SOLUZIONI PERIODICHE DELL'EQUAZIONE NON LINEARE $u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon F(x, t, u) = 0$ (*)

di GIOVANNI TORELLI (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si dimostra l'esistenza di soluzioni periodiche per l'equazione* $\square u + \varepsilon F(x, t, u) = 0 \left(\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$, *con le condizioni alla frontiera:* $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, *generalizzando precedenti risultati. Un caso tipico è l'equazione* $\square u + \varepsilon (f + u^3) = 0$.

SUMMARY. - *Existence of* 2π*-periodical solutions of the problem* $\square u + \varepsilon F(x, t, u) = 0$ $\left(\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ *is proved; this generalizes previous results. A typical case is the equation:* $\square u + \varepsilon (f + u^3) = 0$.

Introduzione.

Scopo del presente lavoro è di dare un teorema di esistenza per soluzioni periodiche, rispetto a t, dell'equazione

$$\square u + \varepsilon F(x, t, u) = 0 \qquad \left(\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right),$$

con le condizioni di frontiera $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

Tale problema è stato affrontato da VEIVODA [I], [II] con ipotesi particolari sulla F; un importante contributo è stato portato

(*) Pervenuto in Redazione il 29 settembre 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università - Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

da RABINOWITZ [III] che ha assunto come ipotesi fondamentale $\partial F/\partial u \geq h$ (h costante positiva). Il risultato è stato ottenuto mediante una complicata tecnica, ispirata ai lavori di MOSER. Successivamente DE SIMON e l'A. [IV] hanno riottenuto, con qualche estensione, risultati simili a quelli di Rabinowitz mediante un procedimento più diretto che evita le tecniche di MOSER.

In questo lavoro dimostro un teorema di esistenza, valido in ipotesi nettamente più larghe: la condizione $\partial F/\partial u \geq h > 0$ viene sostituita con una condizione di monotonia qualificata per la F (sempre rispetto alla u). Si può così, ad esempio, affermare l'esistenza di soluzioni periodiche di equazioni del tipo: $\Box u + \varepsilon(f + u^3) = 0$.

Rimane aperto, in queste ipotesi più ampie, il problema dell'unicità.

È opportuno notare che la condizione di monotonia rispetto ad u non può essere tolta: ad esempio l'equazione $\Box\, u + \varepsilon f = 0$, non ammette, in generale, soluzioni periodiche.

La dimostrazione è fondata su un teorema di tipo astratto che generalizza quello del lavoro [IV].

1. Teorema di esistenza di tipo astratto.

Si considerino due spazi di BANACH (reali e complessi) A ed $\widehat{A}$, con $A \subset \widehat{A}$ (1), rispettivamente somma diretta di due varietà chiuse:

$$A = B \oplus C$$

$$\widehat{A} = \widehat{B} \oplus \widehat{C}.$$

Siano p_1 e p_2 i due proiettori continui sia in A che in $\widehat{A}$, tali che:

$$\left| \begin{array}{l} B = p_1 A \\ C = p_2 A \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} \widehat{B} = p_1 \widehat{A} \\ \widehat{C} = p_2 \widehat{A}. \end{array} \right.$$

Si deduce che è pure $B \subset \widehat{B}$, $C \subset \widehat{C}$.

Sia $C' \subset C$ con immersione compatta ed $A' = B \oplus C'$.

(1) Il segno $\subset$ tra spazi di Banach indica l'inclusione continua.

Si considerino ora due operatori α e β:

$\alpha : A' \longrightarrow \widehat{A}$ applicazione lineare continua, tale che $\alpha(B) = 0$, che la restrizione di α a C' sia isomorfismo di C' su $\widehat{C}$; risulta quindi definito l'operatore $\gamma = (\alpha\,|_{C'})^{-1}$.

$\beta : A \longrightarrow \widehat{A}$ continuo, in generale non lineare.

Consideriamo ora l'equazione:

$$(\alpha + \varepsilon\beta)\, u = 0 \quad \text{con} \quad u \in A'. \tag{1}$$

Pertanto se ε è un numero complesso, l'applicazione $(\alpha + \varepsilon\beta) : A' \longrightarrow \widehat{A}$ risulta continua.

