INTEGRALES GÉNÉRALISÉES DANS $\mathcal{C}^m$ $(m \geq 2)$ (*)

par RADU BADESCO, CORNELIA NANES et ION SEBESAN (à Bucarest) (**)

SOMMARIO. - *Gli Autori studiano una classe assai generale di integrali riemanniani di seconda specie (con dominio d'integrazione illimitato) e danno certe condizioni d'esistenza nello spazio conforme $\mathcal{C}^m$ $(m \geq 2)$. Usando la trasformazione del Kelvin, questo studio può essere ricondotto a quello degli integrali di prima specie presentato in* [1] *e* [2].

SUMMARY. - *The Authors study a rather general class of riemannian integrals of the second kind (with an unbounded domain of integration) and establish certain existence conditions in the conform space $\mathcal{C}^m$ $(m \geq 2)$. By means of the Kelvin transformation, this study is reduced to a research on integrals of the first kind presented in* [1] *and* [2].

L'étude des intégrales riemanniennes généralisées m-uples de première espèce

$$I = \int_{\overline{D}_m} f(M)\, d\tau \tag{1}$$

que nous avons récemment faite dans les espaces euclidiens $R^m (m \geq 2)$ [1], [2], peut être étendue aux intégrales généralisées de II-ème espèce dans les mêmes espaces R^m moyennant certaines conditions supplémentaires que nous indiquerons à la fin. Ces conditions apparaissent d'une manière naturelle quand on utilise *le procédé dual des majorantes-minorantes* synthétisé par *le symbole de Landau. L'existence des intégrales de I-ère espèce étant une propriété «locale»* lorsque le domaine d'intégration $\overline{D}_m$ (à m dimensions) est un compact, l'étude du cas des $\overline{D}_m$ non bornés, qui conduit à des intégrales généralisées

(*) Pervenuto in Redazione il 3 aprile 1969.

(**) Indirizzo degli Autori: Institut polytechnique — C. Dorobanti 232 — Bucarest (3) (R. S. România).

de II-ème espèce, pourra être faite dans un espace conforme $\mathcal{C}^m (m \geq 2)$ et ramené au cas des $\overline{D}_m$ bornés par la transformation de Kelvin. L'avantage de cette méthode est de pouvoir ramener à l'origine le point à l'infini, ce qui permet d'examiner *le comportement de la frontière S_{m-1} de $\overline{D}_m$ au voisinage de l'ensemble des singularités* (1) *Δ_p de la function $f(M) : \{\mathcal{C}^m - \Delta_p\} \to R$* dont dépend l'existence de I. Il est assez difficile pour les domaines non bornés de mettre en évidence l'allure de Δ_p par rapport à celle de S_{m-1} au voisinage du point à l'infini.

Un autre avantage apparaît lorsque l'on veut introduire les distributions définies par les *intégrales à valeurs principales au* sens de Cauchy-Hadamard-Fox [3], qui ont une tendance à s'imposer dans toutes les recherches modernes de Physique, Mécanique et Technique. L'additivité des intégrales permet dans ce cas d'isoler Δ_p par des hypersurfaces réelles convenablement choisies et de généraliser dans R^m (et $\mathcal{C}^m$) les intégrales à valeurs principales.

1. — Rappelons les hypothèses faites dans [2] sur les intégrales m-uples de première espèce ($\overline{D}_m$ borné)

$$I = \int_{\overline{D}_m} f(M)\, d\tau = \lim_{\|d\| \to 0} I^\varepsilon = \lim_{\|d\| \to 0} \int_{\overline{D}^\varepsilon_m} f(M)\, d\tau \tag{1}$$

a) $\overline{D}_m \subset R^m$ est un compact simplement connexe (à m dimensions) dont la frontière $\overline{S}_{m-1}$ est une hypersurface réelle (à $m-1$ dimensions) (2) de la classe C^1 par rapport à un certain compact de représentation paramétrique propre.

