EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE CON SECONDO MEMBRO DISCONTINUO RISPETTO ALL'INCOGNITA (*)

di ALBERTO CAMBINI e SAURO QUERCI (a Pisa) (**)

SOMMARIO. - *In questo lavoro è esposto un teorema di esistenza ed unicità per un'equazione differenziale del primo ordine con secondo membro suscettibile di discontinuità assai generale.*

SUMMARY. - *This article treats an existence and uniqueness theorem for a first order differential equation with discontinuos right-hand member.*

1. Nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie, mentre è stato ampiamente studiato il caso di un secondo membro discontinuo rispetto alla variabile indipendente (teoria di CARATHEODORY) è stato studiato pochissimo il caso di un secondo membro che presenti discontinuità rispetto all'incognita.

Fra i primi, il BUDAK e il GORBUNOV [1] studiarono una equazione differenziale in cui la continuità del secondo membro era interrotta da particolari linee di discontinuità; poco dopo il MALGARINI [4] compì un ampio studio per un sistema in cui si presentavano ipersuperfici di discontinuità specialmente in relazione ai problemi dell'attrito della meccanica.

Noi esponiamo in questo lavoro, un teorema di esistenza ed unicità per un'equazione differenziale del primo ordine, con secondo membro suscettibile di discontinuità assai generali.

(*) Pervenuto in Redazione il 3 marzo 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico « Leonida Tonelli » - Università — Via Derna 1 — 56100 Pisa.

Premettiamo una definizione:

DEFINIZIONE 1.1. *Diremo intorno «destro-alto» del punto* $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ *un insieme* U *del tipo*:

$$U = V \cap \{(x, y) \mid x \geq x_0 , y \geq y_0\}$$

essendo V *un intorno di* (x_0, y_0) *della topologia euclidea di* $\mathbf{R}^2$; *e indicheremo con* $\mathcal{T}$ *la topologia definita dagli intorni «destro-alti» dei punti di* $\mathbf{R}^2$.

AVVERTENZA: In seguito per f continua in un intorno «destro-alto» di (x_0, y_0) intenderemo f continua rispetto alla topologia $\mathcal{T}$, ipotesi assai meno restrittiva rispetto alla continuità di f in senso ordinario.

Possiamo ora enunciare il risultato principale:

TEOREMA. *Sia* $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *una funzione continua rispetto alla topologia* $\mathcal{T}$ *nel rettangolo*

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$$

e soddisfacente l'ipotesi

i) $0 < m \leq f(x, y) \leq M$ *essendo* m *ed* M *costanti positive, con* $aM \leq b$.

Allora:

a) Esiste una soluzione dell'equazione differenziale

$$\text{A)} \qquad \begin{cases} y'(x) = f(x, y) \ \textit{soddisfacente la condizione iniziale} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Se inoltre all'ipotesi i) *aggiungiamo*

ii) *ogni punto di* D *possiede un intorno «destro-alto» in cui* f *è di classe* $\mathcal{C}^1$, (1) *risulta*:

b) la soluzione è unica.

(1) Ricordiamo che una funzione definita in un insieme qualunque $T \subset \mathbf{R}^n$ è detta di classe $\mathcal{C}^1$, se essa è la restrizione a T di una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita in un insieme aperto contenente T.

Per soluzione di A) intendiamo una funzione $y(x)$ assolutamente continua tale che

1) $y(0) = 0$
2) $y'(x) = f(x, y)$ quasi ovunque.

OSSERVAZIONE. Sono note, per le funzioni assolutamente continue, le seguenti proprietà:

1) hanno derivata quasi ovunque sommabile
2) sono uguali all'integrale della propria derivata
3) se f e g sono assolutamente continue nell'intervallo $[a, b]$, e $\lambda \in \mathbf{R}$, le funzioni $(f+g)$ e (λf) sono assolutamente continue in $[a, b]$.

