SUGLI SPAZI AFFINI SOPRA UN ANELLO (*)

di GAETANO PIZZARELLO (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si esaminano gli spazi affini su certi anelli A, non necessariamente commutativi, recentemente introdotti da R. Permutti e che sono dotati univocamente di dimensione $n \geq 2$. Viene introdotta la nozione di sottospazi in modo che questi risultino spazi affini sul medesimo anello, dotati di dimensione $m \leq n$. Si studiano, in particolare, i legami fra tali sottospazi e i sottomoduli di A_d^n pervenendo a delle condizioni necessarie, e in taluni casi sufficienti, affinchè un sottomodulo di A_d^n sia un sottospazio dello spazio affine considerato.*

SUMMARY. - *Affine spaces on certain, not necessarily commutative, rings A are examined. For these spaces, recently introduced by R. Permutti, it is possible to assign a dimension $n\,(\geq 2)$; the notion of subspaces is here introduced in such a way that they are affine spaces on the same ring A, with dimension $m \leq n$. Particulary, connections between these subspaces and submodules of A_d^n are examined and necessary (in some case sufficient) conditions are obtained for a submodule of A_d^n to be a subspace of the given affine space.*

In una recente memoria lincea R. PERMUTTI [1] ha preso in considerazione uno spazio affine S_n $(n \geq 2)$ sopra un anello A unitario, privo di divisori dello zero e verificante le proprietà:

a) ogni coppia di elementi non entrambi nulli ammette un massimo comune divisore destro;

b) per ogni coppia di elementi non nulli esiste un comune multiplo sinistro diverso da zero.

(*) Pervenuto in Redazione il 20 maggio 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C.N.R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

Come « punti » di S_n si assumono le n-ple ordinate di elementi di A, mentre le « rette » sono definite come gli insiemi dei punti $P = (\alpha_1 + \lambda_1 k, \dots, \alpha_n + \lambda_n k)$, con $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ punto fissato qualsiasi, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ elementi non tutti nulli di A, tali che m.c.d. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$ (¹) e k variabile in A. Il parallelismo fra rette è definito nel modo seguente: la retta $r = \{\alpha_1 + \lambda_1 k, \dots, \alpha_n + \lambda_n k\}$ è parallela alla retta $r' = \{\alpha'_1 + \lambda'_1 k, \dots, \alpha'_n + \lambda'_n k\}$ se e solo se $\lambda'_i = \lambda_i \omega$ $(i = 1, \dots, n)$ per qualche elemento unitario ω di A. Tale parallelismo è una relazione di equivalenza nell'insieme delle rette di S_n.

Lo spazio affine S_n assume la struttura di modulo destro su A qualora si definiscano le operazioni interna (somma) ed esterna (prodotto) ponendo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) k = (\alpha_1 k, \dots, \alpha_n k)$, rispettivamente. Il modulo così ottenuto sarà indicato con l'usuale simbolo A^n_d. Si riconosce allora che A^n_d è *libero di tipo finito*, ammettendo una base d'ordine n. La condizione b) comporta poi che tutte le basi hanno il medesimo ordine e pertanto resta univocamente assegnata la « dimensione » $(= n)$ di A^n_d.

Nella stessa memoria [1] si prova che S_n è uno *spazio di traslazioni* e che, di conseguenza, vale il « piccolo » teorema di DESARGUES (relativo a triangoli equipollenti); ma non esistono necessariamente tutte le possibili dilatazioni (valendo, tuttavia, un teorema di DESARGUES affine in forma indebolita). L'esistenza di tutte le possibili traslazioni assicura inoltre che ogni retta di S_n può considerarsi traslata di una retta per $O = (0, \dots, 0)$; le rette per O, a loro volta, sono poi sottomoduli di A^n_d.

Scopo della presente nota è l'introduzione e lo studio dei sottospazi degli spazi affini considerati in [1] con l'ulteriore condizione che ogni ideale destro dell'anello A, su cui è costruito lo spazio, sia ideale principale destro (²). Tale condizione appare essenziale per poter assegnare la « dimensione » $m\ (\leq n)$ di ciascun sottospazio di S_n, in guisa che, anzi, questo risulti uno spazio affine di dimensione m, nel senso di PERMUTTI, sul medesimo anello A.

In varie dimostrazioni si fa riferimento a risultati di una mia precedente nota [2], per cui ho ritenuto opportuno richiamarli nel n. 1.