b) $f(M)$ est une fonction réelle appartenant à la classe $C[R^m - \Delta_p]$, Δ_p étant l'ensemble des discontinuités de seconde espèce continûment réparties sur une hypersurface réelle Σ_p (à p dimensions, $m > p$), de mêmes caractéristiques que $\overline{S}_{m-1}$. L'intersection $\overline{\Delta}_q = \overline{D}_m \cap \Delta_p \neq \emptyset$ est un compact et à au plus p dimensions. Nous avons désigné par E l'espace fonctionnel des $f(M)$, avec la norme des fonctions continues.

c) On suppose dans (1) que $\overline{\Delta}_q$, inclus dans S_{m-1}, *a été isolé par une famille de hypersurfaces réelles Σ^ε_s $(s \geq p)$* à un paramètre

(1) Discontinuités de II-ème espèce si $f(M) : \mathcal{C}^m \to R$.

(2) Ou un nombre fini de telles surfaces, rattachées entre elles. La matrice des dérivées premierès est supposée de rang $m-1$ et le volume de $\overline{D}_m \neq 0$.

$\varepsilon \in R_+$ définissant un filtre de voisinages V^ε de $\overline{\Delta}_q$ $(V^\varepsilon \subset \overline{D}_m)$ et que $[\overline{D}_m^\varepsilon = \overline{D}_m - V^\varepsilon] \cap \overline{\Delta}_q = \varnothing$. De plus, si la norme $\| d \|$ des distances, $d = PM$ $(P \in \Delta_q,\ M \in \Sigma_s^\varepsilon)$ tend vers zéro, les hypersurfaces Σ_s^ε tendent uniformément vers $\overline{\Delta}_q$ de manière que le volume de $\overline{V}^\varepsilon$ (3) tende aussi vers zéro.

L'intégrale définie par (1) existe et a la valeur I si ce nombre, unique et fini, est indépendant du choix des Σ_s^ε et de la manière dont ces hypersurfaces tendent uniformément vers $\overline{\Delta}_q$.

2. — Les intégrales de II-ème espèce à domaine d'intégration $\overline{\mathcal{D}}'_m$ non borné sont définies par la limite — unique et finie —

$$(2) \qquad I = \lim_{n \to \infty} \int_{\overline{\mathcal{D}}_m^n} f_*(P)\, d\tau, \quad P(X_j) \in \overline{\mathcal{D}}'_m$$

où la suite dénombrable des compacts $\overline{\mathcal{D}}_m^n = \overline{\mathcal{D}}_m \cap \overline{S}^{(n)}$, intersections de $\overline{\mathcal{D}}'_m$ avec les boules fermées $\overline{S}^{(n)}$ (4) — de centre 0 et de rayons r_n tendant vers l'infini — a pour limite $\overline{\mathcal{D}}'_m$. Ce nombre I doit être indépendant du choix des $\overline{S}^{(n)}$ qui peuvent être remplacées par des hypersurfaces arbitraires fermées — à $m - 1$ dimensions — s'emboîtant les unes les autres et tendant dans toutes leurs dimensions vers l'infini. Quant à la fonction $f_*(P)$, elle doit appartenir à l'espace E étant définie sur tout compact de $\overline{\mathcal{D}}'_m$.

3. — Comme pour les intégrales riemanniennes de I-ère espèce étudiées dans [2], nous pouvons faire les remarques suivantes :

α) *L'additivité des intégrales de* I*-ère espèce* permet de supposer que *le domaine d'intégration $\overline{\mathcal{D}}'_m$ ne contient pas la portion de la boule unité correspondant à toutes les coordonnées $X_j \in R_+^*$*, car les intégrales étendues aux domaines intérieurs sont de première espèce, donc déjà étudiées dans [2]. Ensuite, les intégrales pour lesquelles l'une au moins des coordonnées $X_j \in R_-$, peuvent être ramenées au cas $X_j \in R_+$ par les changements des X_j en $-X_j$, *ou plus généralement par une transformation ponctuelle bijective à jacobien non nul, si ceci est possible.* Il est donc possible, sans restreindre la généralité, d'admettre que pour les intégrales de II-ème espèce, $\overline{\mathcal{D}}'_m$ est extérieur à la boule unité dans la région $\mathcal{D}^0\, \{X_j \in R_+ \cup \{0\} \mid (j = 1, 2, \ldots, m)\}$.

