SULLA PROSEGUIBILITÀ DI PROCESSI ALEATORI SCAMBIABILI (*)

di BRUNO DE FINETTI (a Roma) (**)

SOMMARIO. - *Per i processi aleatori scambiabili è fondamentale la distinzione tra quelli infiniti (o indefinitamente proseguibili: esempio tipico le estrazioni con reimbussolamento da un'urna di composizione sconosciuta) e quelli finiti (o non proseguibili: esempio tipico le estrazioni senza reimbussolamento da un'urna di composizione nota).*

Dato un segmento iniziale (ossia caratterizzato il processo fino ad n prove), il problema qui affrontato consiste nell'esaminare se e quali proseguimenti (finiti ad r passi, o infiniti) esso ammette. Alcune conclusioni vengono stabilite; altri problemi rimangono aperti.

SUMMARY. - *The basic distinction for exchangeable random processes is into unlimited and limited ones. Unlimited (allowing to be indefinitely continued) are e.g. drawings with replacement from an urn of unknown composition. Limited (allowing of no further continuation) are e.g. drawings without replacement from an urn of known composition. Given an initial segment (that is, the laws of the process within n trials), the problem considered here is to investigate in what continuations, if any, it may be imbedded (either limited, to r steps, $r > n$, or unlimited). Some results are established; some more questions are still open.*

1. Posizione del problema.

I processi aleatori cui danno luogo degli eventi scambiabili — e li diremo brevemente processi scambiabili — possono essere illimitatamente proseguibili oppure no. Il primo caso, nel quale il numero di eventi si può pensare comunque grande o infinito, è sotto

(*) Pervenuto in Redazione il 31 marzo 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Via Nicolò Piccinni 51 - 00199 Roma.

vari aspetti il più importante ed è stato studiato ampiamente; in particolare è ben nota la condizione affinchè un dato segmento iniziale si possa proseguire illimitatamente, ossia sia il segmento *iniziale* di una successione illimitata.

Nel caso opposto, un segmento iniziale può non essere proseguibile affatto, o esserlo solo al più per un certo numero finito di passi, e comunque, anche nel caso di illimitata proseguibilità, sono sempre possibili prosecuzioni che finiscono necessariamente per arrestarsi. I problemi che si pongono in questo ordine di idee non mi consta siano stati espressamente ed esplicitamente studiati, ed è per tale motivo che intendo qui richiamarvi l'attenzione dando qualche possibile spunto iniziale per affrontarli.

La nozione di «*scambiabilità*» è stata introdotta per caratterizzare in modo diretto il caso detto usualmente (con locuzione di cui avevo rilevato l'inammissibilità) di «eventi *indipendenti* con probabilità *costante ma incognita*» (ed analogamente poi per numeri aleatori).

Il caso degli eventi è stato esaminato in: [1] *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio*, «Mem. Acc. Lincei», VI **4** (1930) (in breve e parzialmente esposto in una comunicazione di ugual titolo al Congr. Int. Matematici, Bologna, 1928). L'estensione ai numeri aleatori si trova in tre note: [2] *Classi di numeri aleatori equivalenti* e due successive, in «Rend. Acc. Lincei», VI **18** (1933).

Nei primi lavori chiamavo «*prove di uno stesso fenomeno*» quelle che obbedivano alla scambiabilità; nel 1933 (v. sopra) adottai il termine «*equivalenti*» introdotto da A. Khinchin in un articolo che semplificava e generalizzava alcune delle mie dimostrazioni: [3] (A. KHINCHIN, *Sur les classes d'événements équivalents*, «Math. Sbornik» **39**-3 (1932)); in seguito, per evitare ambiguità con altri usi del termine «equivalenti», furono proposte le denominazioni di «simmetrici» (in [4] E. HEWITT & L. J. SAVAGE, *Symmetric Measures on Cartesian Products*, «Trans. Amer. Math. Soc., **80** (1955), 470-501) e di «scambiabili» (da Fréchet); quest'ultima denominazione mi sembra la più appropriata e l'unica inequivoca e decisi di adottarla.

Quanto ai metodi, nei primi lavori mi basavo sistematicamente sulla funzione caratteristica; dal 1933 seguii ove possibile le considerazioni di tipo sintetico di Khinchin. L'esposizione, per così dire, «definitiva» è quella presentata nel 1935 in un ciclo di conferenze all'Institut Henri Poincaré:

[5] *La Prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives,* pubbl. in « Ann. Inst. H. Poincaré », **7** (1937), e, in trad. inglese, [5′] *Foresight : Its Logical Laws, Its Subjective Sources,* nel volume H. E. Kyburg & H. E. Smokler (eds.), «*Studies in Subjective Probability*», Wiley, New York, 1964 [1]. Un'esposizione più sintetica dell'argomento, ma visto in un contesto più ampio, è quella nel corso CIME su « Induzione e statistica » (Varenna, 1959), [6] *La probabilità e la statistica nei rapporti con l'induzione secondo i diversi punti di vista,* v. « Atti », Cremonese 1959 (e, prossimamente, in trad. inglese, *Probability, Statistics, and Induction : Their Relationship according to the Various Points of View,* insieme ad altri scritti in un volume, ed. Wiley).

