \lambda(D_{\overset{\circ}{F}} h) = 4(I + \alpha\gamma)(N)$$

dove  $N$  è il tensore di NIJENHUIS (n. 2).

Tenuto conto poi delle (48), (49), (50) è immediato riconoscere che le (46), (47) divengono rispettivamente

$$(51) \quad M_2 = \overset{\circ}{I} - \frac{1}{2}\gamma\lambda(\mathcal{K}) + (I + \alpha\gamma)(N),$$

$$(52) \quad M_3 = \overset{\circ}{I} - \frac{1}{2}\gamma W \gamma\lambda(\mathcal{K}) + (I + \alpha\gamma)(N).$$

A questo punto, per la varietà quasi hermitiana  $V$ , si considerino le ipotesi  $\underset{R}{cl} V = 2n + 1$ ,  $\underset{R}{cl} \mathcal{H} = 2n$ ,  $\mathcal{K} = 0$ , denotando  $\mathcal{H}$

<sup>(28)</sup> Ved. p. es. K. YANO, [10], Ch. VI, n. 6 e in particolare le formule (6.5), (6.4) di p. 145.



il campo tensoriale misto che definisce la struttura quasi complessa di  $V$  ed  $\mathcal{K}$  il campo di NIJENHUIS associato ad  $\mathcal{H}$  (n. 2).

In virtù di un classico risultato  $V$  è ora una *varietà hermitiana*

Nel punto  $x$  di  $V$  il tensore  $N$  riesce nullo. Le (51), (52) si riducono quindi alle

$$(53) \quad M_2 = \overset{\circ}{I} - \frac{1}{2} \gamma \lambda (\mathcal{K}),$$

$$(54) \quad M_3 = \overset{\circ}{I} - \frac{1}{2} \gamma W \gamma \lambda (\mathcal{K}),$$

e queste ultime, come si riconosce senza difficoltà; sono precisamente rappresentazioni locali della *seconda* e della *terza connessione*, note nella letteratura<sup>(29)</sup>.

In questo modo si perviene all'asserto.

### 13.

La dimostrazione delineata al n. 12 deve essere completata in alcuni dettagli. Precisamente, occorre ancora provare l'emisimmetria dei tensori  $\lambda (\mathcal{K})$  e  $W \gamma \lambda (\mathcal{K})$  e stabilire le relazioni (49), (50).

L'emisimmetria di  $\lambda (\mathcal{K})$  discende subito dalla emisimmetria di  $\mathcal{K}$  (n. 6) e dalla permutabilità di  $\lambda$  con  $\alpha$  (nota<sup>(19)</sup> n. 6). Tenute presenti poi le (29), (8) e la nota<sup>(26)</sup> del n. 9, risulta

$$\sigma W \gamma \lambda (\mathcal{K}) = - \sigma W \gamma \lambda \gamma (\mathcal{K}) = - \sigma W \alpha W \alpha \lambda (\mathcal{K}) = W \alpha W \alpha \sigma \lambda (\mathcal{K}) = 0,$$

onde anche  $W \lambda \gamma (\mathcal{K})$  riesce emisimmetrico.

Alla (49) si perviene subito, tenendo conto delle (29), (8) per il primo membro e della (9) per il secondo membro.

Per stabilire la (50) occorrono alcune premesse.

Si è già notato al n. 5 che  $\lambda (D_{\overset{\circ}{F}} h)$  soddisfa alla condizione  $\bar{\mathcal{A}}_1$  cioè

$$(55) \quad W \lambda (D_{\overset{\circ}{F}} h) = - \lambda (D_{\overset{\circ}{F}} h).$$

(29) Ved. p. es. K. YANO, [10], Ch. VI, u. 7, 8, p. 147-151.