Tale equazione, se ε è diverso da zero, mediante proiezione su $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, rispettivamente, dà luogo al sistema equivalente:

$$\begin{cases} p_1\, \beta\,(v + w) = 0 & (2) \\ \alpha\,(w) + \varepsilon\, p_2\, \beta\,(v + w) = 0 & (3) \end{cases}$$

con $v = p_1\, u$ e $w = p_2\, u$.

Si può ora enunciare il seguente:

TEOREMA. *Se la* (2) *ammette un'unica soluzione v in B per ogni $w \in C$ e se questa soluzione dipende con continuità da w, allora esiste un numero reale $\varepsilon_0 > 0$ tale che per $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, l'equazione* (1) *ha almeno una soluzione.*

DIMOSTRAZIONE: indicata con $\delta\,(w)$ la soluzione della (2), il problema diventa equivalente all'equazione:

$$w = -\,\varepsilon\gamma\, p_2\, \beta\,(\delta\,(w) + w) = \varepsilon\, T\,(w).$$

L'operatore $T : w \longrightarrow -\,\gamma\, p_2\, \beta\,(\delta\,(w) + w)$ risulta essere un'applicazione continua e compatta da C in C: infatti è una composizione di applicazioni continue e l'immersione di C' in C risulta inoltre compatta. Si consideri in C una sfera Σ_ϱ con centro nell'origine, raggio ϱ positivo, tale che l'immagine di Σ_ϱ secondo la T sia limitata; sia $k_\varrho = \sup\limits_{x \in \Sigma_\varrho} |\,T(x)\,|_C$ ed $\varepsilon_0 = 1/k_\varrho$, allora per ogni $|\,\varepsilon\,| \leq \varepsilon_0$ l'operatore εT porta la sfera Σ_ϱ in sè. Inoltre εT è compatto: per il teorema di SCHAUDER esiste allora almeno un punto unito.

2. Soluzioni generalizzate e spazi utilizzati.

Sia U l'insieme $[0, \pi] \times T$, con $T = \mathbb{R}/2\pi$ ($\mathbb{R}$ = retta reale); assegnata una funzione $F : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si consideri il problema:

$$(4) \qquad \begin{cases} \square\, u + \varepsilon F(x, t, u) = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0. \end{cases}$$

ε è un parametro reale. Si noti che per $\varepsilon = 0$, il problema proposto ammette infinite soluzioni.

È opportuno, per questo problema, introdurre una conveniente nozione di soluzione generalizzata.

Dato $g \in L^1(U)$, *si chiamerà soluzione generalizzata del problema* $\square\, u = g$ *con le condizioni ai limiti* $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, *una funzione* $u \in L^2(U)$, *tale che si abbia per ogni* $\varphi \in \mathcal{C}^2(U)$, *con* $\varphi(0, t) = \varphi(\pi, t) = 0$:

$$\iint_U u \,\square\, \varphi \, dx\, dt = \iint_U g\, \varphi\, dx\, dt.$$

Rispetto alla definizione di soluzione generalizzata data nel precedente lavoro [IV] vi è dunque un ampliamento, che consiste nell'assumere $g \in L^1(U)$ anziché $g \in L^2(U)$.

Si dimostra, anche in questo caso, che l'essere u soluzione generalizzata del problema posto equivale ad essere soluzione del sistema di FOURIER associato.

Infatti dalla relazione:

$$(5) \qquad (u \mid \square\, \varphi) = (g \mid \varphi) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{C}^2(U)\ (^2)$$

si deduce subito, ponendo $\varphi = \varphi_{km} = \dfrac{e^{ikt} \sin mx}{\pi}$,

$$-(k^2 - m^2)(u \mid \varphi_{km}) = (g \mid \varphi_{km}).$$

(2) Con la scrittura $(u \mid h)$ si indica l'integrale $\iint_U u(x, t)\, h(x, t)\, dx\, dt$ anche quando u ed h non siano entrambi in $L^2(U)$, purchè uno di essi sia in L^p e l'altro in L^q (p e q esponenti coniugati).