(3) Pour $m = 2$, c'est l'aire de $\overline{V}^\varepsilon$ qui doit tendre vers zéro.

(4) Si $m = 2$, $\overline{S}_1$ est un disque fermé, avec Aire $\overline{S}_1 \neq 0$.

β) Comme pour les intégrales de I-ère espèce, l'intégrale I existe si et seulement si $f(P)$ *est absolument intégrable* sur tout domaine $\overline{\mathcal{D}}^n_m \subseteq \overline{\mathcal{D}}'_m$ ce qui permet de supposer $f(P) \geq 0$ sur $\overline{\mathcal{D}}'_m$.

γ) La transformation de Kelvin et son inverse

$$(3) \qquad X_j = \frac{x_j}{r^2}, \quad r^2 = \sum_{j=1}^{m} x_j^2$$

avec $\varrho \cdot r = 1$; $\varrho, r \in R^*_+$

$$(3') \qquad x_j = \frac{X_j}{\varrho^2}, \quad \varrho^2 = \sum_{j=1}^{m} X_j^2$$

permettent de réduire l'étude des intégrales généralisées de II-ème espèce à celle de I-ère espèce tenant compte des conclusions de [2]. Bien entendu on se place dans un espace conforme $\mathcal{C}^m$ ayant un seul point à l'infini dont l'image est l'origine 0.

En premier lieu il faut introduire le filtre $\mathcal{F}$ des voisinages de l'infini correspondant à celui qui a été choisi dans [2] au point 0. Pour l'obtenir, nous pouvons transformer d'abord l'hypercube $\overline{D}^0_m \left\{[0, a]^m \mid a < \frac{\sqrt{m}}{m}\right\}$. Ses frontières, les hyperplans $x_j = 0$, $x_j = a$ sont les images respectivement des hyperplans $X_j = 0$ et des portions d'hypersphères

$$(4) \qquad \varrho^2 = \sum_{j=1}^{m} X_j^2 = \frac{X_j}{a}$$

extérieures à la boule unité et délimitant un domaine $\overline{\mathcal{D}}^*$ non borné inclus dans $\mathcal{D}^0$

$$(5) \qquad \overline{\mathcal{D}}^* \left\{\varrho^2 \geq \frac{X_j}{a}, X_j \geq 0 \mid j = 1, 2, \dots, m\right\}, a \in \left(0, \frac{\sqrt{m}}{m}\right).$$

Réciproquement, *tout domaine non borné* $\overline{\mathcal{D}} \subseteq \overline{\mathcal{D}}^*$ pourra être transformé au moyen de (2) dans un *domaine borné* $\overline{D}$ inclus dans la boule unité, en particulier $\overline{\mathcal{D}}^*$ sera transformé dans l'hypercube $\overline{D}^0_m \left\{[0, a]^n \mid a < \frac{\sqrt{m}}{m}\right\}$.

δ) Les conditions α, β, γ concernant le domaine $\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}^0$ étant remplies, on peut considérer l'extension de $f_*(P)$ à $\mathcal{D}^0$ définie de la manière suivante

$$(6) \qquad f^*(P) = \begin{cases} f_*(P) \geq 0 & \text{pour } P \in \overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}^0 \\ 0 & \text{pour } P \in \mathcal{D}^0 - \overline{\mathcal{D}} \end{cases}$$

dont le support est au plus le domaine $\overline{\mathcal{D}}$. La frontière $\overline{S}_{m-1}$ de $\overline{\mathcal{D}}$ peut être considérée comme une hypersurface singulière pour $f^*(P)$[5], ses points constituant l'ensemble des discontinuités de I-ème espèce pour $f^*(P)$ si, par l'additivité des intégrales et de ses domaines d'intégration, on partage $\overline{\mathcal{D}}$ en un nombre fini de domaines pour lesquels les discontinuités de II-ème espèce de $f_*(P)$ sont placées sur leurs frontières. On peut donc supposer cette dernière propriété *réalisée pour le domaine* $\overline{\mathcal{D}}$.