Nel n. 2 si studiano certe relazioni fra i sottomoduli unidimen-

(¹) Si ricorda che il m.c.d. destro (che indicheremo solo con m.c.d.) è definito a meno di elementi associati a destra; in particolare, se il m.c.d. è uguale ad 1, esso è definito a meno di elementi unitari di A.

(²) Come verrà precisato al n. 1, quest'ulteriore ipotesi implica già il verificarsi della condizione b).

sionali di A_d^n e le rette di S_n passanti per O rilevando che, mentre ogni retta per O è un sottomodulo unidimensionale di A_d^n non risulta vero il viceversa. A tal fine si assegna una caratterizzazione delle rette per O mostrando che esse sono tutti e soli i sottomoduli unidimensionali massimi di A_d^n, definiti nella mia nota [2].

Si definiscono quindi (n. 3) i sottospazi di S_n e si mostra che ogni tale sottospazio è traslato di uno ed un solo sottomodulo di A_d^n. Poggiando sulla circostanza che ogni sottomodulo di A_d^n è dotato di dimensione, si definisce la dimensione di un sottospazio come quella del sottomodulo di cui è traslato. Risulta così, in particolare, che le rette di S_n sono traslate di tutti e soli i sottomoduli unidimensionali massimi di A_d^n.

Analoghe circostanze si presentano per i sottospazi di dimensione qualunque: ogni sottospazio di dimensione m è traslato di un (unico) sottomodulo m-dimensionale massimo (n. 5). Segue di qui che i sottomoduli m-dimensionali non massimi non sono sottospazi (per O). Resta peraltro insoluta la questione se ogni sottomodulo m-dimensionale è effettivamente un sottospazio di S_n: tale indagine presenta delle difficoltà finora non superate in quanto strettamente collegate con insolute questioni di analisi diofantea sopra un anello.

1. Su alcune proprietà relative a certi moduli liberi di tipo finito (3).

Sia $A = (1, \alpha, \beta, ...)$ un anello unitario, privo di divisori dello zero, verificante la proprietà:

α) Ogni ideale destro sia ideale principale destro.

La α) comporta ([3], Cap. VI, n. 3, Teor. 5) che due qualsiansi elementi, entrambi non nulli, di A ammettono un comune multiplo sinistro diverso da zero; tale proprietà equivale a quella che l'intersezione di due ideali destri (non nulli) di A non si riduce mai allo ideale nullo.

Indicato con l'usuale simbolo A_d^n ($n \geq 1$ prefissato intero positivo) l'A-modulo destro costituito dalle n-ple ordinate di elementi di A, si ha che:

(1.1). *A_d^n è libero di tipo finito.*

(3) Le dimostrazioni dei risultati che saranno richiamati nel presente numero si trovano in [2].

(1.2). *Fissati comunque* $m\ (\leq n)$ *elementi indipendenti di* A_d^n, *il sottomodulo da essi generato è isomorfo ad* A_d^m.

Si riconosce poi che *tutte le basi di* A_d^n *hanno il medesimo ordine* n, dal che segue la possibilità di assegnare univocamente la *dimensione* di A_d^n quale ordine di una qualunque sua base.

La suddetta definizione e la (1.2) comportano che

(1.3). *Per ogni* $m \leq n$ *esistono sottomoduli di* A_d^n *isomorfi ad* A_d^m, *quindi dotati di dimensione uguale ad* m.

I sottomoduli che si ottengono in base alla (1.2) forniscono poi tutti i possibili sottomoduli di A_d^n, come risulta dalla proprietà

(1.4). *Ogni sottomodulo di* A_d^n *è isomorfo ad un modulo* A_d^m, *con* m *opportuno intero* $\leq n$; *quindi è libero, di tipo finito e dotato di dimensione* $(= m)$.

Si rileva inoltre che valgono le seguenti tre proposizioni, a meno che, ovviamente, A non sia un corpo:

(1.5). *Se* V *è un sottomodulo di* A_d^n, *di dimensione* $m \geq 1$, *esistono sottomoduli propri di* V *di dimensione* m.

Da (1.5) e da quanto precede segue immediatamente che

(1.6). *Ogni sottomodulo di* A_d^n, *di dimensione* $m \geq 1$, *possiede una catena discendente illimitata di sottomoduli della stessa dimensione* m, *tutti isomorfi ad* A_d^m.