Per un'estensione (« scambiabilità parziale ») v. una comunicazione al Colloquio di Ginevra, 1937, [7] *Sur la condition d'équivalence partielle* (in « Act. Sci. Ind. » N⁰ 739, Hermann, Paris 1938), il citato corso CIME, e [8] A. Bruno, *Sugli eventi parzialmente scambiabili,* « Giorn. Ist. Ital. Attuari », **27** (1964). Per altri contributi v., nel medesimo « G.I.I.A. », un articolo [9] dell'A. e uno [10] di L. Daboni risp. in **15** (1952) e **16** (1953).

L'opera che, approfondendone l'impostazione, richiamò l'attenzione sulla teoria soggettivistica e sul ruolo fondamentale che vi ha la nozione di « scambiabilità » fu [11] L. J. Savage, « *The Foundations of Statistics* », Wiley, New York 1954 ; per l'argomento v. in particolare pp. 50-55.

(1) Colgo l'occasione per segnalare alcuni errori di stampa nella traduzione inglese [5′], riscontrati consultandola per la preparazione del presente lavoro Sono stati segnalati all'editore che ne terrà conto in eventuali ristampe.

Il più grave è che la formula (1) del presente lavoro compare ivi errata in tre punti : a pagg. 122 e 124, formula (5), l'ultimo membro è preceduto da un Σ; a pag. 128, formula (18), manca nel secondo membro il fattore $\binom{n}{r}$ (che c'è però nel terzo). Quest'ultima omissione c'era (non rilevata finora) anche nel testo francese.

Altre correzioni :	errata	corrige
pag. 107, footnote (6) :	$f\left(\frac{y}{x}\right)$	$f\binom{y}{x}$ (oppure $f(x, y)$)
pag. 109, formula (1) :	$P(E' E'')$	$P(E' \mid E'')$
pag. 125, linea 5 :	$, = Y_k =$	$, \quad Y_k =$
pag. 131, sopra form. (23) :	$\Sigma c_i P_i(E)$	$\Sigma c_i P_{Y_i}(E)$

(quest'ultima scrittura è tuttavia accettabile per semplicità).

Infine segnalo una variante per una frase (ultime due righe di pag. 127) che mi sembra non renda il senso esatto. Sostituire la penultima riga con :
... phenomenon, Y_h is the frequency on h trials, and then m_n is the probability ω_n ...

Da segnalare inoltre il cenno in [12] W. Feller, « *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* », Vol. II, Wiley, New York 1966; nella sez. VII, 4, *Application to exchangeable Variables,* il fatto che un processo scambiabile illimitatamente proseguibile sia una mistura di processi bernoulliani (a beautiful result due to B. de Finetti) viene considerato (solo però nell'aspetto matematico) facendolo discendere dal teorema di Hausdorff ([2]) « as a typical example of the ease with which (this) theorem leads to surprising results».

2. Richiami sull'argomento.

Degli eventi E_i ($i = 1, 2, \dots$; in numero finito o infinito) si dicono scambiabili se (come quasi basta a dirlo tale denominazione) la probabilità in un problema concernente n di essi non varia comunque essi vengano scelti e permutati (purchè, beninteso, distinti). A tal fine basta dire che la proprietà vale nel caso particolarissimo del prodotto: dati comunque n eventi E_i, la probabilità che tutti si verifichino è sempre la stessa, e la si indica con ω_n (e sia $\omega_0 = 1$). Ne scende infatti, più in generale, che anche la probabilità che su n dati se ne verifichino h (non importa quali) dipende solo da n ed h, ed è

$$\omega_h^{(n)} = (-1)^{n-h} \binom{n}{h} \Delta^{n-h} \omega_h \tag{1}$$

e, posto $\nabla = 1 - \Delta$, ossia $\nabla \omega_h = \omega_{h+1}$,

$$\omega_h^{(n)} = \binom{n}{h} \sum_{0}^{n-h}{}_i (-1)^i \binom{n-h}{i} \nabla^i \omega_h = \tag{2}$$

$$= \binom{n}{h} \sum_{0}^{n-h}{}_i (-1)^i \binom{n-h}{i} \omega_{h+i}. \tag{2'}$$

Dividendo per $\binom{n}{h}$ (ossia eliminando tale fattore) si ha la probabilità che si verifichino h determinati eventi.

