GLI SPAZI DI FILTRI NELLO STUDIO DELLE COMPATTIZZAZIONI E DELLE STRUTTURE UNIFORMI DI SPAZIO PRECOMPATTO (*)

di GIANNI FACINI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Il problema della compattizzazione di uno spazio topologico e lo studio delle relazioni fra spazi topologici e spazi uniformi vengono qui trattati per via puramente insiemistica: ogni compattizzazione è costruibile come spazio di filtri; vi è corrispondenza biunivoca fra le strutture uniformi precompatte e le compattizzazioni, e fra queste e gl'insiemi di filtri soddisfacienti a certe condizioni.*

SUMMARY. - *The problem of compactification of a topological space as well as that of relations between topological and uniform spaces are studied in a set-theoretical formulation: every compactification may be obtained as space of filters; there is one-to-one correspondence between precompact uniform structures and compactifications, and between these and sets of filters satisfying certain conditions.*

Introduzione.

In questa nota tratto alcuni problemi riguardanti la compattizzazione ponendomi nell'ambito degli spazi di filtri introdotti da M. DOLCHER [6].

Nel capitolo I ho costruito, utilizzando la nozione di inviluppo introdotta da M. DOLCHER [8], una compattizzazione (in generale

(*) Pervenuto in Redazione il 12 novembre 1969.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

non (T_2)) con individuazione canonica di un punto limite per ogni ultrafiltro.

Il capitolo II è dedicato alle compattizzazioni (T_2).

Ho costruito una compattizzazione (T_2) che presenta tutti i vantaggi di quella di WALLMAN $W(E)$ (1) « se E è lo spazio da compattizzare, $W(E)$ il compattizzante, $\mathcal{A}$ l'insieme degli aperti di E e $\mathcal{A}^*$ l'insieme degli aperti di $W(E)$, la corrispondenza di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$ che ad ogni $A\,(\in \mathcal{A})$ associa l'insieme $A^*\,(\in \mathcal{A}^*)$ conserva le intersezioni e riunioni finite. Inoltre la topologia di E è portata in una base della topologia di $W(E)$ dalla corrispondenza, e da questo fatto segue che la dimensione di E (nel senso dei ricoprimenti) e la dimensione di $W(E)$ coincidono e che E e $W(E)$ hanno gruppi di omologie di Čech isomorfi ».

Di più la topologia del compattizzante $\gamma(E)$ che qui si introduce resta individuata dalla assegnazione di $\gamma(E)$ e non dipende dalla topologia di E se non in quanto $\gamma(E)$, come insieme, ne dipende.

A differenza da quanto è noto sulla compattizzazione di Wallman, la nostra compattizzazione $(\sigma, \gamma(E))$ è, al pari di quella $(e, \beta(E))$ di Čech, (T_2) ogniqualvolta E ammette compattizzazioni (T_2), ossia ogniqualvolta E è di Tychonoff.

Ancora nel capitolo II ho preso in considerazione una condizione necessaria e sufficiente per la compattizzabilità (T_2) a suo tempo formulata da A. GEROLINI [9], riesponendola nell'ambito degli spazi di filtri.

Il capitolo III è dedicato alle strutture uniformi di spazio precompatto.

Ho mostrato come dal teorema di GEROLINI sulla compattizzabilità (T_2) discenda una condizione necessaria e sufficiente per la uniformizzabilità ed ho mostrato il significato degli insiemi di GEROLINI nella teoria delle strutture uniformi.

Infine ho riesposto sinteticamente servendomi dei risultati di GEROLINI e degli altri da me ottenuti, il procedimento generale di definizione di strutture uniformi di spazio precompatto già ottenuto da G. AQUARO [10].

Si omettono le dimostrazioni di quelle proposizioni che conseguono facilmente dalle definizioni.

(1) Cito da J. L. KELLEY [2], p. 168.

Cap. I - COMPATTIZZAZIONI

1. Notazioni.

Useremo le seguenti notazioni fisse (« costanti » nel senso della logica matematica).

