UNA CONDIZIONE DI NON DEGENERABILITÀ PER CORRISPONDENZE ALGEBRICHE IRRIDUCIBILI (*)

di ARNO PREDONZAN (a Trieste) (**)

SOMMARIO. - *Si determina una condizione necessaria e sufficiente perchè risulti non degenere una corrispondenza* $\mathfrak{C}$ *tra due insiemi* A *e* B, *nell'ipotesi che* A, B *e* $\mathfrak{C}$ *siano normalmente algebrici ed irriducibili su un corpo commutativo* k, *ed inoltre si abbia* $\mathrm{pr}_A(\mathfrak{C}) = A$.

SUMMARY. - *A necessary and sufficient condition is given for the nondegeneracy of a correspondence* $\mathfrak{C}$ *between two sets* A *and* B *in the following hypotheses:* A, B *and* $\mathfrak{C}$ *are normally algebraic and irreducible over a commutative field* k; $\mathrm{pr}_A(\mathfrak{C}) = A$.

1. — In alcune attuali ricerche di carattere algebrico-topologico, connesse allo studio di cicli algebrici che ammettano ricoprimenti di chiusi (nella topologia di ZARISKI) aprioristicamente caratterizzati, si è ripresentato il problema — già apparso in passato in questioni di esistenza, sopra una data varietà algebrica, di sottovarietà aventi assegnati caratteri proiettivi — di dover stabilire, per via indiretta, la degenerabilità, o meno, di certe corrispondenze algebriche, di cui non sia agevole determinare le proiezioni su uno dei due insiemi algebrici tra i quali vengono definite. Si è perciò ritenuto opportuno mettere in luce una condizione di non degenerabilità per corrispondenze siffatte — già adombrata nelle passate questioni di cui sopra — la quale possa apparire di proficua

(*) Pervenuto in Redazione il 5 aprile 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazzale Europa 1 — 34100 Trieste.

applicazione, non solo nelle ricerche attualmente in corso, ma anche in altre, eventuali, di tipo diverso.

2. — Siano A e B due insiemi (non vuoti) normalmente algebrici su un corpo commutativo k, e $\mathfrak{C}$ una corrispondenza algebrica tra A e B (cioè un sottoinsieme algebrico del prodotto $A \times B$) che potrà supporsi, senza restrizione, pur essa normalmente algebrica su k (1). Ne verrà che anche le due proiezioni $\mathrm{pr}_A(\mathfrak{C})$ e $\mathrm{pr}_B(\mathfrak{C})$ di $\mathfrak{C}$, rispettivamente su A e B, risulteranno normalmente algebriche su k; e l'irriducibilità su k di tali proiezioni conseguirà necessariamente da quella (eventuale) di $\mathfrak{C}$.

Il trasformato totale, attraverso $\mathfrak{C}$, di un arbitrario elemento x di A si indicherà, come di consueto, con $\mathfrak{C}(x)$; si porrà cioè:

$$\mathfrak{C}(x) = \mathrm{pr}_B(\mathfrak{C} \cap (\{x\} \times B)).$$

Più in generale, sostituendo ad x un sottoinsieme A' di A, si avrà:

$$\mathfrak{C}(A') = \mathrm{pr}_B(\mathfrak{C} \cap (A' \times B)).$$

Risulterà poi, ovviamente:

$$\mathfrak{C}(A) = \mathrm{pr}_B(\mathfrak{C}).$$

Analoghi simbolismi si useranno per la corrispondenza $\mathfrak{C}^{-1}$ tra B ed A, inversa di $\mathfrak{C}$. Si avrà cioè, in relazione ad un arbitrario elemento y di B, o ad un sottoinsieme B' di B:

$$\mathfrak{C}^{-1}(y) = \mathrm{pr}_A(\mathfrak{C} \cap (A \times \{y\})),$$

$$\mathfrak{C}^{-1}(B') = \mathrm{pr}_A(\mathfrak{C} \cap (A \times B')).$$

Ne verrà:

$$\mathfrak{C}^{-1}(B) = \mathrm{pr}_A(\mathfrak{C}).$$

Si ricordi, infine, che la corrispondenza $\mathfrak{C}$ dicesi « degenere » se è verificata una, almeno, delle due condizioni:

$$\mathrm{pr}_A(\mathfrak{C}) \neq A, \quad \mathrm{pr}_B(\mathfrak{C}) \neq B.$$