Dimostriamo inoltre per le funzioni assolutamente continue la

PROPOSIZIONE 1.2. *Se f è assolutamente continua in $[a, b]$, le funzioni f^+ e f^- definite da*

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \max\,(f(x), 0) \\ f^-(x) &= \max\,(-f(x), 0) \end{aligned} \qquad x \in [a, b]$$

sono assolutamente continue in $[a, b]$.

DIM. L'asserto discende immediatamente dalle ovvie diseguaglianze

$$|f^+(\beta_i) - f^+(\alpha_i)| \leq |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|$$

$$|f^-(\beta_i) - f^-(\alpha_i)| \leq |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|$$

essendo α_i, β_i estremi di un intervallo contenuto in $[a, b]$.

COROLLARIO 1.3. *Se f e g sono assolutamente continue in $[a, b]$ le funzioni $|f|$ e $f^* = f \cap g$ (inviluppo inferiore di f e g) sono assolutamente continue in $[a, b]$.*

DIM. Basta osservare che $|f| = f^+ + f^-$ e $f^* = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$.

Prima di affrontare la prima parte del nostro teorema premettiamo due proposizioni.

PROPOSIZIONE 1.4. *Sia $\psi: [0, a] \to [0, b]$ una funzione continua a destra e crescente nel punto x_0; sia $f: D \to \mathbf{R}$ una funzione definita in un intorno «destro-alto» del punto (x_0, y_0), con $y_0 = \psi(x_0)$*

e continua in (x_0, y_0), *nella topologia* $\mathcal{T}$. *Allora la funzione* $\varphi: [0, a] \to \mathbf{R}$ *definita da* $\varphi(x) = f(x, \psi(x))$ *è continua a destra nel punto* x_0.

DIM. Basta notare che l'applicazione $x \to (x, \psi(x))$, ove si pensi la retta dotata della topologia degli intorni destri e il piano dotato della topologia $\mathcal{T}$, è continua in x_0 se ψ è continua a destra e non decrescente in x_0.

PROPOSIZIONE 1.5. *Sia* $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ *una funzione limitata e continua a destra in ogni punto di* $[a, b]$. *Allora* f *è integrabile secondo* RIEMANN.

DIM. Per ogni $\bar{x} \in [a, b]$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste per ipotesi un intorno destro $U_{\bar{x}}$ di $\bar{x}$ in cui valgono le limitazioni

$$f(\bar{x}) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(\bar{x}) + \varepsilon \qquad \forall x \in U_{\bar{x}}.$$

Possiamo allora estrarre per il Teorema di VITALI [5] dall'insieme $\mathcal{I} = \{U_{\bar{x}}\}_{\bar{x} \in [a, b]}$ un numero finito di intorni destri del tipo $U_i = [\alpha_i, \alpha_i + \delta_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$, contenuti in $[a, b]$, non sovrapposti e tali che

$$m(\bigcup_i U_i) > (b - a) - \varepsilon.$$

Consideriamo le funzioni, costanti a tratti, $k(x)$ e $h(x)$ così definite:

$$k(x) = \begin{cases} f(\alpha_i) + \varepsilon & \text{se } x \in U_i \\ M & \text{» } x \notin \bigcup_i U_i \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} f(\alpha_i) - \varepsilon & \text{se } x \in U_i \\ -M & \text{» } x \notin \bigcup_i U_i \end{cases}$$

essendo $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

La misura del complementare di $\bigcup_i U_i$ è minore di ε e $k(x)$, $h(x)$ sono funzioni rispettivamente maggioranti e minoranti la $f(x)$.

Risulta inoltre

$$\int_a^b [k(x) - h(x)]\, dx \leq 2\varepsilon(b-a) + 2M\varepsilon = 2\varepsilon(b - a + M).$$

Da qui l'integrabilità secondo RIEMANN di f.

2. Siamo ora in grado di affrontare il nostro Teorema a) (esistenza).

Dimostreremo l'esistenza di una soluzione adattando al nostro caso un celebre procedimento introdotto dal PERRON.