Ponendo $u_{km} = (u \mid \varphi_{km})$ e $g_{km} = (g \mid \varphi_{km})$, si ha:

$$(6) \qquad -(k^2 - m^2)\, u_{km} = g_{km}.$$

Viceversa, se vale la (6) vale pure la (5):
ponendo $\varphi_m(x, t) = \sum_{\substack{|k| \leq m \\ 0 < l < m}} \varphi_{kl}\, e^{ikt} \sin l\, x$,
(dove si indicano con φ_{kl} i coefficienti di FOURIER della funzione $\varphi \in \mathcal{C}^2(U)$), dalla (6) si ricava:

$$(u \mid \square\, \varphi_m) = (g \mid \varphi_m).$$

In primo luogo occorre allora dimostrare che $\lim_{m \to \infty} \square\, \varphi_m = \square\, \varphi$ in $L^2(U)$.

Ciò è immediato in quanto $\square\, \varphi_m$ è la ridotta di posto m-esimo della serie di FOURIER di $\square\, \varphi$. Bisogna poi far vedere che $\lim_{m \to \infty} \varphi_m = \varphi$ uniformemente. Infatti se una funzione doppiamente periodica è di classe $\mathcal{C}^2$, la sua serie doppia di FOURIER converge uniformemente.

È opportuno ora introdurre altri spazi che vengono utilizzati nel presente lavoro.

Sia:

$$A = L^{\varrho+1}(U) \qquad \varrho > 1$$

$$\widehat{A} = L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}(U);$$

si ha evidentemente $A \subset \widehat{A}$.

Sia:

$$K(u)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [u(x, s - x) - u(x, s + x)]\, dx = \Psi(s) \qquad u \in \widehat{A},$$

$$K^*(\Psi) = \Psi(t + x) - \Psi(t - x),$$

$$p_1 = K^* K;$$

p_1 risulta essere un proiettore continuo sia in $L^{\varrho+1}$ che in $L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}$.

Si pone ancora:

$$p_2 = I - p_1.$$

I due proiettori p_1 e p_2 risultano «autoaggiunti» nei prodotti di dualità fra gli spazi coniugati A ed $\widehat{A}$.

Siano:

$$B = p_1(A) \qquad C = p_2(A)$$

$$\widehat{B} = p_1(\widehat{A}) \qquad \widehat{C} = p_2(\widehat{A})$$

$$N = p_1(L^2(U))$$

Si osserva che $B \subset N$ e che $B = N \cap L^{\varrho+1}(U)$.

È opportuno ancora notare che:

a) $\widehat{B}$ è la varietà di $\widehat{A}$ costituita dagli elementi ortogonali ([3]) a C e che C risulta essere la varietà di A costituita dagli elementi ortogonali a $\widehat{B}$;

b) $\widehat{C}$ è la varietà costituita dagli elementi di $\widehat{A}$ ortogonali a B e B è la varietà di A costituita dagli elementi ortogonali a $\widehat{C}$.

Dimostro la *a*): se $u \in \widehat{B}$, allora risulta $p_1 u = u$; per ogni $w \in C$, si ha che:

$$(u \mid w) = (p_1 u \mid w) = (u \mid p_1 w) = 0.$$

Viceversa sia $u \in \widehat{A}$ ed ancora $(u \mid w) = 0$ per ogni $w \in C$. Allora per ogni $z \in A$, vale pure $(u \mid p_2 z) = 0$; ma $(p_2 u \mid z) = (u \mid p_2 z)$; ne consegue che $p_2 u = 0$ e quindi che $u \in \widehat{B}$.

Analogamente si dimostrano le altre affermazioni.

Si riconosce che gli elementi di B (o $\widehat{B}$) sono tutte e sole le funzioni rappresentabili nella forma:

$$u(x, t) = \Psi(t + x) - \Psi(t - x)$$

essendo Ψ funzione periodica appartenente allo spazio $L^{\varrho+1}(T)$ (o $L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}(T)$) ed a valor medio nullo; con questa condizione Ψ risulta univocamente determinata da u.