([2]) Condizione necessaria e sufficiente affinchè i numeri ω_h ($h = 0, 1, \dots, n, \dots$) siano i momenti di una distribuzione in $(0, 1)$ è che risultino nonnegative tutte le differenze prese con segni alterni, $(-1)^r \Delta^r \omega_k$ (confrontare con la (1) del testo e badare al significato mostrato dalla (6)!).

Si noti come, inversamente, ogni ω_k si possa esprimere mediante le $\omega_h^{(n)}$ per un dato $n\,(n > k)$ per gli h tra k ed n:

$$\omega_k = \sum_k^n {}_h\, \omega_h^{(n)} \frac{h\,!\,(n-k)\,!}{n\,!\,(h-k)\,!}\,. \tag{3}$$

Diamo ancora la relazione che dà le $\omega_h^{(n)}$ mediante le $\omega_i^{(n+1)}$:

$$\frac{\omega_h^{(n)}}{\binom{n}{h}} = \frac{\omega_h^{(n+1)}}{\binom{n+1}{h}} + \frac{\omega_{h+1}^{(n+1)}}{\binom{n+1}{h+1}} \tag{4}$$

ovvero

$$\omega_h^{(n)} = \frac{n-h+1}{n+1}\,\omega_h^{(n+1)} + \frac{h+1}{n+1}\,\omega_{h+1}^{(n+1)}. \tag{4'}$$

Per maggiori ragguagli, dimostrazioni, ecc., rinviamo alle pubblicazioni citate, in particolare le [1], [5], [5'].

Volendo considerare il problema come processo aleatorio, si può pensare al processo $Y(n)$ (o Y_n) che dà il numero di successi fino al passo n, quando si pensi che gli eventi scambiabili E_1, E_2, ecc. abbiano luogo agli istanti 1, 2, ecc.:

$$Y_n = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n \quad (E_i = 1 \text{ se verificato}, = 0 \text{ se no}).$$

Oppure (se si preferisce) si potrà considerare il processo $Z_n = 2Y_n - n$ (ove ogni successo dà un salto $+1$, ma ogni insuccesso dà un salto -1, anzichè nullo); tale rappresentazione è stata usata in [9] e [10], ma ai presenti scopi non c'è motivo di abbandonare il modello più semplice con Y_n.

Le probabilità introdotte sono, allora:

$$\omega_h^{(n)} = P(Y_n = h)\,; \qquad \omega_n = \omega_n^{(n)} = P(Y_n = n).$$

Le $\dfrac{\omega_h^{(n)}}{\binom{n}{h}}$ sono le probabilità di ciascuna delle $\binom{n}{h}$ traiettorie che portano dall'origine $(0, 0)$ al punto finale $(n, Y_n) = (n, h)$.

3. Processi particolari.

Occorre indicare alcuni processi particolari che giocano un ruolo essenziale nel problema che consideriamo.

Processo bernoulliano (caso dell'indipendenza).

Detta $p\,(p = \omega_1)$ la probabilità di ogni E_i, si ha (posto $q = 1 - p$):

$$\omega_n = p^n, \tag{5}$$

$$\omega_h^{(n)} = \binom{n}{h} p^h\, q^{n-h}, \qquad \frac{\omega_h^{(n)}}{\binom{n}{h}} = p^h\, q^{n-h}. \tag{5'}$$

Si tratta, ovviamente, di processi illimitatamente proseguibili il fatto importante è che, *viceversa, ogni processo scambiabile illimitatamente proseguibile è una mistura* (*combinazione lineare convessa di processi bernoulliani*; sarà cioè del tipo:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \int_0^1 p^n\, dF(p), \\ \omega_h^{(n)} &= \binom{n}{h} \int_0^1 p^h\, q^{n-h}\, dF(p), \end{aligned} \tag{6}$$

integrale di Stieltjes rispetto a una distribuzione qualunque sull'intervallo (0,1) ($F(0) = 0$, $F(1) = 1$ (3), F mai decrescente).

Processo di Bayes-Laplace.

Un caso particolare, utile da tenersi presente, è quello con distribuzione uniforme ($F(p) = p$, densità $F'(p) = 1$, sempre in $(0, 1)$); allora sono ugualmente probabili anche, per ogni n, gli $n + 1$ valori possibili per Y_n (cioè $0, 1, 2, \ldots, n$), cioè si ha

$$\omega_n = \omega_h^{(n)} = \frac{1}{n+1}, \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Processo ipergeometrico.