Premettiamo la seguente

DEFINIZIONE 2.1. *Una funzione $y(x)$ continua e crescente è una « soprasoluzione » per l'equazione differenziale A), se per ogni $[\alpha, \beta] \subset \subset [0, a]$ si ha:*

2.2.
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ M(\beta - \alpha) \geq y(\beta) - y(\alpha) \geq \displaystyle\int_\alpha^\beta f(x, y(x))\, dx. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 1. La definizione data ha senso, in quanto le condizioni $y(0) = 0$, $M(\beta - \alpha) \geq y(\beta) - y(\alpha)$ implicano: $0 \leq y(x) \leq \leq b \ \forall x \in [0, a]$, e le proposizioni 1.4 e 1.5 ci assicurano l'integrabilità secondo RIEMANN di $f(x, y(x))$.

Risulta inoltre

$$\int_\alpha^\beta f(x, y(x))\, dx \geq m(\beta - \alpha)$$

che ci permette di affermare che una soprasoluzione è una funzione lipschitziana e quindi assolutamente continua.

Le « soprasoluzioni » si possono caratterizzare con la seguente:

PROPOSIZIONE 2.3. *Le soprasoluzioni dell'equazione differenziale A) sono tutte e sole le funzioni $y(x)$ assolutamente continue, tali che:*

2.4.
$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ M \geq y'(x) \geq f(x, y(x)) \ \textit{quasi ovunque}. \end{cases}$$

DIM. Se $y = y(x)$ è una soprasoluzione, le 2.4 sono conseguenza del fatto che $y(x)$ è derivabile quasi ovunque in quanto assolutamente continua, ed essendo $f(x, y(x))$ integrabile secondo RIEMANN, (e quindi sommabile) ha integrale che è funzione assolutamente continua dell'insieme $[0, a]$ (Teorema di LEBESGUE dell'assoluta continuità).

Risulta allora:

$$M \geq \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} \geq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))\, dx$$

e per quanto detto, quasi ovunque esistono i limiti per $h \to 0$ del 2^0 e 3^0 membro. Da qui le 2.4.

Viceversa, se $y(x)$ è assolutamente continua e soddisfa le 2.4., allora $y(x)$ è crescente in $[0, a]$, essendo per ipotesi $f(x, y) > 0$, quindi per le proposizioni 1.4. e 1.5. la $f(x, y(x))$ è integrabile e risulta

$$M(\beta - \alpha) \geq y(\beta) - y(\alpha) \geq \int_{\alpha}^{\beta} f(x, y(x))\, dx \quad \text{per } [\alpha, \beta] \subset [0, a].$$

OSSERVAZIONE 2. Per l'effettiva esistenza di una soprasoluzione della nostra equazione basta considerare la funzione $y = Mx$ con $x \in [0, a]$, che soddisfa in modo ovvio alle 2.4.

Ci serviremo per costruire la soluzione di A) della notevole proprietà: *l'inviluppo inferiore di due soprasoluzioni è una soprasoluzione*, per la cui dimostrazione basta notare (dopo il corollario 1.3) che, nei punti in cui entrambe le funzioni sono derivabili, ed è pure derivabile l'inviluppo inferiore, la derivata di questo ultimo deve coincidere con la derivata di una delle due funzioni.

Dimostriamo ora che *l'inviluppo inferiore di tutte le soprasoluzioni è una soluzione di A)*. A questo scopo, premettiamo una costruzione che ci permetta di esprimere l'inviluppo inferiore come limite uniforme di una successione non crescente di soprasoluzioni.