Risulta ancora che $\widehat{B}$ puó essere identificato con il duale di B e che questo ultimo spazio risulta riflessivo.

([3]) Uso questo termine in senso ampliato, come del resto l'espressione di prodotto scalare fra spazi coniugati.

Quanto detto permette di caratterizzare le varietà $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ mediante i coefficienti di FOURIER, rispetto al sistema $\dfrac{\sin mx \cdot e^{ikt}}{\pi}$. Si riconosce facilmente che $\widehat{B}$ è la varietà degli elementi di $\widehat{A}$ che hanno nulli tutti i coefficienti di FOURIER per $m \neq k$, mentre $\widehat{C}$ è la varietà degli elementi di $\widehat{A}$ che hanno nulli tutti i coefficienti di FOURIER per $m = k$.

Infatti se $u \in \widehat{B}$ allora, come visto, $u(x, t) = \Psi(t + x) - \Psi(t - x)$ con $\Psi \in L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}(U)$. I coefficienti di FOURIER di u risultano:

$$u_{km} = \iint_U [\Psi(t + x) - \Psi(t - x)]\, e^{-ikt} \sin mx \, dx \, dt;$$

ora con ovvii cambiamenti di variabile:

$$\iint_U \Psi(t \pm x)\, e^{-ikt} \sin mx \, dx \, dt =$$

$$= \int_0^\pi \sin mx \, dx \int_0^{2\pi} \Psi(z)\, e^{-ik(z-x)} \, dz = \Psi_k \int_0^\pi \sin mx \, e^{\pm ikx} \, dx$$

ove

$$\Psi_k = \int_0^{2\pi} \Psi(z)\, e^{-ik(z-x)} \, dz.$$

Quindi:

$$u_{km} = \iint_U [\Psi(t + x) - \Psi(t - x)]\, e^{-ikt} \sin mx \, dx \, dt =$$

$$= 2i\, \Psi_k \int_0^\pi \sin mx \left\{\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}\right\} dx = 2i \int_0^\pi \sin mx \sin kx \, dx = 0$$

se $k \neq m$.

Se invece $u \in \widehat{C}$, allora $p_1 u = 0$ od ancora $K(u) = 0$; ciò equivale a

$$\int_0^\pi [u(x, s - x) - u(x, s + x)] \, dx = 0.$$

Questa relazione equivale a sua volta al sistema di infinite relazioni che si ottengono moltiplicando per e^{iks} ($k \in \mathbf{Z}$) ed integrando in $[0, 2\pi]$; dette relazioni possono esser messe nella forma:

$$\int_0^\pi dx \int_0^{2\pi} u(x, t)\, e^{ikt} \sin kx \, dt = 0$$

da cui segue che $u_{kk} = 0$.

Ovviamente in modo analogo risultano caratterizzate le varietà B e C.

Risulta ancora che B è la varietà di A costituita dagli elementi u tali che $\square u = 0$.

Si consideri ora il problema $\square u = g$ con $g \in \widehat{A}$. Scrivendo il sistema di FOURIER associato, si vede che tale problema ammette soluzione se e solo se $g \in \widehat{C}$, cioè se i coefficienti di FOURIER della g sono nulli allorchè $m = k$. Ora si assegni $g \in \widehat{C}$: si vuol dimostrare che il problema (generalizzato) $\square u = g$, con le consuete condizioni al contorno, ammette in C una ed una sola soluzione.

Traducendo il problema con il metodo di FOURIER, è comodo utilizzare il sistema ortonormale $e^{i(kt+mx)}$ ($m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Si ha allora, posto

$$g(x, t) = \sum_{k^2 \neq m^2} g'_{km}\, e^{i(kt+mx)},$$

dove

$$g'_{-km} = -g'_{km}, \qquad \sum_{k^2 \neq m^2} |g'_{km}| < \infty$$

$$u(x, t) = \sum_{k^2 \neq m^2} \frac{g'_{km}}{k^2 - m^2}\, e^{i(kt+mx)}.$$

La soluzione del problema risulta il prodotto di convoluzione nel toro $T^2 = (R/\text{mod } 2\pi)^2$ della funzione $K(t, x)$ per la g, ove:

$$K(t, x) = \sum_{k^2 \neq m^2} \frac{e^{i(kt+mx)}}{k^2 - m^2}.$$

Studiando opportunamente detto nucleo $K(t, x)$, risulta che è limitato con discontinuità sulle linee $t + x = 0$, $t - x = 0$; infatti eseguendo un cambiamento di variabili e precisamente ponendo:

$$\left| \begin{array}{l} t = \xi + \eta \\ x = \xi - \eta \end{array} \right. \qquad K(t, x) = \widehat{K}(\xi, \eta),$$

si ha:

$$\widehat{K}(\xi, \eta) = \sum_{k^2 \neq m^2} \frac{e^{i(k+m)\xi + i(k-m)\eta}}{k^2 - m^2} = \sum_{\substack{r \neq 0 \\ s \neq 0}} \frac{e^{ir\xi + is\eta}}{r \cdot s}$$

avendo posto:

$$\left| \begin{array}{l} k + m = r \\ k - m = s \end{array} \right.$$

e prendendo r ed s entrambi dispari od entrambi pari.

Ancora risulta:

$$\widehat{K}(\xi, \eta) = \sum_{\substack{r \neq 0 \\ r \text{ pari}}} \frac{e^{ir\xi}}{r} \cdot \sum_{\substack{s \neq 0 \\ s \text{ pari}}} \frac{e^{is\eta}}{s} + \sum_{\substack{r \neq 0 \\ r \text{ dispari}}} \frac{e^{ir\xi}}{r} \cdot \sum_{\substack{s \neq 0 \\ s \text{ dispari}}} \frac{e^{is\eta}}{s}.$$

Si introducono ora le seguenti due funzioni:

$$\omega(t) = \left| \begin{array}{l} +1 \text{ per } 0 < t < \pi \\ -1 \text{ per } -\pi < t < 0 \end{array} \right. \qquad \gamma(t) = \left| \begin{array}{l} \frac{2}{\pi} t + 2 \text{ per } -\pi < t < 0 \\ \frac{2}{\pi} t - 2 \text{ per } 0 < t < \pi \end{array} \right.$$

con calcoli elementari si ottiene:

$$\frac{\pi_i}{2} \omega(t) = \sum_{k \text{ dispari}} \frac{e^{ikt}}{k} \qquad \frac{\pi}{2i} \gamma(t) = \sum_{\substack{-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{k}$$

ed ancora:

$$\sum_{\substack{k \neq 0 \\ k \text{ pari}}} \frac{e^{ikt}}{k} = \frac{\pi}{2i} \gamma(t) - \frac{\pi i}{2} \omega(t) = \frac{\pi}{2i} [\gamma(t) + \omega(t)] = \frac{\pi}{2i} \sigma(t)$$

avendo posto ovviamente: $\sigma(t) = \gamma(t) + \omega(t)$ di conseguenza risulta:

$$\widehat{K}(\xi, \eta) = -\frac{\pi^2}{4} \sigma(\xi) \sigma(\eta) - \frac{\pi^2}{4} \omega(\xi) \omega(\eta) = -\frac{\pi^2}{4} [\sigma(\xi) \sigma(\eta) + \omega(\xi) \omega(\eta)].$$

Il nucleo K ha quindi l'espressione

$$K(t, x) = -\frac{\pi^2}{4}\left[\sigma\left(\frac{t+x}{2}\right)\sigma\left(\frac{t-x}{2}\right) + \omega\left(\frac{t+x}{2}\right)\omega\left(\frac{t-x}{2}\right)\right],$$

risulta quindi limitato ed ha discontinuità sulle rette $t + x = 0$ e $t - x = 0$.

Da questa espressione risulta che K definisce un operatore compatto di L^1 in L^p, con qualsiasi $p < +\infty$ (4).