Tenute presenti le (27), (55), si ha subito

$$(56) \quad \gamma \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) = -\alpha \gamma \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) = \alpha \gamma W \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h).$$

Applicando a questa l'isomorfismo  $\gamma$ , a norma della (5) del n. 3 si può scrivere

$$(57) \quad \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) = \gamma \alpha \gamma W \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) = \alpha \gamma \alpha W \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h).$$

Si operi ora con l'isomorfismo  $\alpha \gamma W$  sulla (25). In base alla (9) —  $\gamma W \gamma$  può sostituirsi con  $\alpha W \alpha W = W \alpha W \alpha$ . In virtù della (55) si perviene in definitiva a

$$(58) \quad \alpha W \alpha \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) = -\alpha \gamma W \alpha \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h).$$

Risulta infine

$$(59) \quad W \gamma \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) = -\alpha \gamma \alpha W \alpha \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h).$$

La dimostrazione consiste nel far vedere che, utilizzando per l'espressione a primo membro le (55), (10) e per quella a secondo membro le (8), (23) si giunge allo stesso risultato.

Ciò premesso, si noti che, sfruttando successivamente le (48), (29), (28), risulta

$$\begin{aligned} 2 O^* \gamma \lambda (\mathcal{K}) &= -\gamma \lambda \gamma (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) + \gamma \lambda \gamma \alpha (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) + \gamma \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) + \\ &+ W \gamma \lambda \gamma (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) - W \gamma \lambda \gamma \alpha (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) - W \gamma \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h). \end{aligned}$$

Tenuto conto poi della (8), della identità  $W \alpha W \alpha = \alpha W \alpha W$  e della (55), si ha

$$\begin{aligned} 2 O^* \gamma \lambda (\mathcal{K}) &= \alpha W \alpha \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) - \alpha W \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) + \gamma \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) + \\ &+ \alpha W \alpha \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) - W \alpha \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) - W \gamma \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h). \end{aligned}$$

In conclusione, in virtù delle (56), (58), (59), si può scrivere

$$\begin{aligned} (60) \quad 2 O^* \gamma \lambda (\mathcal{K}) &= (-W \alpha - \alpha W + \alpha W \alpha) \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h) + \\ &+ \alpha \gamma (W - W \alpha + \alpha W \alpha) \lambda (D_{\mathcal{F}}^{\circ} h). \end{aligned}$$

Dalle (55), (57) segue poi

$$(61) \quad -2\lambda (D_F^\circ h) = W\lambda (D_F^\circ h) - \alpha\gamma\alpha W\lambda (D_F^\circ h).$$

Dalle (60), (61), sommando membro a membro e tenendo presente l'espressione di  $N = R(\overset{\circ}{I})$ , data dalla (16), si perviene infine alla (50).

Il compito di cui all'inizio di questo numero è dunque assolto.

### BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre* 3, Hermann, Paris, (1958).
- [2] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Internazionale Matematico Estivo, C. I. M. E., Cremonese, Roma, (1956).
- [3] V. MANGIONE, *Su alcune classi di connessioni di una varietà quasi complessa*, Riv. Mat. Univ. Parma, (2) 9 (1968).
- [4] E. MARTINELLI, *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa*, Centro Internazionale Matematico Estivo, C. I. M. E., Cremonese, Roma, (1956).
- [5] G. B. RIZZA, *Sulle connessioni di una varietà quasi complessa*, Ann. di Mat., (6) 68 (1965).
- [6] G. B. RIZZA, *Varietà quasi complesse e connessioni*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 35 (1965).
- [7] G. B. RIZZA, *Connessioni sulle varietà a struttura quasi complessa e quasi hermitiana*, VIII Congresso U. M. I, Trieste (1967).
- [8] G. B. RIZZA, *Teoremi di rappresentazione per alcune classi di connessioni su di una varietà quasi complessa*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, 1, (1969).
- [9] J. A. SCHOUTEN, *Ricci calculus*, 2nd Ed., Springer-Verlag, Berlin (1954).
- [10] K. YANO, *Differential Geometry of complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, Oxford, (1965).