E spazio topologico,

τ topologia di E,

$\mathcal{A}$ insieme degli aperti di τ,

A elemento di $\mathcal{A}$,

F, G parti di E,

x punto di E,

σ_x filtro degli intorni di x;

Φ insieme di filtri su E munito della topologia τ_ω di cui sotto,

α, β, ξ punti di Φ,

$$\Phi_F = \{\alpha \mid F \in \alpha\};$$

$f^*: \mathfrak{P}(E) \longrightarrow \mathfrak{P}(\Phi)$ definito da: $f^*(F) = \Phi_F$ (*applicazione forte relativa a E e Φ*);

τ_ω topologia su Φ avente per base di aperti $f^*(\mathcal{A})$ (*topologia di Wallman su Φ*);

Σ insieme dei filtri d'intorni dei punti di E munito della topologia di Wallman:

$$\sigma: E \longrightarrow \Sigma \text{ applicazione canonica, } \sigma(x) = \sigma_x;$$

$[x]$ ultrafiltro su E generato da $\{\{x\}\}$ (*ultrafiltro-punto*), Φ_0 insieme degli ultrafiltri-punto su E munito della topologia di Wallman,

$$\mu: E \longrightarrow \Phi_0 \text{ applicazione canonica } \mu(x) = [x];$$

Θ sottospazio di Φ;

$\mathfrak{F}^*$ filtro su Φ;

$\mathfrak{U}^*$ ultrafiltro su Φ;

$\mathfrak{F}^*_\Phi = \bigcap_{\Theta \in \mathfrak{F}^*} (\bigcup_{\Theta \in \xi} \xi)$ (*nucleo di* $\mathfrak{F}^*$);

$\underset{\circ}{\mathfrak{F}^*} = \{\Theta \mid \Theta \circ \mathfrak{F}^*\}$ (*legato di* $\mathfrak{F}^*$) (2);

$\mathfrak{F}^{*\Phi} = \overset{-1}{f^*}(\mathfrak{F}^*)$ (inviluppo di Φ secondo $\mathfrak{F}^*$);

$SC\langle \Phi \rangle = \{\alpha \mid \exists\, \mathfrak{U}^* : \alpha = \mathfrak{U}^{*\Phi}\}$ (*saggio di compattezza di* Φ).

2. Premesse - La topologia di Wallman su Φ - Caratterizzazione della compattezza di Φ - Immersioni.

PROP. 1. *La topologia di Wallman è ereditaria per i sottospazi; ossia la topologia di Wallman su* Θ *coincide con la topologia indotta su* Θ *da quella di Wallman su* Φ.

PROP. 2. μ *è un omeomorfismo.*

PROP. 3. *Se* E *è* (T_0), σ *è un omeomorfismo.*

PROP. 4. $\{\Phi_A \mid A \in \alpha\}$ *è una base di intorni di* α.

DEF. α è *relativamente estratto da* Θ se $(\alpha \cap \mathscr{A}) \subset (\bigcup_{\xi \in \Theta} \xi)$.

PROP. 5. $(\alpha \in \overline{\Theta}) \Longleftrightarrow (\alpha \cap \mathscr{A}) \subset \bigcup_{\xi \in \Theta} \xi$.

PROP. 6. α *è aderente a* $\mathfrak{F}^*$ *se e solo se* $(\alpha \cap \mathscr{A}) \subset \mathfrak{F}^*_\Phi$.

PROP. 7. $\mathfrak{F}^*_\Phi = \{F \mid \Phi_F \circ \mathfrak{F}^*\}$.

PROP. 8. $\mathfrak{F}^*_\Phi = \overset{-1}{f^*}(\underset{\circ}{\mathfrak{F}^*})$.

PROP. 9. $\mathfrak{U}^*_\Phi = \overset{-1}{f^*}(\mathfrak{U}^*)$.

PROP. 10. $\mathfrak{F}^{*\Phi} = \bigcup_{\Theta \in \mathfrak{F}^*} (\bigcup_{\xi \in \Theta} \xi)$.

PROP. 11. $\mathfrak{U}^*_\Phi = \mathfrak{U}^{*\Phi}$.