Si prenda nell'intervallo $[0, a]$ una successione densa di punti $\{\xi_i\}_{i \in \mathbf{N}}$. Indicato con H l'insieme delle soprasoluzioni dell'equazione A), si consideri per ogni ξ_i, l'insieme limitato inferiormente $\{y(\xi_i)\}_{y \in H}$ avente λ_i come estremo inferiore, e si estragga da H una successione $\{y_{n,i}\}_{n \in \mathbf{N}}$, tale che

$$\lim_{n \to +\infty} y_{n,i}(\xi_i) = \lambda_i, \qquad i \in \mathbf{N}.$$

Si consideri la nuova successione $\{y_m\}$ così definita per ricorrenza:

$$y_1 = y_{1,1}\,, y_m = y_{m-1} \cap y_{m,1} \cap y_{m,2} \dots \cap y_{m,m}\,.$$

Tale successione è non crescente, formata da soprasoluzioni, ed è tale che:

a) per ogni ξ_i *si ha* $\lim\limits_{m \to +\infty} y_m(\xi_i) = \lambda_i$.

Infatti si ha che per ogni punto ξ_i, per $m \geq i$

$$\lambda_i \leq y_m(\xi_i) \leq y_{m,i}(\xi_i)$$

e abbiamo preso la successione $\{y_{m,i}\}_{m \in \mathbf{N}}$ in modo tale che $\lim\limits_{m \to \infty} y_{m,i}(\xi_i) = \lambda_i$.

b) $\{y_m\}$ *converge uniformemente in* $[0, a]$ *ad una funzione* y^*.

L'affermazione è una facile conseguenza della equicontinuità della successione $\{y_m\}$ e della sua convergenza in un insieme denso di $[0, a]$.

Valgono per la funzione y^* le proprietà:

c) Per ogni $\xi \in [0, a]$, *si ha* $y^*(\xi) = \inf\limits_{y \in H} y(\xi)$, *ovvero* y^* *è l'inviluppo inferiore delle soprasoluzioni di* A).

Questa proprietà segue facilmente dal fatto che la funzione $\inf\limits_{y \in H} y(\xi)$, come inviluppo inferiore di una classe di funzioni continue, è superiormente continua e dal fatto che la funzione non negativa $y^*(\xi) - \inf\limits_{y \in H} y(\xi)$ si annulla nell'insieme denso $\{\xi_i\}_{i \in \mathbf{N}}$.

d) y^* *è soprasoluzione di* A).

La y^* è continua in quanto limite uniforme di una successione di funzioni lipschitziane. Per ogni m si ha:

$$M(\beta - \alpha) \geq y_m(\beta) - y_m(\alpha) \geq \int_\alpha^\beta f(t, y_m(t))\, dt.$$

Per la continuità della f e per la convergenza in modo monotono delle y_m alla funzione y^*, risulta per ogni t, $f(t, y_m(t)) \to f(t, y^*(t))$ per $m \to \infty$. Passando al limite per $m \to \infty$ nella precedente disuguaglianza, abbiamo per il teorema di LEBESGUE:

$$M(\beta - \alpha) \geq y^*(\beta) - y^*(\alpha) \geq \int_\alpha^\beta \lim_{m \to +\infty} f(t, y_m(t))\, dt = \int_\alpha^\beta f(t, y^*(t))\, dt$$

c. v. d.

e) *y^* è soluzione di* A).

Essendo y^* soprasoluzione, risulta $y^{*\prime}(x) \geq f(x, y^*(x))$ quasi ovunque. Supponiamo che in x_0, y^* sia derivabile e si abbia $y^{*\prime}(x_0) > f(x_0, y^*(x_0))$; si scelga d in modo che $y^{*\prime}(x_0) > d > f(x_0, y^*(x_0))$, e si consideri la funzione $z(x)$ così definita:

$$z(x) = \begin{cases} y^*(x) & \text{per } x \leq x_0 \\ y^*(x_0) + d(x - x_0) & \text{con } x > x_0 . \end{cases}$$

Risulta per $x > x_0$, $z'(x) = d > f(x_0, y^*(x_0)) = f(x_0, z(x_0))$.