La effettiva costruzione di catene, di cui in (1.6), si può realizzare osservando che ogni ideale destro (non nullo) di A ammette una catena illimitata discendente di ideali destri ([4]). Allora, se V è un sottomodulo di A_d^n, di dimensione $m \geq 1$, indicata con $x_1, \ldots, x_n$ una sua base e con $H_1, \ldots, H_m$ m ideali (principali destri) di A, l'insieme

$$W = \{ x_1 H_1 + \ldots + x_m H_m \}$$

degli elementi (di V) della forma $x_1 h_1 + \ldots + x_m h_m$ con $h_i \in H_i$, è, come si verifica immediatamente, un sottomodulo (destro) di V avente la stessa dimensione m se ogni $H_i \neq \{0\}$; inoltre W è sottomodulo proprio di V se uno almeno degli H_i è diverso da A. Si

([4]) Se H è un ideale destro di A, h un suo generatore e δ un qualunque elemento non unitario di A, allora l'ideale generato di $h\delta$ è non nullo e propriamente contenuto in H.

potranno poi fissare degli ideali destri $H'_1 \subseteq H_1, \dots, H'_m \subseteq H_m$, tutti non nulli e tali che, per almeno un indice i, si abbia $H'_i \neq H_i$. Allora, il sottomodulo

$$W' = \{x_1 H'_1 + \dots + x_m H'_m\}$$

di W, che così si ottiene, è propriamente contenuto in W ed ha ancora dimensione m; ecc..

Infine si dimostra che ogni catena ascendente di sottomoduli, aventi tutti una medesima dimensione $m \, (\leq n)$, è limitata. Chiamando allora sottomodulo *m-dimensionale massimo* ogni sottomodulo di dimensione m, non contenuto propriamente in alcun sottomodulo avente ancora dimensione m, si ha che

(1.7). *Ogni sottomodulo di A_d^n, di dimensione m, è contenuto in qualche sottomodulo m-dimensionale massimo.*

2. **Rette. Sottomoduli unidimensionali di A_d^n.**

Sia A un anello unitario, privo di divisori dello zero, verificante la condizione α) di cui al n. 1 e l'ulteriore condizione:

β) Ogni coppia di elementi non entrambi nulli ammetta un massimo comune divisore destro.

Tale anello è caso particolare di quello preso in considerazione nella [1]; onde potremo considerare, per ogni prefissato intero positivo $n \, (\geq 2)$, lo spazio affine S_n di dimensione n sopra A. Come è stato richiamato nell'introduzione, il detto S_n può considerarsi come A-modulo destro, e come tale rientra ovviamente nella classe degli A-moduli destri di cui al n. 1. Continueremo ad indicarlo con l'usuale simbolo A_d^n.

Ciò premesso, è immediato che

(2.1). *Ogni retta $r = \{\lambda_1 k, \dots, \lambda_n k\}$ di S_n, passante per l'origine $O = (0, \dots, 0)$, è un sottomodulo di dimensione 1 di A_d^n.*

La (2.1) non può essere invertita, come risulta dal seguente

TEOREMA I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sottomodulo generato da un punto $P = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ sia una retta di S_n è che m.c.d. $(\mu_1, \dots, \mu_n) = 1$.*

La sufficienza della condizione è implicita nella stessa definizione di retta di S_n. Per provare la necessità supponiamo che il sottomodulo U di A_d^n, generato da $P = (\mu_1, \dots, \mu_n)$, sia una retta r. La r ammette una rappresentazione parametrica del tipo

$$x_i = \lambda_i k \qquad (i = 1, \dots, n)$$

con $\lambda_i \in A$, non tutti nulli e tali che m.c.d. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$. Poichè P appartiene ad r sarà

$$\mu_i = \lambda_i k' \tag{1}$$

per un opportuno $k' \in A$; analogamente, da $Q = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in U$ segue che

$$\lambda_i = \mu_i k'', \tag{2}$$

con k'' conveniente elemento di A. Dalle (1), (2) si trae

$$\mu_i = \mu_i k'' k' \tag{3}$$

e poichè, ovviamente, non tutte le μ_i sono nulle ed A è privo di divisori dello zero, la (3) comporta $k'' k' = 1$, onde k' è unitario. Avendosi poi

$$\text{m.c.d.}\ (\mu_1, \dots, \mu_n) = \text{m.c.d.}\ (\lambda_1 k', \dots, \lambda_n k') =$$

$$[\text{m.c.d.}\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n)]\ k' = k',$$

si conclude nel modo voluto.