(1) Ciò deriva dal fatto che se A e B sono normalmente algebrici su k, essi risultano normalmente algebrici anche su ogni sopracorpo (algebrico) di k

3. — Si supponga ora che B e $\mathfrak{C}$ siano irriducibili su k, ed inoltre si abbia:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{pr}_A(\mathfrak{C}) = A.$$

Dall'irriducibilità di $\mathfrak{C}$ su k discende quella di $\mathrm{pr}_A(\mathfrak{C})$ e di $\mathrm{pr}_B(\mathfrak{C})$; cioè, avuto anche riguardo alla (1), quella di A e di $\mathfrak{C}(A)$.

Sempre dalla (1) deriva poi che $\mathfrak{C}$, intesa come corrispondenza tra A e $\mathfrak{C}(A)$, è non degenere, e pertanto ad essa (tenuto anche conto della sua irriducibilità su k) può applicarsi il principio del computo delle costanti. Esso, appena si indichino con x ed y due elementi generici su k di A e $\mathfrak{C}(A)$ rispettivamente, si traduce nella seguente relazione dimensionale:

$$\text{(2)} \qquad \dim(A) + \dim(\mathfrak{C}(x)) = \dim(\mathfrak{C}(A)) + \dim(\mathfrak{C}^{-1}(y)),$$

risultando, sempre in virtù dell'irriducibilità di $\mathfrak{C}$ su k, $\mathfrak{C}(x)$ irriducibile su $k(x)$ e $\mathfrak{C}^{-1}(y)$ irriducibile su $k(y)$.

Si noti che se $\mathfrak{C}(A) = B$, e perciò $\dim(\mathfrak{C}^{-1}(y)) \geq 0$ con y elemento generico di B su k, dalla (2) si ottiene:

$$\text{(3)} \qquad \dim(A) - \dim(B) + \dim(\mathfrak{C}(x)) \geq 0.$$

La (3) è dunque condizione necessaria perchè la corrispondenza $\mathfrak{C}$ sia non degenere. La stessa non risulta però sufficiente, come si può vedere da alcuni semplici esempi [2].

[2] Sia, ad es., A l'insieme dei k-sottospazi m-dimensionali di uno spazio proiettivo $P_r(K)$, e sia B l'insieme delle k-iperquadriche dello spazio $P_r(K)$ stesso (k corpo algebricamente chiuso; K sopracorpo (commutativo) di k, pure algebricamente chiuso e dominio universale su k; $0 \leq m < r$). Sia poi $\mathfrak{C}$ la corrispondenza, normalmente algebrica ed irriducibile su k, definita da:

$$(x, y) \in \mathfrak{C} \Longleftrightarrow x \subset y, \qquad (x \in A, y \in B).$$

Si ha allora:

$$\dim(A) = (r - m)(m + 1),$$

$$\dim(\mathfrak{C}(x)) = \dim(B) - \frac{1}{2}(m + 2)(m + 1),$$

per cui la condizione (3) può scriversi nella forma:

$$(r - m)(m + 1) - \frac{1}{2}(m + 2)(m + 1) \geq 0,$$

4. — Indicato ancora con x un elemento generico di A su k, si considerino i due insiemi $\mathfrak{C}(x)$ e $\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))$, normalmente algebrici su $k(x)$: il primo di essi è il trasformato totale di x attraverso $\mathfrak{C}$ (ed è quindi un sottoinsieme di $\mathfrak{C}(A)$); il secondo è il trasformato totale di $\mathfrak{C}(x)$ attraverso $\mathfrak{C}^{-1}$ (ed è quindi un sottoinsieme di A).