Corrisponde all'estrazione *senza reimbussolamento* delle palle contenute in un'urna, quando si sa che sono N, di cui H bianche $(0 < H < N)$.

(3) Si rammenti che, se x è un punto di salto, intendiamo con $F(x)$ un qualunque valore fra il minimo (limite a sinistra) e il massimo (limite a destra). S'intenda pertanto che $F(x)$ deve tendere a 0 e ad 1 rispettivamente per $x \to 0$ da sinistra e per $x \to 1$ da destra (cioè, qui, $F(x) = 0$ per $x < 0$ ed $F(x) = 1$ per $x > 1$).

Evidentemente, $\omega_H^{(N)} = 1$ (e quindi $\omega_h^{(N)} = 0$ per $h \neq H$).
Per $n < N$ si ha

$$\omega_h^{(n)} = \frac{\binom{H}{h}\binom{N-H}{n-h}}{\binom{N}{n}} \quad \text{(distribuzione ipergeometrica)}, \tag{8}$$

e in particolare

$$\omega_n = \omega_n^{(n)} = \binom{H}{n} \Big/ \binom{N}{n} = \frac{H!\,(N-n)!}{N!\,(H-n)!}. \tag{8'}$$

Si noti che si hanno valori positivi per $H - (N - n) \leq h \leq H$, nulli per h fuori da tali limiti ed $n \leq N$, mentre per $n > N$ si ha un'espressione priva di senso (0/0). E ciò corrisponde a un fatto significativo: al di là di $n = N$ il processo non è proseguibile, non ha senso, e non solo perchè cessa di essere valida l'interpretazione pratica considerata (dopo estratte senza reimbussolamento tutte le N palle l'urna è vuota!), ma per la impossibilità matematica di costruire (per $n = N + 1$, e così per ogni n maggiore) delle $\omega_h^{(n)}$ non negative soddisfacenti le condizioni di definizione (od anche, più semplicemente, di dare ad una particolare ω_h^{N+1} un qualunque valore, sia pure 0, senza contraddizione) [4]. (Cfr. anche l'es. in (9)).

Evidentemente: *ogni processo scambiabile ad N passi* (comunque proseguibile oppur no) *è una mistura di processi ipergeometrici ad N passi* (estrazioni senza reimbussolamento di N palle); basta infatti, date comunque le $\omega_h^{(N)}$, prendere la combinazione con tali pesi dei processi con $H = h$ (ossia: pensare che la composizione dell'urna sia stata scelta in modo che $P(H = h) = \omega_h^{(N)} =$ probabilità che le palle bianche siano h).

4. Interpretazione geometrica del problema.

Da quanto osservato al n. 3, è chiaro che basta adottare una appropriata rappresentazione geometrica per i processi scambiabili

(4) Supponendo $\omega_{N+1} = 0$ risulterebbe ad es. $1 \Big/ \binom{N+1}{H-1} . \omega_{H-1}^{(N+1)} = \omega_{H-1} - (N - H + 2)\,\omega_H = (H!\,(N - H)!/N!)\,[(N - H + 1) - (N - H + 2)] = -\left(1 \Big/ \binom{N}{H}\right) < 0$ (NB.: si applica la (2'); i termini dopo i primi due sono nulli).

(come punti in uno spazio lineare), e il problema propostoci si risolve nel determinare se un punto sia mistura di altri prefissati (cioè: se appartenga al simplesso di cui questi sono vertici). I « punti prefissati » sono quelli che rappresentano processi ipergeometrici; come caso-limite intervengono quelli bernoulliani.

È un po' scomodo il fatto che l'impostazione richieda di considerare uno spazio ad infinite dimensioni; in effetti, tuttavia, le considerazioni si svolgono sempre in sottospazi a un numero di dimensioni finito (seppur si debba pensare di poterlo prendere comunque grande).

Precisamente, come spazio S_∞ prenderemo quello delle successioni

$$P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_r, \dots);$$

meglio ancora, più che il « punto P di S_∞ » come tale, conviene considerare la successione dei punti

$$P^{(r)} = O + x_0\,\mathbf{i}_0 + x_1\,\mathbf{i}_1 + x_2\,\mathbf{i}_2 + \dots + x_r\,\mathbf{i}_r, \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

proiezioni di P sull'S_r delle prime r coordinate (5). Ed anzi, poichè proprio questo serve, si potrà pensare $P^{(r)}$ come rappresentazione del segmento iniziale (primi $r+1$ lati) della spezzata $P^{(0)}$, $P^{(1)}$, $P^{(2)}, \dots, P^{(r)}$, col vantaggio tra l'altro di non identificare due punti $P^{(r)}$ e $P^{(r+k)}$ anche se « coincidenti » (nel caso che $x_{r+1} = x_{r+2} = \dots$ $\dots = x_{r+k} = 0$, ossia $P^{(r)}$ sia « ripetuto » nella successione dei vertici della spezzata). Equivalentemente si potrebbe dire che con $P^{(r)}$ intendiamo in realtà alludere allo spazio di tutti i punti che si proiettano su S_r in $P^{(r)}$, ossia di tutte le successioni aventi in comune il dato segmento iniziale di r tratti.