Dal teorema I discende il

TEOREMA II. *Ogni sottomodulo di dimensione* 1 *di* A_d^n *è una retta di* S_n *se e solo se* A *è un corpo.*

Se A è un corpo (quindi A_d^n è uno spazio vettoriale (destro) su A) è già ben noto che ogni sottomodulo di dimensione 1 di A_d^n è una retta di S_n. Supposto poi che A non sia corpo, esisterà qualche elemento non unitario $\delta \in A$ ed il sottomodulo di A_d^n, generato, ad es., da $P = (\delta, 0, \dots, 0)$ non può essere una retta di S_n, in conseguenza del teor. I.

Rileviamo ora che, avuto riguardo alla (1.6), se A non è un corpo (quindi necessariamente infinito), ogni sottomodulo di dimensione 1 di A_d^n ammette una catena discendente illimitata di sottomoduli di dimensione 1, fra loro isomorfi. In accordo poi con la definizione di sottomodulo m-dimensionale massimo e tenuto conto della (1.7) si ha, in particolare, che ogni sottomodulo di A_d^n, di dimensione 1, è contenuto in qualche sottomodulo unidimensionale massimo. Tale circostanza può essere ulteriormente precisata mediante le seguenti proposizioni:

(2.2). *Ogni sottomodulo di dimensione* 1 *è contenuto in uno ed un solo sottomodulo della stessa dimensione, generato da un elemento* $P = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *tale che m.c.d.* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$.

Sia infatti U un sottomodulo di dimensione 1 e sia $Q = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ un generatore di U. Poichè $Q \neq O$, per Q e per O passa una ed una sola retta r di S_n ([1], prop. 1.5). Se $r = \{\lambda_1 k, \dots, \lambda_n k\}$ si ha che m.c.d. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$ ed inoltre il sottomodulo V (coincidente con r) generato da $P = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ha dimensione 1 e contiene U. Se V' è un qualunque sottomodulo contenente U e generato da un punto $R = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ tale che m.c.d. $(\nu_1, \dots, \nu_n) = 1$, V è, in base al teor. I, una retta che, passando per O e per Q, coincide con r, onde $V' = V$.

(2.3). *Un sottomodulo* V *di* A_d^n *è unidimensionale massimo se e solo se è generato da un elemento* $P = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *tale che m.c.d.* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$.

Se V è un sottomodulo unidimensionale massimo, V coincide con il sottomodulo unidimensionale V' che, a norma di (2.2), contiene V ed è generato da un punto $P = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ con m. c. d. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$. Ciò significa che V è generabile mediante P. Se $Q = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ è un qualsiasi generatore di V, dovrà aversi

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1 k, \dots, \mu_n k)$$

per k opportuno elemento di A. Segue che

$$1 = \text{m.c.d.}\ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \text{m.c.d.}\ (\mu_1, \dots, \mu_n) \cdot k,$$

onde m.c.d. $(\mu_1, \dots, \mu_n) = 1$ ed è così provato che la condizione enunciata è necessaria.

Sia, viceversa, V generato da un punto $P = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, con m.c.d. $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 1$. Supponiamo, per assurdo, che esista un sottomodulo unidimensionale W contenente propriamente V. Se $Q = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ è un generatore di W, sarà allora $Q \notin V$. D'altra parte, poichè $P \in W$, si avrà

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\mu_1 k, \dots, \mu_n k)$$

con $k \in A$ opportunamente scelto. Segue da qui che

$$1 = \text{m.c.d.}\,(\mu_1, \dots, \mu_n)\,k,$$

onde k è unitario. Ma allora si può scrivere

$$(\mu_1, \dots, \mu_n) = (\lambda_1 k^{-1}, \dots, \lambda_n k^{-1})$$

e si giunge così all'assurdo che $Q \in V$. Pertanto, V è unidimensionale massimo e resta provato che la nostra condizione è sufficiente.