La corrispondenza $\mathfrak{C}$ tra A e $\mathfrak{C}(A)$ induce tra $\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))$ e $\mathfrak{C}(x)$ una corrispondenza $\mathfrak{C}^*$, simbolicamente definita da:

$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} \cap (\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x)) \times \mathfrak{C}(x)),$$

la quale risulta normalmente algebrica su $k(x)$, e non degenere, cioè tale che:

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))}(\mathfrak{C}^*) = \mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x)), \qquad \mathrm{pr}_{\mathfrak{C}(x)}(\mathfrak{C}^*) = \mathfrak{C}(x).$$

Detta $\mathfrak{C}^*_M$ una $k(x)$-componente di $\mathfrak{C}^*$ di dimensione massima [3], si ponga:

$$A^* = \mathrm{pr}_{\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))}(\mathfrak{C}^*_M), \qquad B^* = \mathrm{pr}_{\mathfrak{C}(x)}(\mathfrak{C}^*_M).$$

Dalla massimalità di $\mathfrak{C}^*_M$ in $\mathfrak{C}^*$ segue che A^* è una $k(x)$-componente di dimensione massima di $\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))$, il che comporta:

(4) $$\dim(A^*) = \dim(\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x)))\ [4].$$

Sempre per la massimalità di $\mathfrak{C}^*_M$ in $\mathfrak{C}^*$, ed avuto anche riguardo all'irriducibilità di $\mathfrak{C}(x)$ su $k(x)$, (n. 3), si ha poi che:

(5) $$B^* = \mathfrak{C}(x).$$

o meglio:

$$r \geq \frac{3}{2}m + 1.$$

Quest'ultima — ovviamente necessaria perchè la corrispondenza $\mathfrak{C}$ sia non degenere — non è però sufficiente in quanto è noto che, se $\frac{3}{2}m + 1 \leq r < 2m + 1$ (il che può solo avvenire se $m \geq 2$), una k-iperquadrica di $P_r(K)$, che contenga una k-sottovarietà lineare m-dimensionale, è necessariamente un cono.

[3] Se $\mathfrak{C}^*$ è irriducibile su $k(x)$, si ha ovviamente $\mathfrak{C}^*_M = \mathfrak{C}^*$.

[4] Si ricordi che per dimensione di un insieme Φ, normalmente algebrico e riducibile su un corpo k, si intende la massima dimensione delle sue k-componenti.

Detti inoltre x^* ed y^* due elementi generici su $k(x)$, rispettivamente di A^* e B^*, risulta chiaramente:

$$\dim(\mathfrak{C}_M^*(x^*)) = \dim(\mathfrak{C}^*(x^*)), \tag{6}$$

$$\dim(\mathfrak{C}_M^{*-1}(y^*)) = \dim(\mathfrak{C}^{-1}(y)), \tag{7}$$

essendo, nella (7), y un elemento generico di $\mathfrak{C}(A)$ su k.

Applicando ora a $\mathfrak{C}_M^*$ — intesa come corrispondenza algebrica tra A^* e B^*, irriducibile su $k(x)$ e non degenere — il principio del computo delle costanti, si ottiene:

$$\dim(A^*) + \dim(\mathfrak{C}_M^*(x^*)) = \dim(B^*) + \dim(\mathfrak{C}_M^{*-1}(y^*)),$$

e questa, tenuto conto delle (4), (5), (6), (7), può scriversi nella forma:

$$\dim(\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))) + \dim(\mathfrak{C}^*(x^*)) = \dim(\mathfrak{C}(x)) + \dim(\mathfrak{C}^{-1}(y)). \tag{8}$$

Dalle (2), (8) infine si ricava:

$$\begin{aligned} \dim(A) - \dim(\mathfrak{C}(A)) + \dim(\mathfrak{C}(x)) = \\ = \dim(\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))) - \dim(\mathfrak{C}(x)) + \dim(\mathfrak{C}^*(x^*)). \end{aligned} \tag{9}$$

5. — Dalla $\mathfrak{C}(A) \subset B$, e dalla supposta irriducibilità di B su k, (n. 3), discende:

$$\dim(\mathfrak{C}(A)) \leq \dim(B), \tag{10}$$

e nella (10) vale l'uguaglianza se, e solo se, $\mathfrak{C}(A) = B$; cioè se, e solo se, $\mathfrak{C}$ è non degenere.

