SULL'EQUAZIONE DELLE ONDE CON TERMINE NOTO PERIODICO (*)

di LUCIANO DE SIMON (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Nel presente lavoro, che riguarda l'equazione delle onde* $u_{tt} - \Delta u = f(x, t)$ *in* $R \times \Omega$ *(R retta reale,* Ω *aperto limitato n-dimensionale;* $t \in R$, $x \in \Omega$*), con f periodica rispetto a t, si studiano condizioni atte a garantire l'esistenza e l'unicità di soluzioni* $u(x, t)$*, nulle alla frontiera di* Ω*, periodiche in t col medesimo periodo di f. Di tale problema si dà una formulazione di tipo generalizzato e si dimostra, infine, un teorema di esistenza ed unicità.*

SUMMARY. - *This paper concerns the wave equation* $u_{tt} - \Delta u = f(x, t)$ *(R real line,* Ω *n-dimensional bounded open set;* $t \in R$, $x \in \Omega$*) with f periodic in t. Our purpose is to find conditions for the existence and unicity of a solution* $u(x, t)$ *with zero boundary value on* $\partial\Omega$*, periodic in t with the same period as f. The above problem will be reformulated in a generalized statement. For this generalized problem we give finally a theorem of existence and unicity.*

Sia Ω un aperto connesso e limitato di R^n; considero qui il problema dell'esistenza di una funzione $u(x, t)$ definita in $R \times \Omega$, nulla sulla frontiera di Ω e periodica rispetto a t, soluzione della equazione

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

dove f è una funzione anch'essa periodica in t con periodo ω.

(*) Pervenuto in redazione il 13 novembre 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R..

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

La difficoltà del problema — in termini fisici — sta nel fatto che, mancando un termine dissipativo, si possono presentare fenomeni di risonanza assai complessi. Analiticamente, per dare una risposta al problema posto, occorrerebbe disporre di informazioni assai precise circa l'andamento della successione degli autovalori dell'operatore di Laplace con condizioni di annullamento alla frontiera di Ω, ciò che non è possibile, salvo casi molto particolari. In questo lavoro ottengo un risultato di tipo generale affermante l'esistenza e l'unicità della soluzione, qualunque sia il periodo di f, tranne un insieme di periodi ω avente misura nulla. Questo risultato si può stabilire sfruttando solamente le informazioni sulla distribuzione degli autovalori fornite dalla ben nota formula asintotica.

1. L'operazione di derivazione verrà qui intesa sempre nel senso di Sobolev. Prima di iniziare l'esposizione, introduciamo alcune notazioni e convenzioni di cui faremo uso. Siano:

R la retta reale, Z l'insieme degli interi, N l'insieme dei numeri naturali ed $N+$ l'insieme dei naturali positivi.

Ω un aperto connesso e limitato di R^n $(n \in N+)$.

$f(x,t)$ $(x \in R^n, t \in R)$ una funzione reale misurabile, definita in $R \times \Omega$, periodica rispetto a t con periodo $\omega > 0$.

T_ω il quoziente di R rispetto all'equivalenza: $t' \backsim t''$ se e solo se $t' - t'' = k\omega$, con $k \in Z$.

U_ω il prodotto topologico $T_\omega \times \Omega$.

D_i^j l'operatore di derivazione $\dfrac{\partial^j}{\partial x_i^j}$ $(j \in N, i \in N+)$ con l'ovvia convenzione $D_i^0 = I$ (I operatore identità).

D^s l'operatore $D_1^{s_1} D_2^{s_2} \dots D_p^{s_p}$ con $s \equiv (s_1, s_2, \dots, s_p)$ vettore a p componenti intere non negative, di modulo $|s| = s_1 + s_2 + \dots + s_p$.

Δ l'operatore di Laplace n-dimensionale: $\Delta = D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_n^2$.

$\square$ l'operatore di D'Alembert: $\square = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$.