Da (2.2), (2.3) segue che

(2.4). *Ogni sottomodulo di dimensione* 1 *è contenuto in uno ed un solo sottomodulo unidimensionale massimo.*

Inoltre, tenuto conto che ogni retta di S_n, passante per l'origine, è un sottomodulo di A_d^n, il teorema I e la proposizione (2.3) forniscono il seguente

TEOREMA III. *Tutte e sole le rette di S_n, passanti per l'origine, sono i sottomoduli unidimensionali massimi di A_d^n.*

3. Sottospazi di S_n.

Diremo sottospazio di S_n ogni sottoinsieme $\bar{S}$ di S_n per il quale si verifichino le proprietà:

i) Se due punti di una retta r di S_n appartengono ad $\bar{S}$, ogni punto di r appartiene ad $\bar{S}$;

ii) Se P ed r sono un punto ed una retta di S_n, appartenenti ad $\bar{S}$, anche la parallela per P ad r appartiene ad $\bar{S}$.

È ovvio che le rette di S_n sono sottospazi nel senso della definizione data, qualora si tenga conto di [1], propp. (1.4), (1.5), (1.6). Converrà poi includere fra i sottospazi anche i singoli punti di S_n ed il sottoinsieme vuoto.

Ciò premesso, proviamo il

TEOREMA IV. *Se $\bar{S}$ è un sottospazio di S_n e τ è una qualunque traslazione, anche $\tau(\bar{S})$ è un sottospazio di S_n. Inoltre, se $\bar{S}$ e $\tau(\bar{S})$ sono distinti, essi sono privi di punti in comune.*

Il teorema è ovvio se $\bar{S}$ è il sottospazio vuoto od un punto di S_n. Esso vale altresì se $\bar{S}$ è una retta ([1], def. 1.3 e prop. 1.2). Possiamo escludere quindi i predetti sottospazi.

Fissati comunque due punti distinti A', B' di $\tau(\overline{S})$ si ha che i punti $\tau^{-1}(A')$, $\tau^{-1}(B')$ appartengono ad $\overline{S}$ ed a tale sottospazio apparterrà quindi la retta $r = \tau^{-1}(A')\,\tau^{-1}(B')$. Avendosi $A'B' = \tau(r)$, segue che ogni punto di $A'B'$ è in $\tau(\overline{S})$.

Siano r' una qualunque retta e P' un qualunque punto di $\tau(\overline{S})$. Allora $\tau^{-1}(r')$ e $\tau^{-1}(P')$ sono in $\overline{S}$ e, conseguentemente, anche la retta s per P, parallela ad r, è in $\overline{S}$. La retta $s' = \tau(s)$ appartiene pertanto a $\tau(\overline{S})$ e coincide con la parallela ad r' per P' ([1], propp. 1.3, 1.6). È così provato che $\tau(\overline{S})$ è un sottospazio di S_n.

Per provare la seconda parte del teorema basta far vedere che, se $\overline{S}$ e $\tau(\overline{S})$ hanno un punto in comune, è $\overline{S} = \tau(\overline{S})$. Sia P un punto di $\overline{S} \cap \tau(\overline{S})$. Preso un qualunque punto Q di $\overline{S}$ si ha che la retta $\tau(P)\,\tau(Q)$ appartiene a $\tau(\overline{S})$. Ma poichè $P \in \tau(\overline{S})$, la parallela per P a $\tau(P)\,\tau(Q)$ è in $\tau(\overline{S})$; d'altra parte detta parallela coincide con la retta PQ, onde Q è in $\tau(\overline{S})$. Analogamente si prova che ogni punto di $\tau(\overline{S})$ è in $\overline{S}$ e pertanto $\overline{S} = \tau(\overline{S})$.

Dal teor. IV si deduce il

TEOREMA V. *Ogni sottospazio (non vuoto) $\overline{S}$ di S_n è traslato di uno ed un solo sottospazio $\overline{S}_0$ per* 0.

Detto P un qualunque punto di $\overline{S}$, la traslazione τ che muta P in O, muta $\overline{S}$ in un sottospazio $\overline{S}_0$ passante per O. È dunque $\overline{S} = \tau^{-1}(\overline{S}_0)$. Se $\overline{S}$ fosse traslato di due sottospazi distinti $\overline{S}_0$, $\overline{S}'_0$ per O, detta τ_1 una traslazione che porta $\overline{S}'_0$ in $\overline{S}$, la traslazione $\tau_1\,\tau_2^{-1}$ porterebbe $\overline{S}_0$ in $\overline{S}'_0$ e ciò è assurdo in base alla seconda parte del teor. IV.

TEOREMA VI. *Ogni sottospazio $\overline{S}_0$ per l'origine è un sottomodulo di A_d^n.*

La cosa è ovvia se $\overline{S}_0 = O$. Possiamo quindi supporre che esistano punti di $\overline{S}_0$, distinti da O.