Si indichi ora con C' il sottospazio di C formato dalle soluzioni del problema $\Box u = g$ (con $g \in \widehat{C}$), con la seguente norma $\| u \|_{C'} = \| g \|_{\widehat{A}}$. Lo spazio C', ora definito, risulta essere uno spazio di Banach.

Da quanto sopra detto risulta che l'operatore $\Box$ induce un isomorfismo (algebrico e topologico) di $\widehat{C}$ su C' e che questo spazio C' risulta contenuto algebricamente e topologicamente in C, con immersione compatta.

È possibile ora enunciare il seguente:

3. Teorema principale.

Se la funzione F, che compare nel problema (4), *verifica le seguenti ipotesi:*

(i) *$F(x, t, u)$ risulta continua rispetto ad u per quasi tutte le coppie (x, t) e misurabile per ogni u rispetto ad (x, t);*

(ii) *esiste una costante $k > 0$, tale che per ogni coppia (x, t) ed ogni coppia (u_1, u_2) con $u_2 \geq u_1$, sia:*

$$F(x, t, u_2) - F(x, t, u_1) \geq k(u_2 - u_1)^\varrho$$

essendo ϱ una costante maggiore di uno;

(iii) *per ogni u valga la seguente relazione:*

$$| F(x, t, u)| \leq H | u |^\varrho + M$$

essendo H una costante positiva ed M una opportuna costante reale, allora esiste $\varepsilon_0 > 0$, tale che per ogni ε, con $0 < |\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, il problema posto ammette (almeno) una soluzione $u \in A'$.

(4) Ciò per noti risultati, vedere ad esempio il lavoro [V].

DIMOSTRAZIONE: si applicano i risultati ottenuti nel § 1, dopo aver verificato che risultano soddisfatte tutte le ipotesi del teorema di esistenza di tipo astratto, enunciate in detto paragrafo.

a) *Parte lineare della dimostrazione.* Gli spazi introdotti nel § 2: $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, A, B, C$ soddisfano alle ipotesi richiesta nel § 1 e così pure i proiettori p_1 e p_2; lo spazio C', introdotto nel § 2, risulta contenuto in C con immersione compatta.

L'operatore $\alpha = \square : A' = B + C' \rightarrow A$ risulta essere una applicazione lineare continua, tale che $\alpha(B) = 0$ e la restrizione di α a C' risulta un isomorfismo di C' su $\widehat{C}$ (come visto nel § 2); risulta quindi definito l'operatore $\gamma = (\alpha\,|_{C'})^{-1}$.

b) *Parte non lineare della dimostrazione.* Si consideri l'operatore:

$$\beta(u)(x, t) = F(x, t, u(x, t)) \qquad u \in A$$

$$\beta \text{ porta } A = L^{\varrho+1} \text{ in } \widehat{A} = L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}.$$

Tale operatore è continuo fra tali spazi per noti risultati (5).

È necessario ora dimostrare che l'equazione:

$$p_1 \beta(v + w) = 0 \tag{7}$$

ammette una ed una sola soluzione in B, per ogni $w \in C$ e che questa soluzione dipende con continuità da w.

Basterà in primo luogo dimostrare che l'applicazione:

$$\vartheta_w : v \rightarrow \vartheta_w\, v = p_1\, \beta(v + w),$$

applicazione di B in $\widehat{B}$ risulta, per ogni $w \in C$, suriettiva.

Si può, a questo proposito, far uso di risultati ottenuti indipendentemente da BROWDER [VII] e da MINTY [VIII] per spazi di BANACH riflessivi X ed operatori T con $D(T) = X$.

Sia T un operatore monotono da $D(T) = X$ a X^* (spazio coniugato di X), tale operatore risulti continuo da ogni segmento di X ad X^* dotato della topologia debole ed ancora risulti coercivo (6), allora l'immagine di T coincide con X^*.

(5) vedere ad esempio [VI].

(6) Un operatore T si dice coercivo se $(Tu \mid u)/\| u \| \rightarrow \infty$, quando $\| u \| \rightarrow \infty$.