DEF. Φ è un *ingrossamento relativo di* Φ' se per ogni $\alpha' (\in \Phi')$ esiste un elemento α di Φ tale che: $(\alpha \cap \mathscr{A}) \subset \alpha'$.

PROP. 12. α *è limite di* $\mathfrak{U}^*$ *se e solo se* α *è relativamente estratto da* $\mathfrak{U}^{*\Phi}$.

(2) $F \circ \alpha$ significa: per ogni $G \in \alpha$, $F \cap G \neq \emptyset$ e si legge «F è legato con α»; $\alpha \circ \beta$ significa: per ogni $F \in \alpha$, $G \in \beta$, è $F \cap G = \emptyset$ e si legge «α è legato con β». $\not\circ$ è la negazione di $\circ$ (ved. [6]).

LEMMA. *Condizione necessaria e sufficiente perchè Φ sia compatto e che Φ sia un ingrossamento relativo del suo saggio di compattezza $SC \langle \Phi \rangle$.*

PROP. 13. *Se è $\Phi_0 \subset \Phi$ si ha $\Phi_0 = \Phi$; se è $\Sigma \subset \Phi$ si ha $\bar{\Sigma} = \Phi$.*

2. La compattizzazione degli ultrafiltri.

Da quanto si è esposto segue il

TEOREMA. *Se Φ è lo spazio di Wallman di tutti gli ultrafiltri su E, allora Φ è compatto. Se $\mathfrak{U}^*$ è un ultrafiltro su Φ, l'inviluppo $\mathfrak{U}^{*\Phi}$ di Φ secondo $\mathfrak{U}^*$ è limite di $\mathfrak{U}^*$. Inoltre (μ, Φ) è una compattizzazione di E.*

CAP. II - COMPATTIZZAZIONI (T_2)

4. Notazioni.

E spazio topologico

F, G parti di E,

$\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ ricoprimenti di E,

$\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ insiemi di parti di E;

Φ spazio di Wallman di filtri su E *con base di aperti*,

α, β punti di Φ,

x punto di E,

σ_x filtro degli intorni di x;

Σ spazio di Wallman dei filtri d'intorni di punti di E;
$\sigma : E \longrightarrow \Sigma$ applicazione canonica;
$\mathfrak{M}$ insieme dei filtri su E massimali fra quelli con base di aperti;
$\mathfrak{F}^*$ filtro su Φ;
$\mathfrak{U}^*$ ultrafiltro su Φ;
(f, X), (g, Y) ampliamenti di E.

5. Premesse — La topologia di Dolcher su Φ — L'inclusione normale.

PROP. 1. *Poichè tutti gli elementi di Φ hanno base di aperti,* $f^*(\mathfrak{P}(E))$ *è base della topologia di Wallman su Φ.*

OSSERVAZIONE. La topologia di Wallman su Φ non è dunque altro che la topologia forte su Φ secondo la definizione posta da M. DOLCHER [6].

PROP. 2. *Se $\Phi \supset \Sigma$, condizione necessaria e sufficiente perchè Φ sia (T_2) è che per ogni coppia α, β di elementi di Φ esistano un $F \in \alpha$ ed un $G \in \beta$ tali che $F \cap G = \emptyset$.*

Esprimeremo ciò dicendo che gli elementi di Φ sono *a due a due slegati.*

DEF. (*Inclusione regolare*): $F \underset{r}{\subset} G$ se $\overline{F} \subset \mathring{G}$.

Chiamiamo *catena densa* ogni insieme totalmente ordinato da una relazione antisimmetrica e transitiva, tale che fra due qualunque a, b dei suoi elementi esiste un elemento c (eventualmente coincidente con a o con b).

DEF. (*Inclusione normale*): $F \underset{n}{\subset} G$ se esiste una catena densa (per la relazione $\underset{r}{\subset}$) di parti di E tutti gli elementi della quale contengono F e sono contenuti in G.