Siano $P = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $Q = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ due qualsiansi punti distinti di $\overline{S}_0$. Posto

$$\beta_i - \alpha_i = \lambda_i\,\delta \qquad (i = 1, \dots, n)$$

con $\delta = \text{m.c.d.}\,(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n)$, la retta r per O, parallela alla PQ, ammette la rappresentazione

$$r = \{\lambda_1 k, \dots, \lambda_n k\}$$

([1], prop. 1.5 e def. 1.1) Poichè r appartiene ad $\overline{S}_0$, a tale sottospazio dovrà appartenere anche il punto

$$(\lambda_1 \delta, \dots, \lambda_n \delta)$$

ossia il punto

$$(\beta_1 - \alpha_1, \dots, \beta_n - \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_n) - (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Siano poi $P = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ un qualunque punto (distinto da O) di $\overline{S}_0$ e $\overline{k}$ un qualsiasi elemento di A. Posto

$$\alpha_i = \lambda_i \delta, \qquad (i = 1, \dots, n)$$

con $\delta = \text{m.c.d.}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, la retta OP ammette la rappresentazione

$$OP = \{\lambda_1 k, \dots, \lambda_n k\}.$$

Poichè r appartiene ad $\overline{S}_0$, vi appartiene anche il punto

$$(\lambda_1 \delta \overline{k}, \dots, \lambda_n \delta \overline{k}) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \overline{k}.$$

Si conclude così che $\overline{S}_0$ è un sottomodulo di A_d^n.

4. Dimensione dei sottospazi di S_n.

In base ai teor. V, VI ogni sottospazio non vuoto di S_n è traslato di un ben determinato sottospazio passante per O; questo, a sua volta, è un sottomodulo V di A_d^n. Poichè, in virtù di (1.4), V è dotato univocamente di dimensione $m \, (\leq n)$, assumeremo tale valore come *dimensione* del sottospazio considerato. Convenendo ancora di attribuire dimensione -1 al sottospazio vuoto, si ha dunque che

(3.1). *Ogni sottospazio di S_n è dotato univocamente di dimensione m, con $-1 \leq m \leq n$.*

Sia $\overline{S}$ un sottospazio di S_n che contenga almeno due punti distinti. Avuto riguardo alla i) della definizione di sottospazio, definiremo *retta* di $\overline{S}$ ogni retta di S_n che appartenga ad $\overline{S}$. La denominazione di « sottospazio » introdotta all'inizio del n. 3 e la relativa definizione di « dimensione » sono allora giustificate dal seguente

TEOREMA VII. *Ogni sottospazio* $\overline{S}$ *di* S_n, *avente dimensione* m (≥ 2) *è uno spazio affine di dimensione* m (*nel senso di Permutti*) *sullo stesso anello* A *su cui è costruito* S_n.

Tenuto conto di [1], n. 2, basta infatti provare che:

i) esiste una biiezione di $\overline{S}$ su A_d^m;

ii) ogni retta r di S_n, appartenente ad $\overline{S}$, ammette una rappresentazione del tipo

$$r = \{\overline{\alpha}_1 + \overline{\lambda}_1 k, \dots, \overline{\alpha}_n + \overline{\lambda}_m k\}$$

con $\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_m$ non tutti nulli e tali che m.c.d. $(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_m) = 1$.

Avuto riguardo al teor. V, al fatto che ogni retta di S_n contenuta in $\overline{S}$ è traslata di una retta di S_n contenuta nel traslato di $\overline{S}$ per O, ed alle equazioni di una traslazione ([1], n. 11), ci si potrà limitare a dimostrare le i), ii) nell'ipotesi che $\overline{S}$ sia un sottospazio passante per l'origine O, ossia un sottomodulo V di A_d^n.

Per l'ipotesi fatta su $\overline{S}$, V ha dimensione m. Detta allora $Q_1, \dots, Q_m$ una sua base e preso un punto $P = (x_1, \dots, x_n)$ di $\overline{S}$, si avrà

$$P = Q_1 \mu_1 + \dots + Q_m \mu_m$$

con $\mu_1, \dots, \mu_m$ opportuni elementi di A. La corrispondenza φ fra gli elementi di V e gli elementi di A_d^m, definita da

$$\varphi[(x_1, \dots, x_n)] = (\mu_1, \dots, \mu_m)$$

risulta allora un isomorfismo fra V ed A_d^m (come è stato richiamato in (1.2)) e da ciò deriva anzitutto la i). Identificando $\varphi(V)$ con A_d^m, possiamo considerare P come elemento di A_d^m e scrivere quindi

$$P = (\mu_1, \dots, \mu_m),$$

il che equivale ad assumere $\mu_1, \dots, \mu_m$ come coordinate « interne » di P in $\overline{S}$.