Un punto $P^{(n)}$ di S_n — ossia una n-spezzata — risponde al nostro problema, e si dirà *compatibile*, se risultano non negative le espressioni

$$(9) \qquad (-1)^{n-h}\Delta^{n-h}x_h = \sum_0^{n-h}{}_i\,(-1)^i\binom{n-h}{i}\nabla^i x_h = \sum_0^{n-h}{}_i\,(-1)^i\binom{n-h}{i}x_{h+i}$$

$$\text{per } h = 0, 1, \dots, n \text{ (e sempre con } x_0 \equiv 1),$$

(5) Non contiamo come tale la x_0; è solo per convenienza che introduciamo x_0, che è peraltro sempre $x_0 \equiv \omega_0 \equiv 1$.

che danno le probabilità $\omega_h^{(n)} \Big/ \binom{n}{h}$ corrispondenti ai valori $\omega_h = x_h$ in base alle (1) o (2) o (2′). Si noti, in particolare, che le x_n devono essere nonnegative e decrescenti; volendo si potrebbe limitare a priori il discorso a successioni siffatte.

Si dirà poi che una n-spezzata è *non proseguibile* se non è il segmento iniziale di nessuna $(n+1)$-spezzata compatibile, ossia, se cessa di esser compatibile facendovi seguire come x_{n+1} un valore qualunque (necessariamente comunque, come sopra osservato, con $0 \leq x_{n+1} \leq x_n$).

Si dirà *r-proseguibile* se è segmento iniziale di (almeno) una r-spezzata compatibile, e *indefinitamente proseguibile* se ciò sussiste per qualsiasi r; si dirà *proseguibile di rango r* se è segmento iniziale di (almeno) una r-spezzata compatibile nonproseguibile; di tali r ne esisteranno in generale molti (infiniti nel caso di indefinita proseguibilità) e diremo *rango massimo* il più grande di essi (diremo cioè che il rango massimo è r se si ha r-proseguibilità ma non $(r+1)$-proseguibilità).

5. Studio del problema.

Per riconoscere se una data n-spezzata è compatibile, il criterio più diretto consiste nel verificare la nonnegatività delle espressioni (9), ed analogamente per la proseguibilità converrà riconoscere se la compatibilità continua a sussistere per almeno uno dei valori che si possono dare ad x_{n+1} (esplorare l'intervallo $0 \leq x_{n+1} \leq x_n$); e così via.

Se invece interessa acquisire una visione globale e cioè identificare, per ogni n, l'insieme dei punti di S_n *compatibili*, e dei sottoinsiemi dei punti nonproseguibili, o proseguibili dei vari ranghi, o indefinitamente proseguibili, risulta più espressivo indicare i vertici dei poliedri convessi che determinano dette partizioni. (Nulla cambia sostanzialmente neppure per l'indefinita proseguibilità, anche se allora anzichè un numero finito di vertici ne abbiamo un'infinità, costituenti un arco di linea di cui si avrà a considerare l'involucro convesso).

Le considerazioni del n. 3 mostrano già che, nella rappresentazione geometrica del n.4, i punti *compatibili* di S_n sono quelli del simplesso C_n di vertici

$$A_{n,h}^{(n)} \quad \text{per } h = 0, 1, 2, \dots, n$$

rappresentanti i processi ipergeometrici di rango n (come le estrazioni senza reimbussolamento di n palline di cui h bianche). Sono, cioè, compatibili i $P^{(n)}$ esprimibili come *misture, o combinazioni lineari convesse*, di tali A:

$$(10) \qquad P^{(n)} = c_0 A^{(n)}_{n,0} + c_1 A^{(n)}_{n,1} + \dots + c_n A^{(n)}_{n,n} \quad (c_h \geq 0, \sum_h c_h = 1).$$

Allo stesso modo risulta ovvio che analogamente i punti *proseguibili* di S_n sono le proiezioni su S_n dei punti di $C^{(n)}_{n+1}$ (in S_{n+1}), ossia quelli appartenenti al poliedro $S^{(n)}_{n+1}$ di vertici $A^{(n)}_{n+1,h}$ ($h = 0,1, \dots$ $\dots, n+1$), proiezioni su S_n degli $A^{(n+1)}_{n+1,h}$. E così saranno r-proseguibili quelli della proiezione $C^{(n)}_r$ di C_r, e indefinitamente proseguibili quelli appartenenti a tutte queste proiezioni (intersezione infinita); beninteso, tutti questi poliedri sono uno contenuto nell'altro (e in modo preciso si vedrà nel n. 6 come ciò avvenga).