ε) Dans toutes ces hypothèses, la transformation de Kelvin pour l'ensemble dénombrable d'intégrales de I-ère espèce

$$(7) \qquad I_1^*, I_2^*, \dots, I_n^*, \dots \quad I_n^* = \int_{\overline{\mathcal{D}}_n} f^*(P)\, d\tau^*, \quad \overline{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}^0 \cap \overline{S}^{(n)}$$

étendues aux compacts $\overline{\mathcal{D}}_n$, conduira aussi à des intégrales de I-ère espèce

$$(8) \qquad I_1, I_2, \dots, I_n, \dots \quad I_n = \int_{\overline{D}_m^n} f(M) \frac{d\tau}{r^{2m}}$$

où :

— $\overline{D}_m^n$ est le transformé Kelvin du domaine $\overline{\mathcal{D}}_m^n = \mathcal{D}^0 \cap \overline{S}^{(n)}$.

Comme l'on a $\overline{\mathcal{D}}_m^n \subseteq \mathcal{D}^0$ et $\overline{\mathcal{D}}_m^n \subset \overline{\mathcal{D}}_m^{n'}$, si $n < n'$ ($\forall\, n$ et $\forall\, n' \in N$) il résulte les inclusions $\overline{D}_m^n \subset \overline{D}_m^{n'}$, $\forall\, n$ et $\forall\, n' \in N$, et tous ces compacts sont inclus dans l'hypercube $\overline{D}_m^0 \left\{[0, a]^m \mid a < \frac{\sqrt{m}}{m}\right\}$

— $f(M)$ est la transformée Kelvin de $f^*(P)$

— le jacobien J de la transformation est

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\varrho^2 - 2X_1^2}{\varrho^4} & -\frac{2X_1X_2}{\varrho^4} & \dots & -\frac{2X_1X_m}{\varrho^4} \\ -\frac{2X_2X}{\varrho^4} & \frac{\varrho^2 - 2X_2^2}{\varrho^4} & \dots & -\frac{2X_2X_m}{\varrho^4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\frac{2X_mX_1}{\varrho^4} & -\frac{2X_mX_2}{\varrho^4} & \dots & \frac{\varrho^2 - 2X_m^2}{\varrho^4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{(\varrho^2)^m}$$

[5] $f_*(P)$ peut être continue sur certaines parties de $\overline{S}_{m-1}$.

car, après avoir mis $(\varrho^{-4})^m$ en facteur et amené à zéro tous les éléments situés sous la diagonale principale, on a

$$(9) \qquad J = \frac{-1}{X_1 \varrho^{4m-2}} \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \dots & X_m \\ 0 & \varrho^2 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varrho^2 \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \dots & \varrho^2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{(\varrho^2)^m}, \; X_1 \neq 0$$

de sorte que l'on peut écrire $d\tau = \frac{d\tau^*}{\varrho^{2m}}$, $d\tau^* = \frac{d\tau}{r^{2m}}$.

4. — Pour ramener les intégrales riemanniennes généralisées de II-ème espèce à celles de I-ère espèce, nous allons considérer l'intégrale auxiliaire

$$(10) \qquad \dot{J}^*_{\alpha,\beta} = \int_{\bar{\mathcal{D}}^0_m} \frac{d\tau^*}{\left[\sum_{j=1}^{m-q} X_j\right]^\alpha \varrho^\beta} \equiv \int_{\bar{\mathcal{D}}^0_m} G(P)\, d\tau^*,$$

$$\bar{\mathcal{D}}^0_m \left\{ \varrho^2 \geq \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-q} X_j \,;\; \varrho^2 \geq \frac{X_{m-h+1}}{a} \,;\; X_k \geq 0 \right\}$$