DEF. (*Filtri regolari e filtri normali*): α è *regolare* (risp. *normale*) se per ogni $G \in \alpha$ esiste un $F \in \alpha$ tale che $F \underset{r}{\subset} G$ (risp. $F \underset{n}{\subset} G$).

PROP. 3. *L'insieme ordinato per finezza di tutti i filtri normali su E è induttivo.*

PROP. 4. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un filtro normale α sia massimale è che per ogni coppia F, G tale che $F \underset{n}{\subset} G$ da $\alpha \circ F$ segua $G \in \alpha$.*

DEF. (*Raffinamenti regolari e normali di un ricoprimento di E*): $\mathcal{R}'$ *è un raffinamento regolare* (risp. *normale*) *di* $\mathcal{R}$ se per ogni $F \in \mathcal{R}'$ esiste un $G \in \mathcal{R}$ tale che $F \underset{r}{\subset} G$ (risp. $F \underset{n}{\subset} G$).

DEF. (*Ricoprimenti regolari e ricoprimenti normali*): $\mathcal{R}$ è *regolare* (risp. *normale*) se ammette un raffinamento regolare (risp. normale) finito.

PROP. 5. *Se* $(F_i)_{i \in J}$ *e* $(G_i)_{i \in J}$ *sono due famiglie di parti di* E *indiciate nello stesso insieme finito* J *e se per ogni* $i \in J$ *si ha:* $F_i \underset{n}{\subset} G_i$, *allora è anche* $(\bigcup_{i \in J} F_i) \underset{n}{\subset} (\bigcup_{i \in J} G_i)$ *e* $(\bigcap_{i \in J} F_i) \underset{n}{\subset} (\bigcap_{i \in J} G_i)$.

6. La compattizzazione $(\sigma, \gamma(E))$.

LEMMA. *Se* Φ *è lo spazio di tutti i filtri normali massimali su* E, *allora* Φ *è compatto e* (T_2).

Dimostrazione:

Per comodità diciamo che un ricoprimento è adeguato se ammette un sottoricoprimento finito.

È facile dimostrare che se $\mathcal{G}$ è un ricoprimento normale di E, $(\Phi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ è un ricoprimento adeguato di Φ.

Dimostriamo invece che se $(\Phi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ ricopre Φ, allora $\mathcal{G}$ è un ricoprimento normale di E.

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme degli F tali che $F \underset{n}{\subset} G$ per qualche $G \in \mathcal{G}$. Se $\mathcal{G}$ non è un ricoprimento normale di E, $\mathcal{F}$ non è adeguato. Allora l'insieme $\mathcal{F}'$ degli $F' = E - F\,(F \in \mathcal{F}')$ genera un filtro normale $\mathfrak{F}$. Se $\alpha > \mathfrak{F}$, α non entra in nessun $F \in \mathcal{F}$, e quindi in nessun $G \in \mathcal{G}$. Quindi $(\Phi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ non ricopre Φ, contro l'ipotesi.

Ciò dimostra che Φ è compatto. Tenuto conto della Prop. 2. del § 1 e del fatto che gli elementi di Φ sono massimali, e quindi due a due slegati, si ha che Φ è (T_2).

DEF. (*Spazi completamente regolari*): E è *completamente regolare* se tutti i σ_x sono normali (e quindi normali massimali).

DEF. (*Spazi di Tychonoff*): E è di Tychonoff se è completamente regolare e (T_0).

PROP. 6 *Se* E *è di Tychonoff, allora* E *è* (T_2).

DEF. (*Lo spazio* $\gamma(E)$): Se E è di Tychonoff lo spazio compatto e (T_2) Φ del Lemma si indica con il simbolo $\gamma(E)$.

TEOREMA. *Se E è uno spazio topologico di Tychonoff, σ l'omeomorfismo canonico di E sullo spazio Σ dei filtri d'intorni di punti di E, $\gamma(E)$ lo spazio di tutti i filtri normali massimali su E, allora la coppia $(\sigma, \gamma(E))$ è una compattizzazione (T_2) di E.*

7. Gli insiemi di Gerolini - Il teorema di Gerolini sulle compattizzazioni (T_2).

DEF. (*Ampliamenti di E*): (f, X) è un *ampliamento di E* se X è uno spazio topologico e f un omeomorfismo di E su di un sottospazio denso di X.