Il generico punto $P = (\alpha_1 + \lambda_1 k, \dots, \alpha_n + \lambda_n k)$ di una data retta $r = \{\alpha_1 + \lambda_1 k, \dots, \alpha_n + \lambda_n k\}$ di S_n, appartenente ad $\overline{S}$, è allora rappresentato, in coordinate interne, da

$$P = \varphi[(\alpha_1 + \lambda_1 k, \dots, \alpha_n + \lambda_n k] = \varphi[(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] + \varphi[(\lambda_1, \dots, \lambda_n)]k.$$

Posto

$$\varphi\,[(\alpha_1\,,\dots,\alpha_n)] = (\bar{\alpha}_1\,,\dots,\bar{\alpha}_m)$$

$$\varphi\,[(\lambda_1\,,\dots,\lambda_n)] = (\bar{\lambda}_1\,,\dots,\bar{\lambda}_m),$$

si ha

$$P = (\bar{\alpha}_1 + \bar{\lambda}_1\,k,\dots,\bar{\alpha}_m + \bar{\lambda}_m\,k)$$

e pertanto la retta r ammette in $\bar{S}$ la rappresentazione

$$r = \{\bar{\alpha}_1 + \bar{\lambda}_1\,k,\dots,\bar{\alpha}_m + \bar{\lambda}_m\,k\}.$$

Inoltre la m-pla $(\bar{\lambda}_1\,,\dots,\bar{\lambda}_m)$ non è nulla in quanto trasformata, in φ, della n-pla non nulla $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Se fosse, infine, m.c.d. $(\bar{\lambda}_1\,,\dots,\bar{\lambda}_m) = \delta$, con δ elemento non unitario di A, posto

$$(\bar{\lambda}_1\,,\dots,\bar{\lambda}_m) = (\lambda_1^*\,,\dots,\lambda_m^*)\,\delta,$$

risulterebbe

$$\varphi\,[(\lambda_1\,,\dots,\lambda_m)] = (\lambda_1^*\,,\dots,\lambda_m^*)\,\delta,$$

quindi

$$\varphi^{-1}\,[(\lambda_1^*\,,\dots,\lambda_m^*)]\,\delta = (\lambda_1\,,\dots,\lambda_n).$$

L'elemento δ sarebbe dunque divisore destro di $\lambda_1\,,\dots,\lambda_n$, contro l'ipotesi. Vale dunque la ii) ed il teorema è così completamente dimostrato.

5. Relazioni fra sottomoduli e sottospazi.

In base al teorema VI ed alla definizione di dimensione di sottospazio, si può asserire che ogni sottospazio di S_n, passante per l'origine $O = (0,\dots,0)$ ed avente dimensione m, è un sottomodulo di dimensione m di A_d^n. Tuttavia, non ogni sottomodulo di A_d^n è un sottospazio di S_n, come risulta dai seguenti teoremi.

Teorema VIII. *Se V è un sottomodulo m-dimensionale massimo $(1 \leq m \leq n)$ generato dai punti (indipendenti) $P^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}\,,\dots,\alpha_n^{(i)})$ $(i = 1,\dots,m)$, si ha m.c.d. $(\alpha_1^{(i)}\,,\dots,\alpha_n^{(i)}) = 1$.*

Supponiamo, per assurdo, che uno almeno (ad es. $P^{(1)}$) dei punti $P^{(1)},\dots,P^{(m)}$ sia tale che m.c.d. $(\alpha_1^{(i)}\,,\dots,\alpha_n^{(i)}) \neq 1$. Sarà allora

$$P^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}\,,\dots,\alpha_n^{(1)}) = (\beta_1^{(1)}\,,\dots,\beta_n^{(1)})\,h' \tag{4}$$

con h' opportuno elemento non unitario di A. Tenuto conto della (4), risulta

$$V = \{P^{(1)} k_1 + \dots + P^{(m)} k_m\} =$$

$$= \{(\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_n^{(1)}) h' k_1 + (\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)}) k_2 + \dots + (\alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_n^{(m)}) k_m\}$$