Inoltre, se G è un aperto di R^j $(j \in N+)$, indicheremo con $L^2(G)$ lo spazio delle (classi di) funzioni reali a quadrato sommabile su G, reso di Hilbert con il consueto prodotto scalare, per il quale useremo la notazione $(.,.)$. Denoteremo con $H^m(G)$ $(m \in N^+)$ il sottospazio di $L^2(G)$ costituito dalle funzioni dotate di tutte le derivate fino all'ordine m appartenenti a $L^2(G)$, con la topologia derivante dal prodotto scalare

$$(f, g)_m = \sum_{|s| \leq m} (D^s f, D^s g) = \sum_{|s| \leq m} \int_G D^s f \cdot D^s g \, dx \qquad f, g \in H^m(G).$$

Detto poi $\mathcal{D}(G)$ l'insieme di tutte le funzioni indefinitamente derivabili e con supporto compatto incluso in G, indicheremo con $\overset{\circ}{H}{}^m(G)$ la chiusura di $\mathcal{D}(G)$ in $H^m(G)$.

Ciò premesso, si consideri il problema seguente: assegnata $f \in L^2(U_\omega)$, cercare in $L^2(U_\omega)$ soluzioni del problema di Dirichlet

$$\square u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.1}$$

dove tanto l'operatore $\square$ quanto la condizione di annullamento alla frontiera vanno intese in senso generalizzato, come verrà poi precisato.

Nella prima parte della presente esposizione si studiano appunto delle condizioni di annullamento alla frontiera in senso generalizzato per le soluzioni del nostro problema. Tali condizioni dovranno ovviamente coincidere con le condizioni «classiche» se applicate a funzioni sufficientemente regolari (ad es. provviste di derivate prime e seconde continue).

Seguendo una tecnica ormai consueta, passeremo dalla (1.1) ad una nuova equazione «debole», che otterremo moltiplicando scalarmente i termini dell'equazione per gli elementi di una certa famiglia $\mathcal{F}$, densa in $L^2(U_\omega)$, di funzioni test sufficientemente regolari ed applicando due volte (formalmente) le formule di Gauss-Green. Sulla base di queste premesse, diamo la definizione seguente:

Una funzione $u \in L^2(U_\omega)$ è soluzione generalizzata del problema (1.1) se

$$(u, \square\varphi) = (f, \varphi) \tag{1.2}$$

per ogni $\varphi \in H^2(T_\omega) \otimes \mathcal{D}_{-\Delta}(\Omega)$.

Dove $\otimes$ indica il prodotto tensoriale (inteso in senso puramente algebrico) e $\mathcal{D}_{-\Delta}(\Omega)$ è il dominio dell'operatore $-\Delta$ in $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, con la consueta definizione generalizzata di $-\Delta$ (la relazione $-\Delta u =$

$= g$, con $g \in L^2(\Omega)$ ed $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ significa:

$$\int_\Omega \sum_1^n {}_i D_i^1 u \, D_i^1 v \, dx = -\int_\Omega g \, v \, dx \qquad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)).$$

A giustificazione di quanto affermato nella premessa, osserviamo che, allorquando valgono certe condizioni di regolarità (per la frontiera di Ω e per la soluzione u di (1.2)), la formulazione generalizzata da noi data al problema e quella ordinaria espressa da (1.1) (che, evidentemente, è significativa per funzioni derivabili almeno due volte e per Ω regolare) coincidono. Anzitutto è evidente che ogni soluzione ordinaria è anche soluzione generalizzata: basta, per verificare la cosa, applicare le formule di Gauss-Green alla (1.1). Reciprocamente, si supponga che Ω sia regolare (p. es. di classe $\mathcal{C}^2$) e che u sia una soluzione di (1.2) dotata di un certo grado di regolarità (ad es., due volte derivabile). In tali ipotesi, ed in particolare in virtù della supposta regolarità di Ω, ogni funzione $\varphi \in H^2(T_\omega) \otimes \mathcal{D}_{-\Delta}(\Omega)$ possiede derivate seconde a quadrato sommabile, e quindi derivate prime che hanno traccia sulla frontiera di U_ω. Possiamo perciò scrivere

$$(1.3) \qquad (u, \Box\varphi) = (\Box u, \varphi) - \int_{T_\omega \times \partial\Omega} u \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \, dt \, d\sigma, \quad \forall \varphi \in H^2(T_\omega) \otimes \mathcal{D}_{-\Delta}(\Omega)$$

(con $d\sigma$ elemento di misura superficiale su $\partial\Omega$).