DEF. (*Relazione d'ordine nella classe degli ampliamenti di E*): $(f, X) \geq (g, Y)$ se esiste un'applicazione continua h di X su X tale che $h \circ f = g$.

PROP. 1. *La relazione $\leq$ sopra definita è riflessiva e transitiva.*

DEF. (*Ampliamenti topologicamente equivalenti*): $(f, X) \equiv (g, Y)$ se esiste un omeomorfismo h di X su Y tale che $h \circ f = g$.

DEF. ($G(f, X)$): Con $G(f, X)$ si indica la coppia (σ, Φ) dove Φ è lo spazio di Wallman delle controimmagini per l'estensione di f a $\mathfrak{P}(E)$ dei filtri d'intorni di punti di X.

DEF. (*Insiemi normali di filtri*): Φ è *normale* se per ogni $\alpha \in \Phi$ e per ogni $G \in \alpha$ esiste un $F \in \alpha$ tale che $F \subset_r G$ e che per ogni $\beta \in \Phi$ da $F \circ \beta$ segue $G \in \beta$.

DEF. (*Inclusione Φ-normale*): $F \subset_\Phi G$ se da $\alpha \circ F$ segue $G \in \alpha$ (per ogni $\alpha \in \Phi$).

DEF. (*Raffinamenti Φ-normali di un ricoprimento di E*): $\mathcal{R}'$ è un *raffinamento Φ-normale di $\mathcal{R}$* se ogni elemento di $\mathcal{R}'$ è contenuto Φ-normalmente in almeno un elemento di $\mathcal{R}$.

DEF. (*Ricoprimenti Φ-normali*): $\mathcal{R}$ è *Φ-normale* se ammette un raffinamento Φ-normale finito.

LEMMA. *Le due condizioni seguenti sono equivalenti:*

1) *Se $(\Phi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ ricopre Φ, allora $\mathcal{G}$ è un ricoprimento Φ-normale di E.*

2) *Φ è compatto.*

Dimostrazione :

È ovvio che 1) $\Longrightarrow$ 2). Dimostriamo che 2) $\Longrightarrow$ 1).

Sia $(\Phi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ un ricoprimento di Φ. Dimostriamo che $\mathcal{G}$ è un ricoprimento Φ-normale di E. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme degli F tali che $\mathcal{F} \subsetneq_{\Phi} \mathcal{G}$ per qualche $G \in \mathcal{G}$. Sia $\mathcal{F}'$ l'insieme degli $F' = E - F$ per $F \in \mathcal{F}$. Se $\mathcal{G}$ non è un ricoprimento Φ-normale di E, $\mathcal{F}'$ genera un filtro $\mathfrak{F}$. Allora l'insieme dei Φ_F per $F \in \mathfrak{F}$ è base di un filtro $\mathfrak{F}^*$ su Φ. Poichè Φ è compatto, esiste un $\alpha \in \Phi$ aderente a $\mathfrak{F}$; questo α è legato con ogni $F \in \mathfrak{F}$ e quindi con $\mathfrak{F}$ stesso. Allora α non entra in alcun elemento di $\mathcal{G}$, contro l'ipotesi che $(\Phi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ sia un ricoprimento di Φ.

Def. (*Normalizzazioni di un insieme di filtri. Insiemi e spazi di Gerolini*): Φ' è una *normalizzazione di* Φ se Φ' è normale e se per ogni $\alpha \in \Phi$ esiste un $\alpha' \in \Phi'$ tale che $\alpha' \prec \alpha$.

Gli *insiemi di Gerolini di filtri su* E sono le normalizzazioni Φ di $\mathfrak{M}$ tali che $\Phi \supset \Sigma$.

Gli *spazi di Gerolini* sono gli insiemi di Gerolini muniti della topologia di Wallman.