$$h = 1, 2, \dots, q \,;\; k = 1, 2, \dots, m$$

qui dépend des paramètres $\alpha, \beta \in R^*_+$. En effectuant la transformation (3) on a

$$(11) \qquad \dot{J}_{\alpha,\beta} = \int_{\bar{D}^0_m} \frac{d\tau}{\left[\sum_{j=1}^{m-q} x_j\right]^\alpha r^{2(m-\alpha)-\beta}} = \int_{\bar{D}^0_m} g(M)\, d\tau$$

où

$$(12) \qquad \bar{D}^0_m \left\{ \sum_{j=1}^{m-q} x_j \leq a, \; x_{m-h+1} \leq a, \; x_k \geq 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} h = 1, 2, \dots, q \\ k = 1, 2, \dots, m \end{array} \right\}.$$

Il est à remarquer que le cas où $q = 0$ correspond à $\bar{\Delta}_q = \{0\}$, cas présentant deux aspects si l'on observe que l'image de 0 est le point à l'infini.

Le comportement au voisinage de ce point pour la fonction auxiliaire $G(P)$ *est d'une part synthétisé par le facteur* $\varrho^{-2\beta}$ *et d'une autre part, tenant compte de l'ensemble des singularités* $\overline{\Delta}_p$, *par le second facteur* $\left[\sum_{j=1}^{m-q} x_j\right]^{-\alpha}$. Il est donc naturel que ce point joue un rôle à part dans l'étude de l'existence de I, en comparaison avec l'ensemble $\overline{\Delta}_p$ des singularités.

Toutes les fonctions $f_*(P) \subset E$ qui ont les mêmes singularités $\overline{\Delta}_p$ que $G(P)$ seront considérées comme équivalentes par rapport à la relation $\mathcal{R}$ de Landau dans le voisinage $V^\varepsilon(\infty)$ du point à l'infini [6].

$$f_*(P) = \underset{P \in V^\varepsilon(\infty) - \overline{\Delta}_q}{\mathrm{O}} [G(P)] \tag{13}$$

relation qui s'écrit pour tous les points $P \in V^\varepsilon(\infty) - \overline{\Delta}_q$

$$0 \leq |f_*(P)| < KG(P), \qquad K \text{ fixe } \in R_+. \tag{14}$$

Dans toutes ces hypothèses les suites positives croissantes

$$\{I_n \mid n \in N\}, \ \{\dot{J}_n \mid n \in N\} \ \dot{J}_n = \int_{\overline{D}_m^n} \frac{g(M)}{r^{2m}} d\tau = \int_{\overline{\mathcal{D}}_m^n} G(P)\, d\tau^* \tag{15}$$

qui sont dans la relation (14), permettront d'établir *l'existence de l'intégrale* (1) *d'après les théorèmes* I *et* II *de* [2]:

Considérons les sous espaces $E_{\alpha,\beta} \subset E$ définis au moyen de la relation $\mathcal{R}$ de Laudau par les triplets

$$\{f_*(P), \mathcal{R}, G(P)\} \quad \left\{\frac{1}{f_*(P)}, \mathcal{R}, \frac{1}{G(P)}\right\} \tag{16}$$

avec $\inf\limits_{P \in V^\varepsilon(\infty)} f(P) \neq 0$ dans le second cas.

[6] $V^\varepsilon(\infty)$, par la transformation de Kelvin, est l'extérieur de l'intersection de $\overline{\mathcal{D}}_m^n$ avec l'hypersphère de centre 0 et de rayon $n = 1/\varepsilon$, $n \in N$. Le transformé de $\overline{\mathcal{D}}_m^n$ sera désigné par $\overline{D}_m^n$.

Tout homéomorphisme qui conduira à deux fonctions $f_*(P)$ ayant le même $\overline{\Delta}_p$ que $G(P)$ et correspondant aux mêmes valeurs de α et β, permettra de considérer ces fonctions comme équivalentes.