Dal momento che u è, per ipotesi, soluzione di (1.2), si ha pure

$$(1.4) \qquad (\Box u, \varphi) - \int_{T_\omega \times \partial\Omega} u \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \, dt \, d\sigma = (f, \varphi).$$

Assumendo ora φ a supporto compatto incluso in U_ω, risulta ovviamente $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$ e quindi, in forza delle (1.3), (1.4)

$$(1.5) \qquad (\Box u - f, \varphi) = 0.$$

Dovendo valere la (1.5) per ogni φ a supporto compatto incluso in U_ω, ne consegue l'uguaglianza $\Box u - f = 0$, da cui

$$\int_{T_\omega \times \partial\Omega} u \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \, dt \, d\sigma = 0, \qquad \forall \varphi \in H^2(T_\omega) \otimes \mathcal{D}_{-\Delta}(\Omega).$$

Dato che come $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}$ si può assumere un'arbitraria funzione regolare assegnata in $T_\omega \times \partial\Omega$, la traccia di u su $T_\omega \times \partial\Omega$ dev'essere nulla.

La definizione di soluzione generalizzata da noi assunta consente di applicare alla trattazione del nostro problema il metodo delle serie di Fourier formali. Tale procedimento consiste nell'esprimere l'incognita e il termine noto di (1.2) mediante un sistema ortonormale di funzioni e nel ricavare delle equazioni per i relativi coefficienti di Fourier. Ci serviremo, nel nostro caso, dei sistemi di funzioni

$$\{a_k(t)\}_{k \in Z}, \quad \{w_l(x)\}_{l \in N^+} \tag{1.6}$$

dove $a_k(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}}\, e^{ik\alpha t}\left(\alpha = \frac{2\pi}{\omega}\right)$ e le $w_l(x)\,(x \in R^n)$ sono autosoluzioni normalizzate del problema di autovalori

$$\Delta w + \lambda_l w = 0,\; w\,|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.7}$$

È ben noto che tali autosoluzioni formano un sistema ortonormale completo in $L^2(\Omega)$; poichè gli autovalori dell'operatore $-\Delta$ sono tutti positivi, porremo $\lambda_l = \mu_l^2$.

Siano poi A e W gli insiemi costituiti da tutte le combinazioni lineari finite di funzioni del sistema $\{a_k(t)\}$ e del sistema $\{w_l(x)\}$ rispettivamente. Con riferimento a quanto detto più sopra, faremo vedere che la famiglia di funzioni test $H^2(T_\omega) \otimes \mathcal{D}_{-\Delta}(\Omega)$ che permette di individuare le eventuali soluzioni di (1.2) può essere sostituita, ad ogni effetto, dal sistema di funzioni $A \otimes W$. Più precisamente:

LEMMA 1.1: *Affinchè una funzione* $u \in L^2(U_\omega)$ *sia soluzione di* (1.2) *è sufficiente* (*e necessario*) *che sia*

$$(u, \square\, \varphi) = (f, \varphi), \quad \forall\; \varphi \in A \otimes W.$$

DIM.

La cosa sarà provata se faremo vedere che in corrispondenza ad ogni $\varphi \in H^2(T_\omega) \otimes \mathcal{D}_{-\Delta}(\Omega)$ esiste una successione $\{\varphi_\nu\}$ di elementi appartenenti a $A \otimes W$ tale che $\varphi_\nu \to \varphi$, $\square\varphi_\nu \to \square\varphi$ nella metrica di $L^2(U_\omega)$. Tenuto conto che ogni φ è combinazione lineare di prodotti del tipo $h(t)\, k(x)$ con $h \in H^2(T_\omega)$, $k \in \mathcal{D}_{-\Delta}(\Omega)$, basterà trattare il caso $\varphi(x, t) = h(t)\, k(x)$.