Come dimostrato nel § 2, lo spazio B risulta riflessivo ed il coniugato di B risulta essere $\widehat{B}$. L'operatore ϑ_w è strettamente monotono; infatti comunque si prefissi $w \in C$, per ogni coppia v_1, v_2, ponendo $u_1 = v_1 + w_1$, $u_2 = v_2 + w_2$ e applicando la (ii), si ha (7):

$$(\vartheta_w v_2 - \vartheta_w v_1 \mid v_2 - v_1) = \iint_U \{p_1 \beta(u_2) - p_1 \beta(u_1)\} \{v_2 - v_1\} \, dx \, dt =$$

$$= \iint_U \{\beta(u_2) - \beta(u_1)\} \{v_2 - v_1\} \, dx \, dt =$$

$$= \iint_U \{\beta(u_2) - \beta(u_1)\} \{u_2 - u_1\} \, dx \, dt \geq k \iint_U | u_2 - u_1 |^{\varrho+1} \, dx \, dt \geq 0.$$

L'operatore ϑ_w risulta continuo fra B e $\widehat{B}$ in quanto prodotto di due operatori continui.

L'operatore ϑ_w risulta pure coercivo; infatti si consideri la funzione: $v \longrightarrow \dfrac{(\vartheta_w v \mid v)}{\| v \|_B}$ definita in B, se ne studi il comportamento asintotico.

$$\frac{(\vartheta_w v \mid v)}{\| v \|_B} = \frac{(p_1 \beta(v + w) \mid v)}{\| v \|_B} = \frac{(\beta(v + w) \mid v)}{\| v \|_B} =$$

$$= \frac{1}{\| v \|_B} \iint_U F(x, t, v + w) \, v \, dx \, dt.$$

Ma sempre per la (ii):

$$(F(x, t, v + w) - F(x, t, w) \mid v) \geq k \, \| v \|_{L^{\varrho+1}}^{\varrho+1}$$

da cui con semplici passaggi:

$$(F(x, t, v + w) \mid v) \geq k \, \| v \|_{L^{\varrho+1}}^{\varrho+1} - \| F(x, t, w) \|_{L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}} \| v \|_{L^{\varrho+1}} =$$

$$= \| v \|_{L^{\varrho+1}} \{ k \, \| v \|_{L^{\varrho+1}}^{\varrho} - \| F(x, t, w) \|_{L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}} \};$$

(7) Occorre ricordare che i proiettori p_1 e p_2 risultano « autoaggiunti » nei prodotti di dualità tra A e $\hat{A}$.

da cui:

$$(8) \qquad \frac{(\vartheta_w\, v \mid v)}{\| v \|_{L^{\varrho+1}}} \geq k \| v \|^{\varrho}_{L^{\varrho+1}} - \| F(x, t, w) \|_{L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}},$$

e quindi la coercività dell'operatore ϑ_w.

Allora per i citati risultati di BROWDER e MINTY l'equazione (7) ammette soluzione per ogni $w \in C$; tale soluzione è unica essendo l'operatore ϑ_w, come visto, strettamente monotono.

Si indichi con $\bar{v} = \delta(w)$ la soluzione della (7).

Bisogna ora dimostrare la continuità di $w \to \delta(w)$. Per ottenere questo risultato prima si fa vedere che, se w varia in un insieme limitato di C, pure la $\delta(w)$ varia in un insieme limitato di B. Infatti per quanto detto nel § 2, l'equazione (7) equivale a $(F(x, t, v + w) \mid \xi) = 0 \quad \forall\, \xi \in B$, da ciò segue: $(F(x, t, \bar{v} + w) \mid \bar{v}) = 0$, ed ancora $(\vartheta_w\, \bar{v} \mid \bar{v}) = 0$.