I punti *nonproseguibili* di S_n sono quelli di $C_n - C^{(n)}_{n+1}$ (cioè: allora n è il rango massimo); analogamente quelli di *rango massimo* r sono quelli di $C^{(n)}_r - C^{(n)}_{r+1}$. Come detto, altra cosa è l'essere proseguibile di rango r: ciò significa infatti appartenere alla proiezione su S_n di $C_r - C^{(r)}_{r+1}$, cosicchè i punti proiezione sia di C_r che di $C^{(r)}_{r+1}$ vanno inclusi mentre per la definizione di « rango massimo » vanno esclusi. È interessante considerare anche il *rango minimo*; sembra del resto plausibile che sussista la proseguibilità di rango r per ogni $r' \leq r \leq r''$ ove con r' ed r'' si indichino rispettivamente il rango minimo e il massimo [6].

6. Cenni per l'impostazione effettiva.

Per proseguire concretamente la ricerca basta precisare quantitativamente le configurazioni dei vertici, poliedri, proiezioni, ecc., di cui si è discorso in forma qualitativa.

[6] Sia $P^{(n)}$ segmento iniziale tanto di un P' segmento di r' passi nonproseguibile che di P'' segmento di r'' passi nonproseguibile ($n \leq r' \leq r''$); esso è allora segmento iniziale di ogni combinazione lineare convessa $c'P' + c''P''$ ($c' + c'' = 1$) definita per r' passi. Al crescere di c'' da 0 ad 1 tale punto penetra successivamente nei poliedri convessi $C^{(n)}_r$ da $r = r'$ ($c'' = 0$) ad $r = r''$ ($c'' = 1$). L'asserto cadrebbe in difetto solo se l'attraversamento potesse avvenire in un punto comune all'involucro di due successivi poliedri (cfr. n. 6).

La proprietà più espressiva è data dalla relazione (4′) applicata al caso ipergeometrico, dove si può scrivere sinteticamente:

$$(11) \qquad A_{N,H}^{(N-1)} = \frac{H}{N} A_{N-1,H-1}^{(N-1)} + \frac{N-H}{N} A_{N-1,H}^{(N-1)} .$$

A parole: $N-1$ estrazioni senza reimbussolamento da una urna che ne contiene N di cui H bianche o da un'urna che ne contiene $N-1$, di cui le bianche possono essere o H con probabilità $(N-H)/N$ od $H-1$ con probabilità H/N, costituiscono il medesimo processo.

Geometricamente; se consideriamo la spezzata [7] congiungente gli N punti $A_{N-1,h}^{(N-1)}$ $(h=0, 1, \ldots, N-1)$ (estrazioni senza reimbussolamento; h palle bianche su $N-1$), gli $N+1$ punti $A_{N,h}^{(N-1)}$ $(h = 0, 1, \ldots, N)$ ($N-1$ estr. senza reimb., h palle bianche su N) formano una spezzata con gli stessi estremi della precedente e gli altri vertici uno su ciascun segmento (sul 1° ad $(N-1)/N$ della lunghezza, sul 2° ad $(N-2)/N, \ldots$, sull'ultimo ad $1/N$; per così dire, sono i punti che suddividono la spezzata in N parti di lunghezza $(N-1)/N$ qualora si attribuisca convenzionalmente lunghezza uguale (= 1 agli $N-1$ tratti della spezzata di partenza).

In tal modo il poliedro (simplesso) dei punti compatibili in S_n è caratterizzato dai vertici $A_{n,h}$ $(h = 0,1, \ldots, n)$; quello dei punti proseguibili si ricava iscrivendo nel modo detto nella spezzata degli $A_{n,h}$ la spezzata degli $A_{n+1,h}$ [8]; ma è chiaro che, analogamente, quello dei punti $(n+2)$-proseguibili si ottiene iscrivendo nella seconda una terza spezzata, e così di seguito, aumentando ogni volta il numero dei lati e dei vertici.