Ciò premesso, con riferimento agli sviluppi di Fourier di h e k secondo i sistemi ortogonali $\{a_k\}$ e $\{w_l\}$ rispettivamente, indichiamo con h_ν e $k_\nu\,(\nu \in N\ )$ le ridotte ν-esime di tali sviluppi. Sia infine P_ν l'operatore di proiezione di $L^2(\Omega)$ sulla varietà generata dai vettori ortonormali $w_1, w_2, \dots, w_\nu$. Avendosi $h_\nu \in A$, $k_\nu \in W$ qualunque sia ν, ed essendo $h_\nu \to h$ in $L^2(T_\omega)$, $k_\nu \to k$ in $L^2(\Omega)$, l'asserto segue facilmente se si verifica che $\frac{d^2}{dt^2} h_\nu$ e $-\Delta k_\nu$ convergono, rispettivamente in $L^2(T_\omega)$ e $L^2(\Omega)$, verso $\frac{d^2}{dt^2} h$ e verso $-\Delta k$. Il primo di questi due fatti è garantito da ben noti risultati relativi allo sviluppo in serie di Fourier di funzioni con derivate a quadrato sommabile. Per provare il secondo fatto, osserviamo che l'operatore $-\Delta$ commuta con ogni P_ν, per cui detta k^* la funzione $-\Delta k$, si ha

$$k_\nu^* = P_\nu\, k^* = -\,\Delta P_\nu\, k = -\,\Delta k_\nu\,.$$

Dunque $-\Delta k_\nu$ è la ridotta di ordine ν dello sviluppo di Fourier di $-\Delta k$ e converge pertanto verso tale funzione.

Riprendiamo ora in considerazione il problema (1.2). Per il lemma precedente sarà sufficiente, al fine di stabilire se una $u \in L^2(U_\omega)$ è una soluzione, far ricorso alle funzioni test del sistema ortonormale

$$\{a_k \otimes w_l\}_{k \in Z,\, n \in N^+}\,. \tag{1.8}$$

Indicati con $u_{kl} = (u, a_k \otimes w_l)$ e $f_{kl} = (f, a_k \otimes w_l)$ i coefficienti di Fourier di u e di f rispetto al sistema (1.8), ed eseguito il prodotto scalare che interviene in (1.2), si ottengono le infinite equazioni nelle u_{kl}:

$$(\mu_l^2 - k^2\alpha^2)\, u_{kl} = f_{kl}\,. \tag{1.9}$$

Chiaramente, perchè sia possibile calcolare le u_{kl} occorre che il secondo membro di (1.9) si annulli per tutte quelle coppie di indici che rendono nullo il primo membro. Se questa condizione si realizza, basterà poi che le u_{kl} calcolate da (1.9) siano i coefficienti di Fourier di una funzione a quadrato sommabile. Possiamo pertanto concludere la discussione enunciando il seguente risultato:

TEOREMA 1.1: *Condizione necessaria e sufficiente perchè la* (1.2) *abbia soluzione è che:*

1) *Sia* $f_{kl}=0$ *per ogni coppia di indici* k, l *tali che*

$$\mu_l^2-k^2\alpha^2=0.$$

2) *Sia*

$$\sum_{k,l}\frac{f_{kl}^2}{(\mu_l^2-k^2\alpha^2)^2}<+\infty$$

dove la sommatoria è estesa alle coppie di indici per cui $\mu_l^2-k^2\alpha^2\neq 0$.

Tale soluzione è unica se e solo se:

1') *Per ogni coppia di indici* $l\in N^+$, $k\in Z$ *è* $\mu_l^2-k^2\alpha^2\neq 0$.

2. Cerchiamo ora delle condizioni sufficienti perchè la (1.2) abbia un'unica soluzione in $L^2(U_\omega)$. Usando la tecnica delle « soluzioni formali », dianzi illustrata, il problema viene ricondotto alla ricerca di condizioni sufficienti perchè siano applicabili i risultati del teorema (1.1). Per quanto è stato osservato, è evidente che, almeno per certi valori di α (ad esempio se α coincide con un autovalore) non è possibile garantire l'unicità della soluzione. Sarà perciò necessario, se si vuole rimanere in condizioni di unicità, escludere certi valori di α, cioè certi periodi ω. Faremo nel seguito vedere che, in ogni caso, l'insieme degli α « inaccettabili » ha misura nulla in R^1.