Essendo $z(x)$ continua e crescente in x_0, per la proposizione 1.4. $f(x, z(x))$ è continua a destra di x_0. Esiste quindi un δ_1 tale che:

$$z'(x) > f(x, z(x)), \quad \forall\, x \in [x_0, x_0 + \delta_1].$$

D'altra parte esiste un δ_2 tale che $y^*(x) > z(x)$ $\forall\, x \in [x_0, x_0 + \delta_2]$.

Infatti il rapporto

$$\frac{y^*(x) - z(x)}{x - x_0} = \frac{y^*(x) - y^*(x_0)}{x - x_0} - \frac{z(x) - z^*(x_0)}{x - x_0}$$

tende per $x \to x_0$ ad un numero positivo e quindi l'asserzione è conseguenza del teorema della permanenza del segno.

Indicato con $\delta = \min[\delta_1, \delta_2]$, la funzione

$$z^*(x) = \begin{cases} y^*(x) & \text{per } x \leq x_0 \\ y^*(x_0) + d(x - x_0) & \text{per } x \in [x_0, x_0 + \delta] \\ y^*(x_0) + d\delta + M(x - x_0 - \delta) & \text{per } x \in [x_0 + \delta, a] \end{cases}$$

risulta una soprasoluzione di A), coincidente con $y^*(x)$ in $[a, x_0]$ e al disotto di essa nel tratto $]x_0, x_0 + \delta[$, e ciò è assurdo essendo y^* inviluppo inferiore. Ne segue che nei punti ove $y^{*\prime}$ esiste è necessariamente $y^{*\prime}(x) = f(x, y^*(x))$, e questo conclude la prima parte del nostro teorema.

3. Facciamo vedere ora che con l'ulteriore ipotesi ii) la soluzione trovata è unica.

Siano $y_1(x)$, $y_2(x)$ due soluzioni di A) che sono, in particolare, continue e crescenti. Sia $H = \{\xi \in [0, a] : y_1(x) = y_2(x) \ \forall\, x \leq \xi\}$,

$H \neq \emptyset$ in quanto $0 \in H$. Indicato con $\bar{x} = \sup_{\xi \in H} \xi$, per la continuità delle funzioni risulta $y_1(\bar{x}) = y_2(\bar{x}) = \bar{y}$.

Ci rimane da dimostrare che $\bar{x} = a$. Se fosse $\bar{x} < a$, esisterebbe un $\delta > 0$ tale che

$$\bar{y} \leq y_i(x) \leq b \qquad \forall\, x \in [\bar{x}, \bar{x} + \delta] \qquad i = 1, 2,$$

e un intorno $V = \{(x, y) : x \in [\bar{x}, \bar{x} + \varrho],\, y \in [\bar{y}, \bar{y} + \varrho]\}$ in cui la f è di classe C^1. Detto $\bar{\delta} = \min(\varrho, \delta)$ per il ben noto teorema di esistenza e unicità, risulterebbe $y_1(x) = y_2(x)$ nell'intorno $\bar{V} = \{(x, y) : x \in [\bar{x}, \bar{x} + \bar{\delta}],\, y \in [\bar{y}, \bar{y} + \bar{\delta}]\}$ e ciò contro l'ipotesi che $\bar{x}$ sia estremo superiore.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUDAK B. M. - GORBUNOV A. D. - *On the difference method of solution of the Cauchy problem for the equation $y' = f(x, y)$ and for the system of equation $x_i' = x_i'(t, x)$ with discontinuous right-hand sides.* — Vestinik-Moscov — Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. Fiz. Him. (1958).

[2] FILIPPOV A. F. - *Differential equations with discontinuous right-hand side.* — Mat. Sb. (N. S.) (1960).

[3] LAURENT'EV I. M. - *On an existence theorem for differential equation with discontinuous right-hand members* — Differencial'nye Uravnenija (1965).

[4] MALGARINI G. - *Su un particolare sistema differenziale ordinario, con secondi membri discontinui* — Istituto Lombardo Acc. Scienze e Lett. (1960).

[5] VITALI G. - SANSONE G. - *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale* — Zanichelli - Bologna (1935).