5. — Théorème I. *Si* $m > q \geq 0$, $\forall\ \beta' > q \geq 0$, $\forall\ \alpha' < m - q$ *et* $\forall\ f_*(P) \in E_{\alpha, \beta} \subset E$, $\exists\ I_0 \in R_+$ *tel que* $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = I_0$. *L'intégrale existe et a la valeur* I_0 *dans les hypothèses faites au* § 3.

Si $\alpha'' = 0$, $\forall\ \beta'' > m$ et $\forall\ f_*(P) \in E_{0, \beta''} \subset E$, $\exists\ I_0 \in R_+$ tel que $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = I_0$

Si $\beta''' = 0$, $\forall\ \alpha''' > m$ et $\forall\ f_*(P) \in E_{\alpha''', 0} \subset E$, $\exists\ I_0 \in R_+$ tel que $\lim\limits_{n \to \infty} I_n = I_0$.

Il est à remarquer que les premières conditions peuvent s'écrire: $\beta' > m - \alpha'$, $\alpha' < m - q$.

La démonstration est basée d'abord sur la trasformation de Kelvin dans les intégrales (7) et (8) et ensuite sur la relation $\mathcal{R}$ de Landau (14)

$$I_n = \int\limits_{\overline{\mathcal{D}}_m^n} f^*(P)\, d\tau^* = \int\limits_{\overline{D}_m^n} f(M)\, \frac{d\tau}{r^{2m}}, \quad n \in N \tag{17}$$

$$0 < I_n^* \leq K J_n = K \int\limits_{\overline{\mathcal{D}}_m^n} G(P)\, d\tau^* = K \int\limits_{\overline{D}_m^n} g(M)\, \frac{d\tau}{r^{2m}} = \tag{18}$$

$$= K \int\limits_{\overline{D}_m^n} \frac{d\tau}{\left[\sum\limits_{j=1}^{m-q} x_j\right]^{\alpha} r^{2m-2\alpha-\beta}}$$

les intégrales auxiliaires J_n dépendant des paramètres α et β. Leur calcul peut se faire en utilisant la formule bien connue

$$J_n = \int\limits_{\frac{1}{r_n}}^{1} \frac{dr}{r^{2m}} \int\limits_{\sigma_r} g(M)\, d\sigma_r = \int\limits_{\frac{1}{r_n}}^{1} r^{\alpha+\beta-m-1}\, dr \int\limits_{\sigma_1} \frac{d\sigma_1}{\left[\sum\limits_{j=1}^{m-q} u_j\right]^{\alpha}} \tag{19}$$

σ_r étant d'intersection de la surface de l'hypersphère S_r centrée en 0 et de rayon r avec le domaine $\overline{D}_m^n$ défini dans le § 3 car un changement en coordonnées hypersphériques où l'on ne met en évidence que $r: \left\{ \sum_{j=1}^{m} x_j^2 = r^2,\ x_j = r u_j \mid j = 1, 2, \ldots, m \right\}$ permet d'introduire l'intégrale de surface $(m-1)$-uple étendue le long de la hypersphère unité σ_1, qui ne dépend pas de $r \cdot J_n$ est ainsi réduite à un produit d'intégrales *de I-ère espèce*, dont les conditions suffisantes d'existence d'après [2], pour r_n tendant vers zéro, sont $\beta > m - \alpha$ et $\alpha < m - q$, ce qui conduit aux hypothèses faites $\beta' > q$, $\alpha' < m - q$. Pour la première intégrale, la condition $\beta > m - \alpha$ est immédiate et elle dépend du comportement de la frontière de $\bar{\mathcal{D}}$ au voisinage du point à l'infini. Quant à la seconde intégrale, son existence dépend du comportement de la fonction $g(M) = \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^{m-q} u_j\right]^{\alpha}}$, avec $\sum_{j=1}^{m} u_j^2 = 1$, au voisinage des intersections des surfaces singulières $\Sigma_{m-q} \left\{ \sum_{j=1}^{m-q} u_j = 0 \right\}$ avec l'hypercube $\{M(u_j) \in [0, 1]^m\}$, ou avec la boule unité $\left\{ \sum_{j=1}^{m} u_j^2 = 1 \right\}$, intersection qui est incluse dans la frontière de $\mathcal{D}$. Cette intersection a évidemment q dimensions, d'où résulte la condition $\alpha < m - q$, pour $q = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Si $f_*(P)$ n'a aucune singularité sur Σ_{m-q}, α est égal à zéro et le point à l'infini est le seul point siugulier. La condition d'existence est alors donnée par $\beta > m$ et elle a trait aux intégrales de la forme $\int_{\bar{\mathcal{D}}} \frac{f_*(P)}{\varrho^{\beta}} d\tau^*$, dout le facteur $\varrho^{-\beta}$ assure la convergence au point à l'infini. Par contre, si $\beta = 0$, c'est α qui doit assurer l'existence et alors l'intégrale I n'est convergente que pour $\alpha > m$. Le théorème I est ainsi démontré.