Dalle (9), (10) si deduce allora:

$$\begin{aligned} \dim(A) - \dim(B) + \dim(\mathfrak{C}(x)) \leq \\ \leq \dim(\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))) - \dim(\mathfrak{C}(x)) + \dim(\mathfrak{C}^*(x^*)), \end{aligned} \tag{11}$$

valendo nella (11) l'uguaglianza se, e solo se, $\mathfrak{C}$ è non degenere.

Si può pertanto concludere con il seguente

TEOREMA: *Siano A e B due insiemi normalmente algebrici su un corpo commutativo k, e sia $\mathfrak{C}$ una corrispondenza tra A e B, pur essa normalmente algebrica su k, e tale che* $\mathrm{pr}_A(\mathfrak{C}) = A$. *Si supponga* *inoltre che B e $\mathfrak{C}$, e di conseguenza A, siano irriducibili su k. Posto allora:*

$$\delta = \dim(A) - \dim(B) + \dim(\mathfrak{C}(x)),$$

$$\eta = \dim(\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))) - \dim(\mathfrak{C}(x)) + \dim(\mathfrak{C}^*(x^*)),$$

dove $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} \cap (\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x)) \times \mathfrak{C}(x))$, *e dove x è un (prefissato) elemento generico su k di A ed x^* un elemento generico su $k(x)$ di una $k(x)$-componente di dimensione massima di* $\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))$, *si ha:*

$$\delta \leq \eta. \tag{12}$$

Condizione necessaria e sufficiente perchè la corrispondenza $\mathfrak{C}$ tra A e B sia non degenere (cioè si abbia anche $\mathrm{pr}_B(\mathfrak{C}) = B$*) è che nella* (12) *valga il segno di uguaglianza.*

OSSERVAZIONE. — A norma di quanto stabilito nel n. 3, la condizione $\delta \geq 0$ è necessaria perchè una corrispondenza $\mathfrak{C}$, soddisfacente alle condizioni di cui sopra, risulti non degenere.

Dal punto di vista applicativo giova, alle volte, andar a verificare se, per particolari corrispondenze di tipo siffatto, la stessa condizione $\delta \geq 0$ è (eventualmente) anche sufficiente. A tale scopo il teorema precedente fornisce un'utile strumento d'indagine: la sufficienza della $\delta \geq 0$ appare infatti assicurata appena si riesca a provare che, dalla medesima $\delta \geq 0$, non può conseguire $\delta < \eta$.

6. — La condizione di non degenerabilità, enunciata nell'ultimo capoverso del teorema del n. 5, si presta a svariate, proficue applicazioni. Qui ci limiteremo, a titolo di esempio, ad indicarne una, relativamente semplice, che permetterà di risolvere un problema, per altra via forse più complesso.

Sia k un corpo commutativo algebricamente chiuso, e $P_r(K)$ uno spazio proiettivo r-dimensionale, ($r \geq 3$), costruito su un sopracorpo K di k, che sia pure commutativo ed algebricamente chiuso, e risulti dominio universale su k (ipotesi, quest'ultima, che ci permetterà di considerare elementi generici su k, o su una qualunque estensione finita di k, dei vari insiemi algebrici che si andranno via, via presentando).

Usando le notazioni del teorema del n. 5, si definiscano i due insiemi A e B nel seguente modo:

A : insieme delle k-curve razionali normali di $P_r(K)$, di un prefissato ordine m, $(1 \leq m \leq r)$;

B : insieme delle k-varietà d-dimensionali, dell'ordine $n_1 n_2 \ldots n_{r-d}$, intersezione completa di $r-d$ k-ipersuperfici di $P_r(K)$, degli ordini rispettivi $n_1, n_2, \ldots, n_{r-d}$, $(2 \leq d \leq \leq r-1 ;\ n_i \geq 2,\ i = 1, 2, \ldots, r-d)$.

Sia poi $\mathfrak{C}$ la corrispondenza tra A e B definita da :

$$(x, y) \in \mathfrak{C} \Longleftrightarrow x \subset y, \qquad (x \in A,\ y \in B).$$

È facile constatare che $\mathrm{pr}_A(\mathfrak{C}) = A$, ed inoltre che A, B e $\mathfrak{C}$ sono normalmente algebrici su k ed ivi irriducibili. Possono allora applicarsi le conclusioni del teorema del n. 5.