Si può dire subito che, al limite ($A_{n+r,h}$, $r \to \infty$), tali spezzate tendono alla linea dei processi bernoulliani. Infatti, se il numero di palline è grande, scompare la differenza fra i casi di estrazione con e senza reimbussolamento, cosicchè $A_{n,h} \simeq B_p$, $p = h/n$, ove B_p,

(7) Non si tratta di una spezzata rappresentante un processo (mediante i punti rappresentativi in S_1, S_2, ecc.); si collegano invece in un medesimo S_n (qui, con $n = N-1$) i punti rappresentativi di più processi diversi (qui: ipergeometrici). É ovvio, ma forse giova dirlo.

(8) Sottintendiamo la (n) in alto, dato che qui ci riferiamo ad un S_n fissato. Si badi che il secondo poliedro non è più un simplesso: gli $n+2$ punti $A_{n+1,h}^{(n+1)}$ sono linearmente indipendenti in S_{n+1}, ma non lo sono, ovviamente, le loro proiezioni su S_n (e così a maggior ragione per i poliedri successivi).

processo bernoulliano di probabilità $\omega_1 = p$, è dato da

(12) $$B_p = (1, p, p^2, p^3, \dots, p^n, \dots).$$

Asintoticamente, pertanto, le spezzate si avvicinano alla curva di equazioni parametriche

(13) $$x_0 = 1,\ \ x_1 = p,\ \ x_2 = p^2, \dots,\ \ x_n = p^n$$

(dove ci si può fermare all'n che interessa, o pensare addirittura ad S_∞). L'involucro convesso di tale linea — limite (e intersezione) dei poliedri di vertici $A_{r,h}$ ($h = 0,1, \dots, r$; r comunque grande) — delimita l'insieme dei punti (ossia processi) illimitatamente proseguibili.

Probabilmente, per lo studio del caso di un dato n, conviene prendere come coordinate le $y_h = \omega_h^{(n)}$ (nonnegative, di somma $= 1$), legate alle x_h dalle (1) (o (2), (2')), magari indicando con $z_h = \omega_h^{(n+1)}$ quelle del caso $n+1$ che interviene per l'esame della proseguibilità. Ciò renderebbe più espressive le conclusioni; in particolare risulterebbe in evidenza l'eventuale esistenza di coordinate nulle che danno luogo a particolarità. Ad esempio, la presenza di zeri limita la proseguibilità (9) e, d'altra parte, consente di costruire esempi in cui si ha proseguibilità soltanto per il rango massimo (10).

(9) La presenza di uno zero tra le $\omega_h^{(n)}$ (con dato n) sia $\omega_k^{(n)} = 0$, non impedisce la proseguibilità di rango r finito comunque grande. Basta partire dalle $\omega_h^{(r)}$ ($r > n$) prendendole $= 0$ per $k \leq h \leq r - n + k$ e scegliendole comunque per gli $h < k$ e gli $h > r - n + k$ (estr. senza reimb. di r palle sapendo che non vi sono più di $h - 1$ bianche nè più di $n - h - 1$ nere); ciò è ovvio. Si hanno sempre ∞^{n-2} gradi di libertà (∞^{k-2} e ∞^{n-k-1} nei due intervalli $h < k$ e $h > r - n + k$ se si pensano assegnate le $P(Y_n \gtrless k)$), ma tuttavia le condizioni di r-proseguibilità divengono sempre più restrittive al crescere di r (le probabilità $\omega_h^{(n)}$ devono addensarsi verso i casi estremi, $h \backsim 0$ ed $h \backsim n$).

Non basta ad es. sapere che, nel processo dato dal noto *gioco delle concordanze*, Y_N non può essere $N - 1$ ($N =$ numero di oggetti), ossia $\omega_{N-1}^{(N)} = 0$, per concludere la nonproseguibilità (nè, tanto meno, il fatto che l'interpretazione perda senso). Però si può verificare che la conclusione sussiste dato che il valore di $\omega_{N-2}^{(N+1)}$ desumibile da $\omega_{N-2}^{(N)}$ risulta incompatibile con $\omega_{N-3}^{(N)}$.

Per due o più zeri, conclusioni simili ma più restrittive.

(10) Ad es. il processo ipergeometrico (N palle di cui H bianche), considerato per un n maggiore sia di H che di $N - H$ (cosicchè sia impossibile che su n estrazioni si abbiano palle di un solo colore) si può proseguire soltanto conformemente al processo stesso (e non con probabilità alterate al passo $(n+1)$-esimo o successivi in modo di giungere ad un certo momento, prima di N passi, in condizioni di improseguibilità). Sembra plausibile che, in assenza di zeri, una n-spezzata proseguibile si possa proseguire in modo da renderla nonproseguibile dal passo successivo (dando i valori estremi ammissibili al parametro, per es. $\omega_0^{(n+1)}$, da cui tutti gli altri dipendono linearmente).