Notiamo ora che, se esiste un numero $h>0$ tale da aversi, $\forall\, l\in N^+$, $\forall\, k\in Z$,

$$|\mu_l^2-k^2\alpha^2|\geq h \tag{2.1}$$

le condizioni 1'), 2) del teorema 1.1 sono senz'altro verificate. Altrimenti, sarà l'ordine di grandezza dei coefficienti f_{kl} a giocare un ruolo decisivo.

Preso un $m>0$, conveniamo, al fine di snellire la scrittura, che sia $|k|^m=1$ se $k=0$ e poniamo

$$f_{kl}^*=f_{kl}\,|k|^m.$$

Supponiamo poi che sia

$$\sum_{k,l}f_{kl}^{*2}<+\infty.$$

Le equazioni (1.9) forniscono allora le uguaglianze:

$$u_{kl}(\mu_l^2-k^2\alpha^2)\,|k|^m=f_{kl}^*$$

da cui si deduce che, se risulta

$$|(\mu_l^2 - k^2\alpha^2)|\,|k|^m \geq h > 0 \quad \forall\, l \in N^+, \quad \forall\, k \in Z \tag{2.2}$$

per un certo numero h, è senz'altro $\{u_{kl}\} \in l^2$ (1).

Evidentemente, le condizioni da richiedere ad f per poter applicare quanto sopra saranno tanto meno onerose quanto più piccolo si potrà assumere m. Inoltre è da prevedere che la scelta di m dipenderà dalla distribuzione asintotica degli autovalori del problema di Dirichlet (1.7) e quindi, tra l'altro, dalla dimensione dello spazio in cui è ambientato il problema.

In quest'ordine di idee giova ricordare che, se m è un intero positivo, la condizione

$$\sum_{k,l} f_{kl}^2 |k|^{2m} < +\infty \tag{2.3}$$

è necessaria e sufficiente perchè esistano in $L^2(U_\omega)$ le derivate di f rispetto a t fino all'ordine m. Poichè la (2.3) ha significato per m reale positivo qualunque, diremo, generalizzando, che f ammette derivate rispetto a t a quadrato sommabile fino all'ordine m (anche non intero) se e solo se sussiste la (2.3). Ciò posto, siamo in grado di enunciare la seguente proposizione:

TEOREMA 2 2: *Se Ω è un aperto limitato e se $m > n-1$, allora, per quasi tutti i periodi $\omega > 0$, qualunque sia f di periodo ω rispetto a t e dotata di derivate fino all'ordine m a quadrato sommabile in U_ω, esiste una ed una sola soluzione generalizzata, periodica di periodo ω, della* (1.1).

DIM.

Sussistendo la relazione $\alpha = \dfrac{2\pi}{\omega}$, sarà equivalente far vedere che è di misura nulla l'insieme degli α per cui la (1.1) non ammette soluzione unica in $L^2(U_\omega)$. Per quanto abbiamo prima detto, il problema si traduce nel mostrare che per quasi tutti gli $\alpha > 0$ esiste una costante $h > 0$ (dipendente da α) per cui vale la (2.2).

(1) Come è abituale, indichiamo con l^2 lo spazio delle successioni numeriche a quadrato sommabile.

In quanto segue, supporremo sempre $k \neq 0$ (ciò, come subito si vede, non è restrittivo in quanto, per $k = 0$, la (2.2) è verificata per ogni α se si prende $h < \mu_1^2$).

Diciamo V l'insieme degli $\alpha > 0$ per i quali la (2.2) non è verificata per alcun numero positivo h. Si tratta di far vedere che $m(V) = 0$ (qui m indica la misura di Lebesgue).

Osserviamo che, per decidere se la condizione (2.2) è realizzata, occorre possedere informazioni circa la famiglia degli autovalori dell'operatore $-\Delta$ in Ω, con condizioni di annullamento al contorno. Di tali autovalori si conosce la seguente valutazione asintotica (2): detto $\mathcal{N}(\lambda)$ il numero di autovalori compresi nell'intervallo $[0, \lambda]$, si ha

$$\mathcal{N}(\lambda) = c\, \lambda^{n/2} + o\,(\lambda^{n/2})$$

dove c è una certa costante (3).