Teorema. *Se $\Phi \supset \Sigma$ le tre proposizioni seguenti sono equivalenti :*

1) *Φ è un insieme di Gerolini.*

2) *gli elementi di Φ sono a due a due slegati e se $(\Phi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ ricopre Φ, allora $\mathcal{G}$ è un ricoprimento Φ-normale di E.*

3) *Φ è compatto e (T_2).*

Ne segue che se E è (T_0), E ammette compattizzazioni (T_2) se e solo se esistono insiemi di Gerolini di filtri su E.

Se (f, X) è una qualsiasi compattizzazione (T_2) di E, $G(f, X)$ è topologicamente equivalente a (f, X).

Dimostrazione :

L'equivalenza delle proposizioni 2) e 3) discende dal Lemma precedente.

Dimostriamo che 1) $\Longrightarrow$ 2). Si procede come nella dimostrazione del Lemma fino alla costruzione di $\mathfrak{F}$. Per ipotesi esiste un $\alpha\ (\in \Phi)$ meno fine di un elemento di $\mathfrak{M}$ più fine di $\mathfrak{F}$. Ossia esiste un α tale che $\alpha \circ \mathfrak{F}$. Si conclude come nel Lemma.

Dimostriamo ora che (3) e 2)) $\Longrightarrow$ 1). Ossia supposte 3) e 2) dimostriamo che :

(a) Φ è normale

(b) per ogni $\mathfrak{F} \in \mathfrak{M}$ esiste un $\alpha\,(\in \Phi)$ tale che $\alpha \prec \mathfrak{F}$.

Dimostrazione di (a): Gli elementi di Φ sono regolari. Infatti sia $\alpha \in \Phi$ e $G \in \alpha$. Sia $\mathcal{G} = \{G\} \cup \{G' \mid G \not\circ \alpha\}$; $(\Phi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ ricopre Φ perchè Φ è (T_2). Allora $\mathcal{G}$ è normale e quindi regolare. Sia $(F_i)_{i \in J}$ un raffinamento regolare finito di $\mathcal{G}$. Sia J^* l'insieme degli $i \in J$ tali che $F_i \circ \alpha$. Allora $(\bigcup_{i \in J^*} F_i) \in \alpha$ e $(\bigcup_{i \in J^*} F_i) \underset{r}{\subset} G$. Dunque α è regolare.

Sia ora Ψ l'insieme dei β tali che $\beta \circ (E - G)$; Ψ è chiuso e quindi compatto. Sia $\mathcal{G}' = \{E - F \mid F \in \alpha,\ F \underset{r}{\subset} G\}$; $(\Psi_G)_{G \in \mathcal{G}}$ è un ricoprimento di Ψ perchè α è regolare e Φ è (T_2). Sia poi $(\Psi_{E - F_i})_{(E - F_i) \in \mathcal{G}'_J}$ un sottoricoprimento finito di $(\Psi_G)_{G \in \mathcal{G}'}$. Allora $\Psi_{\cup (E - F_i)} = \Psi_{E - (\cap F_i)} = \Psi$ e quindi da $\beta \in \Psi$ segue $(\bigcap_i F_i) \not\circ \beta$. Ciò dimostra che Φ è normale.

Dimostrazione di (b): Sia $\mathfrak{F}$ un elemento di $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{F}^*$ il filtro su Φ avente per base l'insieme dei Φ_F dei $F \in \mathfrak{F}$. Sia α un elemento di Φ aderente a $\mathfrak{F}^*$ e sia F un elemento di α. Allora $\Phi_{\mathring{F}} \circ \mathfrak{F}$ e e quindi $\mathring{F} \circ \mathfrak{F}$ e poichè $\mathfrak{F}$ è massimale, $\mathring{F} \in \mathfrak{F}$. Quindi $\alpha \prec \mathfrak{F}$.

8. Compattizzazioni di Gerolini e inviluppi.

Sia (σ, Φ) una compattizzazione di Gerolini di E (²).

Sia $\mathfrak{U}^*$ un ultrafiltro su Φ. Poichè Φ è compatto esiste uno ed uno solo punto di α di Φ limite di $\mathfrak{U}^*$.