Con semplici calcoli si può verificare che :

$$\dim(A) = (r-m)(m+1) + (m+3)(m-1),$$

$$\dim(\mathfrak{C}(x)) = \dim(B) - \sum_{i=1}^{r-d} (mn_i + 1),$$

essendo x un prefissato elemento generico di A su k.

Ne viene :

$$\delta = m\left(r + 1 - \sum_{i=1}^{r-d} n_i\right) + d - 3.$$

La condizione $\delta \geq 0$ è notoriamente necessaria per la non degenerabilità di $\mathfrak{C}$. Ci proponiamo ora di provarne anche la sufficienza, per la qual cosa basterà dimostrare che da $\delta \geq 0$ non può conseguire $\delta < \eta$.

Si faccia dunque l'ipotesi $\delta \geq 0$, e si dica x^* un elemento generico su $k(x)$ di una $k(x)$-componente di dimensione massima di $\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))$.

Si considerino i due seguenti casi possibili :

a) x^* coincida con x ;

b) x^* intersechi x in ν punti, con $0 \leq \nu \leq m-2$, (l'eventualità $\nu > m-2$ non essendo considerata, perchè essa comporterebbe $x^* = x$).

Nel caso *a*) risulta :

$$\dim(\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))) = 0,$$

$$\dim(\mathfrak{C}^*(x^*)) = \dim(\mathfrak{C}(x)),$$

dal che discende $\eta = 0$. La condizione $\delta < \eta$ diviene perciò $\delta < 0$, in contrasto con l'ipotesi $\delta \geq 0$.

Nel caso *b*) si ha invece:

$$\dim(\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))) = \nu + \varepsilon(r-m)(m-\nu+1) + (m-1)(m-\nu+3) - \sigma,$$

$$\dim(\mathfrak{C}(x)) = \dim(B) - \sum_{i=1}^{r-d}(mn_i + 1),$$

$$\dim(\mathfrak{C}^*(x^*)) = \dim(B) - \sum_{i=1}^{r-d}[2(mn_i+1) - \nu],$$

con $\varepsilon = 1$, o $\varepsilon = 0$, a seconda che $0 \leq \nu \leq m+1$, o $\nu = m + 2$, e con $\sigma \geq 0$ (valendo, in quest'ultima, l'uguaglianza se, e solo se, $\mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{C}(x))$ è l'insieme di tutte le k-curve razionali normali, dell'ordine m di $P_r(K)$, che intersecano x in ν punti).

La condizione $\delta < \eta$ diviene di conseguenza:

$$(13) \quad \begin{cases} \nu(d-2) + \sigma < 0, & \text{se } 0 \leq \nu \leq m+1; \\ (m+2)(m-r+d-2) + \sigma < (m-r)(m+1), & \text{se } \nu = m+2. \end{cases}$$

La prima delle (13) è in contrasto con le $\nu \geq 0$, $d \geq 2$, $\sigma \geq 0$; e così la seconda è in contrasto con le $d \geq 2$, $\sigma \geq 0$, in quanto in virtù delle stesse fornisce la disuguaglianza assurda $(m+2)(m-r) < (m+1)(m-r)$.

Si è dunque visto che $\delta \geq 0$ non può implicare $\delta < \eta$. È pertanto lecito concludere che $\delta \geq 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè la considerata corrispondenza $\mathfrak{C}$ sia non degenere. Ciò è come dire che:

Ogni k-varietà d-dimensionale dell'ordine $n_1 n_2 \ldots n_{r-d}$, *intersezione completa di* $r-d$ *k-ipersuperfici di* $P_r(K)$, *degli ordini rispettivi* $n_1, n_2, \ldots, n_{r-d}$, $(2 \leq d \leq r-1;$ $n_i \geq 2$, $i = 1, 2, \ldots, r-d)$, *contiene k-curve razionali normali di un prefissato ordine m,* $(1 \leq m \leq r)$, *se, e solo se, risulta:*

$$m\left(r + 1 - \sum_{i=1}^{r-d} n_i\right) + d - 3 \geq 0.$$