Ciò premesso, fissiamo un intero $r > 1$ e diciamo I_r l'intervallo $\left[\frac{1}{r}, r\right]$. Per provare che $m(V) = 0$ basterà evidentemente far vedere che $m(I_r \cap V) = 0$, $\forall\, r \in N^+$. A tal fine consideriamo, in corrispondenza ad ogni $h > 0$ l'insieme V_h di tutti i numeri positivi α per cui la

$$|\mu_l^2 - k^2\alpha^2|\, |k|^m < h \tag{2.4}$$

è verificata per qualche coppia l, k.

Conviene a questo punto osservare che la (2.4), esplicitata rispetto ad α, dà

$$\beta_{kl} \leq \alpha \leq \gamma_{kl}$$

con

$$\beta_{kl} = \sqrt{\frac{\mu_l^2}{k^2} - \frac{h}{|k|^{m+2}}}, \qquad \gamma_{kl} = \sqrt{\frac{\mu_l^2}{k^2} + \frac{h}{|k|^{m+2}}}$$

per cui, posto $J_{kl} = [\beta_{kl}, \gamma_{kl}]$, V_h risulta unione della famiglia numerabile di intervalli $\{J_{kl}\}_{|k|,\, l \in N^+}$.

(2) [1], pag. 251.

(3) in effetti, risulta $c = \dfrac{m(\Omega)}{\pi^{n/2}\, \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$.

E' immediato constatare che

$$V_h \supset V = \bigcap_{\substack{\varrho \in R \\ \varrho > 0}} V_\varrho$$

e quindi

$$I_r \cap V \subset I_r \cap V_h$$

cosicché, per provare la tesi, basterà in definitiva far vedere che

$$\lim_{h \to 0} m(I_r \cap V_h) = 0.$$

Valutiamo dunque la misura di $I_r \cap V_h$, che, per quanto osservato, risulta costituito dagli intervalli $I_r \cap J_{kl}$.

Poniamo, per semplificare le notazioni,

$$b_k = \frac{|k|}{r}\sqrt{1 - \frac{hr^2}{|k|^{m+2}}}, \quad c_k = |k|\, r \sqrt{1 + \frac{h}{r^2 |k|^{m+2}}}$$

e osserviamo che se $\mu_l \notin [b_k, c_k]$, dev'essere, come facilmente si verifica, $\beta_{kl} > r$, oppure $\gamma_{kl} < 1/r$ e, di conseguenza, $I_r \cap I_{kl} = \emptyset$. Sarà perciò sufficiente considerare, in corrispondenza ad ogni k, solo quegli indici l per i quali è

$$(2.5) \qquad b_k \leq \mu_l \leq c_k .$$

Indicato con L_k l'insieme degli l per cui vale la (2.5), cerchiamo ora di dare una maggiorazione per la misura di $J_{kl}\,(l \in L_k)$.

Poichè non è restrittivo, per quanto vogliamo dimostrare, considerare solo gli h appartenenti ad un arbitrario intorno dello zero, conviene supporre che h sia tale da aversi $hr^2 < 1/2$ e quindi, essendo $r > 1$,

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} \frac{k}{r\sqrt{2}} &\leq b_k \\ c_k &\leq |k|\, r \sqrt{3/2}. \end{aligned}$$

Si ha poi

$$m(J_{kl}) = \gamma_{kl} - \beta_{kl} = \frac{\mu_l}{|k|}\left\{\sqrt{1 + \frac{h}{\mu_l^2 |k|^m}} - \sqrt{1 - \frac{h}{\mu_l^2 |k|^m}}\right\} \leq \frac{h\sqrt{2}}{\mu_l |k|^{m+1}} \text{ [4]}$$

[4] S'è qui applicata la disuguaglianza $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \leq x\sqrt{2}$, valida per $0 < x < 1$.

da cui, applicando la prima delle (2.6)

$$m(J_{kl}) \leq \frac{h\sqrt{2}}{b_k |k|^{m+1}} \leq \frac{2r}{|k|^{m+2}} h.$$

Di conseguenza, valgono le maggiorazioni

$$\sum_{l \in L_k} m(I_r \cap J_{kl}) \leq \sum_{l \in L_k} m(J_{kl}) \leq \frac{2r \operatorname{card}(L_k)}{|k|^{m+2}} h \leq$$

$$\leq \frac{2r\,\mathcal{N}(c_k^2)}{|k|^{m+2}} h \leq \frac{2r\,\mathcal{N}\left(\frac{3}{2}|k|^2 r^2\right)}{|k|^{m+2}} h$$

l'ultima delle quali è stata ottenuta tenendo conto della seconda delle disuguaglianze (2.6) e del fatto che $\mathcal{N}(\lambda)$ è funzione non decrescente.