con $k_i (i = 1, \dots, m)$ variabile in A. Posto $Q = (\beta_1^{(1)}, \dots, \beta_n^{(1)})$ ed indicato con H' l'ideale (destro) generato da h', si ha, con notazione analoga a quella usata nel n. 1,

$$V = QH' + P^{(2)} A + \dots + P^{(m)} A.$$

Considerando allora il sottomodulo m-dimensionale W generato dai punti (indipendenti) $Q, P^{(2)}, \dots, P^{(m)}$, si ha (n. 1) che V è contenuto propriamente in W, contro l'ipotesi fatta su V.

Teorema IX. *Se il sottomodulo V, generato dagli m punti indipendenti $P^{(1)}, \dots, P^{(m)}$ $(1 \leq m \leq n)$ è un sottospazio di S_n, allora V è m-dimensionale massimo.*

Supponiamo, per assurdo, che V non sia m-dimensionale massimo. Esiste allora (1.7) un sottomodulo W, m-dimensionale massimo, contenente propriamente V. Indicata con $Q^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)})$ $(i=1, \dots, m)$ una base di W si ha intanto, avuto riguardo al teorema VIII, che m.c.d. $(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}) = 1$ $(i = 1, \dots, m)$. Il sottomodulo V sarà allora rappresentato (n. 1) da

$$V = P^{(1)} H_1 + \dots + P^{(m)} H_m$$

con H_i ideali tutti non nulli di A e dei quali uno almeno è diverso da A stesso. Supposto, per fissare le idee, che $H_1 \neq A$, prendiamo un elemento $\neq 0$ (necessariamente non unitario) $h_1 \in H_1$ e consideriamo la retta r per i punti $O = (0, \dots, 0)$ e $Q = (\alpha_1^{(1)} h_1, \dots, \alpha_n^{(1)} h_1) = P^{(1)} h_1$. Essa sarà rappresentata da

$$r = \{\alpha_1^{(1)} k, \dots, \alpha_n^{(1)} k\} \qquad (k \in A)$$

e poichè due suoi punti (O e Q) appartengono a V, ogni suo punto appartiene a V. D'altra parte, il punto $P^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)})$ appartiene alla retta r ma non al sottomodulo V, essendo H_1 un ideale proprio di A. Ciò contraddice l'ipotesi che V sia un sottospazio.

Dai teoremi VIII, IX segue il

TEOREMA X. *Sia* V *un sottomodulo di* A_d^n, *di dimensione* m $(1 \leq m \leq n)$ *e sia* $P^{(i)} = (\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)})$ $(i = 1, \dots, m)$ *una qualunque sua base. Affinchè* V *sia sottospazio di* S_n *è necessario che m.c.d.* $(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)}) = 1$ *per ogni* $i = 1, \dots, m$.

OSSERVAZIONE. Il teorema VIII non è invertibile (quindi neanche il teor. X) come si può rilevare dal seguente esempio. Consideriamo lo spazio affine S_3 costruito sull'anello Z degli interi relativi ed il sottomodulo V (di dimensione $m = 2$) generato dai punti $P = (\alpha, \beta, 0)$, $Q = (\alpha'\alpha, \beta', 0)$ con m.c.d. $(\alpha, \beta, 0) =$ m.c.d. $(\alpha'\alpha, \beta', 0) = 1$, ed $\alpha' \neq 1$, $\alpha \neq 1$. Risulta allora

$$V = \{\alpha h + \alpha\alpha' k, \beta h + \beta' k, 0\} \qquad (h, k \in A).$$

Consideriamo ora il sottomodulo W (di dim. 2) generato dai punti $P' = (1, 0, 0)$, $Q' = (0, 1, 0)$.

Risulta

$$W = \{\varrho, \sigma, 0\} \qquad (\varrho, \sigma \in A).$$

È allora evidente che V è propriamente contenuto in W in quanto il punto $U = (1, 1, 0)$, appartenente a W, non appartiene a V.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. PERMUTTI, *Geometria affine su di un anello;* « Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », vol. VIII, sez. I (1967), pp. 259-287.

[2] G. PIZZARELLO, *Su certi moduli liberi di tipo finito*; « Le Matematiche », vol. XXIII, fasc. 2 (1968).

[3] P. DUBREIL, *Algèbre*, Gauthier-Villars, Paris (1963).