Dalla (8) allora risulta:

$$k \| \bar{v} \|^{\varrho}_{L^{\varrho+1}} - \| F(x, t, w) \|_{L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}} \leq 0,$$

ed ancora:

$$\| \bar{v} \|_{L^{\varrho+1}} = \| \delta(w) \|_{L^{\varrho+1}} \leq \frac{\| F(x, t, w) \|^{1/\varrho}_{L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}}}{k^{1/\varrho}} \leq H' \| w \|_{L^{\varrho+1}} + M'$$

essendo H' ed M' opportune costanti; infatti per la (iii):

$$\| F(x, t, w) \|^{1/\varrho}_{L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}} = \left\{ \iint_U | F(x, t, w) |^{\frac{\varrho+1}{\varrho}} dx\, dt \right\}^{1/\varrho+1} \leq$$

$$\leq H^{1/\varrho} \left\{ \iint_U | w |^{\varrho+1} dx\, dt \right\}^{1/\varrho+1} + M' = H' \| w \|_{L^{\varrho+1}} + M'.$$

Assegnati ora arbitrariamente due valori w_1, w_2 appartenenti a C ed indicate con v_1 e v_2 le rispettive soluzioni della (7), sempre ponendo $u_1 = v_1 + w_1$, $u_2 = v_2 + w_2$, si ha per la (ii):

$$(9) \qquad (F(x, t, u_2) - F(x, t, u_1) \mid u_2 - u_1) \geq k \| u_2 - u_1 \|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}};$$

ancora risulta:

$$(10) \quad (F(x, t, u_2) - F(x, t, u_1) \mid u_2 - u_1) = (F(x, t, u_2) - F(x, t, u_1) \mid w_2 - w_1);$$

e d'altra parte:

$$(11)\qquad |(F(x,t,u_2)-F(x,t,u_1)|\,w_2-w_1)|\leq \|F(u_2)-$$

$$-F(u_1)\|_{L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}}\|w_2-w_1\|_{L^{\varrho+1}}.$$

Se w_1 e w_2 variano in un limitato S di C, come già visto, pure v_1 e v_2 appartengono ad un limitato di B, di conseguenza pure u_1 ed u_2 variano in un limitato di A. Ricordando la (iii) risulta quindi che $\|F(u_2)-F(n_1)\|_{L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}}$ è maggiorata da una costante K_S^*, che dipende dalle costanti che compaiono nella (iii) e da S. Riunendo i risultati delle (9), (10) e (11), si ottiene:

$$\|u_2-u_1\|_{L^{\varrho+1}}\leq K_S^{*1/\varrho+1}\|w_2-w_1\|_{L^{\varrho+1}}^{1/\varrho+1}$$

ed ancora:

$$\|v_2-v_1\|_{L^{\varrho+1}}\leq\|w_2-w_1\|_{L^{\varrho+1}}+\|u_2-u_1\|_{L^{\varrho+1}}\leq$$

$$\leq\widetilde{K}\|w_2-w_1\|_{L^{\varrho+1}}^{1/\varrho+1},\ \text{con } \widetilde{K} \text{ costante opportuna.}$$

Risulta quindi dimostrato che la soluzione della (7) dipende con continuità da w.

Sono pertanto completamente soddisfatte le ipotesi del teorema astratto del §. 1 e di conseguenza il problema (4) ammette soluzione.

BIBLIOGRAFIA

[I] O. VEJVODA: *Nonlinear boundary-value problems for differential equations.* Differential equations and their applications. Proceedings of the Conference (Prague Sept. 1962), 199-215.

[II] O. VEJVODA: *Periodic solutions of a linear and weakly non linear wave equations in one dimention,* I. Czechoslovak Math. J. 14 (89) (1964), 341-379.

[III] P. H. RABINOWITZ: *Periodic solutions of non linear hyperbolic partial differential equations.* Communications on pure and applied Math. Vol. XX-1 (feb. 1967), 145-205.

[IV] L. DE SIMON-G. TORELLI: *Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari.* Ren. Sem. Mat. Univ. Padova; Vol. XL (1968), 380-401.

[V] S. BANACH: *Théorie des opérations linéaires.* NW Afner (1962).

[VI] M. A. KRASNOSEL'SKIJ: *Topological methods in the theory of non linear integral equations*; Pergamon Press (1964).

[VII] F. E. BROWDER: *Nonlinear elliptic boundary value problems.* Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 862-874.

[VIII] G. J. MINTY: *On a « monotonicity » method for the solution of non linear equations in Banach spaces.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), 1038-1041.