Ricordando allora la proposizione 12 del Cap. I, § 1 si ha:

TEOREMA. *Con le notazione ora introdotte, il limite di* $\mathfrak{U}^*$ *è l'unico* $\alpha\,(\in \Phi)$ *tale che* $\alpha \prec \mathfrak{U}^{*\Phi}$.

(²) Con ciò si vuol dire che Φ è uno spazio di Gerolini.

Cap. III - STRUTTURE UNIFORMI DI SPAZIO PRECOMPATTO.

9. Notazioni.

E spazio topologico;

Φ insieme (o spazio) di Gerolini di filtri su E;

G parte di E;

$\mathcal{G}$ insieme di parti di E.

10. Significato degli insiemi di Gerolini nella teoria delle strutture uniformi - Struttura uniforme dei ricoprimenti Φ - Normali.

Teorema *Condizione necessaria e sufficiente perchè E sia uniformizzabile è che esistano insiemi di Gerolini di filtri su E.*

Prop 1. *Se E è uniformizzabile si ottiene una mappa biunivoca φ dell'insieme degli insiemi di Gerolini di filtri su E sull'insieme delle strutture uniformi di spazio precompatto su E associando ad ogni insieme Φ di Gerolini la struttura avente per insieme fondamentale di adiacenze l'insieme dei $\bigcup\limits_{G \in \mathcal{G}} (G \times G)$ al variare di $\mathcal{G}$ nell'insieme dei ricoprimenti Φ normali di E.*

Def. La struttura di spazio precompatto così definita si chiama *struttura uniforme dei ricoprimenti Φ-normali* (confrontare [10]).

Prop 2. *Se $\mathcal{U}$ è una struttura di spazio precompatto su E ed $\widetilde{E}$ è il completato di E per $\mathcal{U}$, $\varphi^{-1}(\mathcal{U})$ è l'insieme delle tracce su E dei filtri d'intorni di punti di $\widetilde{E}$, ossia l'insieme dei filtri di Cauchy minimali per $\mathcal{U}$ su E.*

Si può dire che dato un insieme di Gerolini di filtri su E esiste una ed una sola struttura uniforme di spazio precompatto su E avente Φ per insieme di filtri di Chauchy minimali.

Gli insiemi di Gerolini non sono altro che gli insiemi di filtri di Cauchy minimali per le strutture uniformi di spazio precompatto.

Corollario. *$(\sigma, \gamma(E))$ è topologicamente equivalente alla compattizzazione (T_2) di Urysohn-Stone-Čech.*

OSSERVAZIONE. *Si noti che quando la compattizzazione di Wallman è* (T_2), *essa è topologicamente equivalente a quella di Urysohn-Stone-Čech.*

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI: *Elements de mathématique.* Actualités Sci. Ind., 1940-68, Paris, Libro I e III.

[2] J. L. KELLEY: *General Topology.* D. Van Nostrand Company. Inc., 1955, New York.

[3] E. ČECH: *Topological spaces.* Academia-Publishing house of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1966, Prague.

[4] A. CZÁSZÁR: *Foundations of General Topology.* Pergamon Press, 1963, New York.

[5] W. SIERPINSKI: *Leçons sur les nombres transfinis.* Gauthier Villars, 1928, Paris.

[6] M. DOLCHER: *Topologie delle famiglie di filtri.* Rend. Sem. Matem. Univ. Padova, vol. XXIV, 1955, pp. 433-473.

[7] M. DOLCHER: *Topologie e strutture di convergenza.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie III, vol. XIV, 1960, pp. 63-92.

[8] M. DOLCHER: *Condizioni per la deducibilità di una topologia da strutture di convergenza.* Quaderni Matem. Univ. di Trieste (1967).

[9] A. GEROLINI: *Compactification des espaces séparés.* Comptes Rendus Acad. Sciences (Séance du 5 fevrier 1951).

[10] G. AQUARO: *Strutture uniformi di spazio precompatto.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, serie III - Vol. XI (1957) pp.149-181.