6. — Théorème II. *Si* $m > q \geq 0$, $\forall\, \beta'' < q$, $\forall\, \alpha'' > m - q$ *et* $\forall\, f_*(P) \in E_{\alpha, \beta} \subset E$, *l'intégrale I n'existe pas car* $\lim_{n \to \infty} J_n = \infty$. *Il en est de même si* $\beta'' = q$ *et* $\alpha'' > m - q$ *ou* $\beta'' < q$ *et* $\alpha'' = m - q$, *avec* $q = 0, 1, \ldots, m-1$.

La démonstration s'appuie sur le second triplet (16) et sur la transformation de Kelvin. Dans ce cas les intégrales J_n sont majorées par les I_n correspondantes et, tenant compte de [2], on voit immédiatement que les conditions du théorème II sont suffisantes pour montrer que les J_n ne sont pas bornés si n tend vers l'infini. D'ailleurs, un autre calcul en coordonnées hypersphériques de $I_{\alpha, \beta}$, permet de vérifier tous ces résultats.

7. — On peut maintenant passer au cas d'un domaine quelconque simplement connexe $\bar{\mathcal{D}}_m \subset \mathcal{D}$ limité par un nombre fini de hypersurfaces $\bar{S}_{m-1}$ rattachées les unes les autres, de mêmes caractéristiques que dans α). S'il existe une transformation ponctuelle $\xi_k = \xi_k(P) \in C^1(\bar{\mathcal{D}}^0_m)$, avec le jacobien $J \neq 0$, de manière qu'à $\bar{S}_{m-1}$ corresponde la frontière de $\bar{\mathcal{D}}^0_m$, il y a encore deux théorèmes analogues relatifs aux intégrales (1). Toutefois, on doit supposer que les hyperplans tangents aux m hypersurfaces constituant la frontière $\bar{S}_{m-1}$ fassent aux points de raccordement des angles *différents de zéro* dont les angles correspondants par la transformation de Kelvin sont ceux du hypercube $\bar{D}^0_m$ [7].

Généralisation.

L'étude des intégrales généralisées de I-ère espèce [2] avait eu trait à des fonctions $f(M)$ ayant des discontinuités de II-ème espèce uniformément réparties sur les portions de hypersurfaces définies par

$$\left\{ \begin{matrix} x_1^{1/\beta_1} + x_2^{1/\beta_2} + \dots + x_{m-q}^{1/\beta_{m-q}} = 0, 0 \leq x_j \leq a < 1, \beta_j \in R_+, \ (j=1,2,\dots,m) \\ q = 0,1,\dots,m-1 \end{matrix} \right\}.$$