Sommando ora rispetto all'indice k, si perviene al seguente risultato:

$$m(V_h \cap I_r) \leq \sum_{|k| \in N^+} \sum_{l \in L_k} m(I_r \cap J_{kl}) \leq 2rh \sum_{|k| \in N^+} \frac{\mathcal{N}\left(\frac{3}{2} k^2 r^2\right)}{|k|^{m+2}}.$$

Ma, per le ipotesi fatte, $\mathcal{N}\left(\frac{3}{2} k^2 r^2\right) \leq H|k|^n$ essendo H una certa costante, per la qual cosa, la serie ottenuta ha lo stesso comportamento della serie

$$\sum_{|k| \in N^+} \frac{1}{|k|^{m-n+2}}$$

che, in virtù dell'ipotesi $m > n - 1$, converge. Possiamo perciò affermare che, per un'opportuna costante $M > 0$, è

$$m(V_h \cap I_r) \leq Mh$$

da cui la tesi.

È interessante osservare che nel caso $n = 1$ (che peraltro conviene trattare con metodi più diretti) il nostro teorema ridà un risultato relativo all'approssimazione di un numero reale con frazioni (sviluppo in frazione continua). Sia infatti $\Omega = (0, \pi)$ e sia α irrazionale. In questo caso gli autovalori di $-\Delta$ su Ω sono conosciuti esplicitamente, avendosi $\lambda_l = l^2$ ($l \in N^+$). Allora, se ε è un qualunque numero positivo e si pone $m = \varepsilon$, il teorema afferma che, per quasi tutti gli α, esiste una costante $h > 0$ (che può dipendere da α e da ε) per cui

$$|l^2 - k^2\alpha^2|\,|k|^\varepsilon \geq h, \qquad \forall\ l, |k| \in N+.$$

In particolare, se $k > 0$,

$$\left|\frac{l}{k} - \alpha\right| \geq \frac{h}{\left|\frac{l}{k} + \alpha\right| k^{\varepsilon+1}} \geq \frac{h}{\alpha k^{2+\varepsilon}}.$$

Da questa disuguaglianza deriva che, se $\left\{\frac{l_\nu}{k_\nu}\right\}$ $(\nu \in N+)$ è una successione di razionali convergente verso α, la rapidità di convergenza è di ordine inferiore a $2 + \varepsilon$. D'altra parte, ogni irrazionale è approssimabile con successioni di razionali $\left\{\frac{l_\nu}{k_\nu}\right\}$ in modo che l'errore di approssimazione sia infinitesimo almeno di ordine due rispetto a $\frac{1}{k_\nu}$. Infatti, se $\frac{l_\nu}{k_\nu}$ è una qualunque ridotta dello sviluppo di α in frazione continua, si ha (teorema di Hurwitz)

$$\left|\alpha - \frac{l_\nu}{k_\nu}\right| \leq \frac{1}{k_\nu^2\sqrt{5}}.$$

Orbene, da quanto sopra esposto, risulta che gli irrazionali per cui l'errore di approssimazione è infinitesimo reale maggiore di due formano un insieme di misura nulla. Si ritrova così un caso particolare di un noto risultato dovuto a Khinchine (5).

(5) Si veda, ad es. [3], pag. 47.

BIBLIOGRAFIA

[1] AGMON S. *Lectures on elliptic boundary value problems*. Princeton (1965).

[2] KHINCHINE A. *Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen*. Math. Ann. 92 (1924), pp. 115-125.

[3] KOKSMA J. F. *Diophantische approximationen*. Springer, Berlin (1936).

[4] SOBOLEV S. L. *Applications of functional analysis in mathematical phisics* (tradotto dal russo da F. F. BROWDER). Am. Math. Soc., Providence (1963).

[5] YOSIDA K. *Functional analysis*. Berlin (1965).