L'extension de ces cas aux intégrales généralisées de II-ème espèce conduit à la fonction auxiliaire

$$G(P) = \frac{1}{\left[\sum_{j=1}^{m-q} X_j^{1/\beta_j}\right]^{\alpha} \cdot \left[\sum_{k=1}^{m} X_k^{2/\beta_k}\right]^{\beta/2}}$$

que l'on intègre sur le domaine non borné inclus dans $\mathcal{D}^0$:

$$\bar{\mathcal{D}}^*_m \left\{ \begin{matrix} \sum_{j=1}^{m} X_j^{2/\beta_j} \geq \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{m-q} X_j^{1/\beta_j}, \ \sum_{j=1}^{m} X_j^{2/\beta_j} \geq \frac{1}{a} X_{m-h+1}^{1/\beta_{m-h+1}}, X_k \geq 0 \\ h = 1, 2, \dots, q; \ k = 1, 2, \dots, m. \end{matrix} \right\}$$

La transformation $U_j^{\beta_j} = X_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, pour laquelle

$$J = \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m U_1^{\beta_1 - 1} \cdot U_2^{\beta_2 - 1} \dots U_m^{\beta_m - 1}$$

[7] D'autres cas d'amélioration de la convergence sont à envisager si ces angles ne sont pas tous différents de zéro.

transforme le domaine $\overline{\mathcal{D}}_m^0$ dans le domaine (10) transcrit avec les u_j et ensuite par la transformation de Kelvin l'intégrale de $G(P)$ devient

$$\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m \int_{\overline{D}_m^0} \frac{U_1^{\beta_1-1} U_2^{\beta_2-1} \ldots U_m^{\beta_m-1} \, dU_1 \, dU_2 \ldots dU_m}{\left[\sum_{j=1}^{m-q} U_j\right]^{\alpha} \left[\sum_{j=1}^{m} U_j^2\right]^{\beta/2}}$$

qui n'est autre que l'intégrale

$$\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m \int_{\overline{D}_m^0} \frac{x_1^{\beta_1-1} \ldots x_m^{\beta_m-1}}{\left[\sum_{j=1}^{m-q} x_j\right]^{\alpha}} r^{\gamma} \, d\tau, \quad \gamma = 2\alpha + \beta - (\beta_1 + \ldots + \beta_m) - m.$$

Une analyse de cette intégrale analogue à celle présentée dans [2] conduit aux conditions

$$\beta' > \sum_{j=m-q+1}^{m} \beta_j, \quad \alpha' < \sum_{j=1}^{m-q} \beta_j$$

qui généralisent les inégalités du Théorème I. Ces conditions peuvent s'écrire encore

$$\beta' > \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \alpha', \quad \alpha' < \sum_{j=1}^{m-q} \beta_j .$$

Ensuite, on a les deux cas exceptionnels

$$\alpha'' = 0, \ \forall \, \beta'' > \sum_{j=1}^{m} \beta_j, \quad \text{et} \quad \beta''' = 0, \ \forall \, \alpha''' > \sum_{j=1}^{m} \beta_j .$$

Par une même analyse, les conditions de divergence s'écrivent

$$\beta'' < \sum_{j=m-q+1}^{m} \beta_j, \quad \alpha'' > \sum_{j=1}^{m-q} \beta_j$$

et on peut avoir aussi les cas exceptionnels

$$\beta'' = \sum_{j=m-q+1}^{m} \beta_j, \quad \alpha'' > \sum_{j=1}^{m-q} \beta_j \quad \text{et} \quad \alpha''' = \sum_{j=1}^{m-q} \beta_j, \quad \beta''' < \sum_{j=m-q+1}^{m} \beta_j .$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BADESCO, C. NANES, I. SEBESAN - *Intégrales riemanniennes généralisées dans les espaces* R^m - Atti dell'VIII Congresso dell'Unione Matematica Italiana - Trieste (1967).

[2] R. BADESCO, C. NANES, I. SEBESAN - *Intégrales riemanniennes généralisées dans les espaces* R^m - C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, pp. 202-205 (1968).

[3] CH. FOX - *A generalization of the Cauchy principal value* - Canadian Mathematical Journal, v. IX, pp. 110-115 (1957).