7. Osservazioni.

Per dare un'idea diretta dell'aspetto che i problemi assumono in pratica, riferendoci ai primi passi, può giovare l'osservazione della tabella in cui riportiamo dati numerici per alcuni processi (processi bernoulliani con $p = 0{,}1, 1/2$; processi ipergeometrici con $N = 2, 3, 4, 5, 6$; processo di Bayes-Laplace ; coordinate $x_h = \omega_h$ per $h = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ e coordinate $y_h = \omega_h^{(n)}$ per $n = 3$, $h = 0, 1, 2, 3$).

Si noti come al posto delle x_h al di là del segmento compatibile sono collocati degli asterischi (non zeri; ciò in conformità all'osservazione del n. 4 circa l'opportunità di ben distinguere una successione limitata da quella che si ottiene facendo seguire uno o più o infiniti zeri, e che può non più essere compatibile pur essendolo quella iniziale).

Va osservato infine che le proprietà significative sono di natura affine, per cui l'uso delle coordinate x_h od y_h (per un dato n) è indifferente; può solo interessare più o meno di leggere (o immaginare di leggere) queste o quelle probabilità in una scala uguale e su assi ortogonali, (ossia, comunque, entro il cubo unitario per le x_h o le y_h di S_n).

In particolare, è indifferente calcolare i volumi (meglio: i rapporti tra volumi) di poliedri usando le x_h o le y_h. Calcolare i volumi dei poliedri in cui sono soddisfatte certe proprietà (compatibilità, proseguibilità, r-proseguibilità, ecc.) può interessare per dare un'idea del grado di « restrittività » di ciascuna rispetto a un'altra. Un rapporto di tali volumi si può interpretare ad es. come probabilità che una n-spezzata « scelta a caso » (tra quelle compatibili, o in altro dato insieme) goda della proprietà considerata; beninteso, il significato di « scelta a caso » — che qui allude semplicemente alla ugual densità in S_n — andrebbe discusso (come fatto altrove [11]) per dimostrarne il grado di arbitrarietà e trovarne eventualmente qualche proprietà che faccia apparire opportuna a certi effetti una data interpretazione (come quella ora indicata).

[11] Cfr. ad es., dell'A., [13] *Alcune osservazioni in tema di suddivisione casuale*, Giorn. Ist. Ital. Attuari **27**, 1 (1964) pp. 151-173, e [14] *Sulla suddivisione casuale di un intervallo: spunti per riflessioni*, Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano, **37** (1967) pp. 51-68.

TABELLA

Distribuzione		x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y_0	y_1	y_2	y_3
		$x_h = \omega_h$								$y_h=\omega_h^{(3)}=\begin{cases} x_0 - 3x_1 + 3x_2 - x_3 \ (h=0) \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 \ (h=1) \\ 3x_2 - 3x_3 \ (h=2) \\ x_3 \ (h=3) \end{cases}$			
Bayes-Laplace		1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/4	1/4	1/4	1/4
Bernoulliana	$p = \frac{1}{2}$	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/8	3/8	3/8	1/8
Bernoulliana	$p = 0$; N qua-lunque, $H = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Bernoulliana	$p = 1$; N qua-lunque, $H = N$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1
Ipergeometrica	$N = 2$ $H = 1$	1	1/2	0	*	*	*	*	*	—	—	—	—
Ipergeometrica	$N = 3$ $H = 1$	1	1/3	0	0	*	*	*	*	0	1	0	0
	2	1	2/3	1/3	0	*	*	*	*	0	0	1	0
	$N = 4$ $H = 1$	1	1/4	0	0	0	*	*	*	1/4	3/4	0	0
	2	1	2/4	1/6	0	0	*	*	*	0	1/2	1/2	0
	3	1	3/4	3/6	3/12	0	*	*	*	0	0	3/4	1/4
	$N = 5$ $H = 1$	1	1/5	0	0	0	0	*	*	2/5	3/5	0	0
	2	1	2/5	1/10	0	0	0	*	*	1/10	6/10	3/10	0
	3	1	3/5	3/10	1/10	0	0	*	*	0	3/10	6/10	1/10
	4	1	4/5	6/10	4/10	2/10	0	*	*	0	0	6/10	4/10
	$N = 6$ $H = 1$	1	1/6	0	0	0	0	0	*	1/2	1/2	0	0
	2	1	2/6	1/15	0	0	0	0	*	1/5	3/5	1/5	0
	3	1	3/6	3/15	1/20	0	0	0	*	1/20	9/20	9/20	1/20
	4	1	4/6	6/15	3/15	1/15	0	0	*	0	1/5	3/5	1/5
	5	1	5/6	10/15	1/2	1/3	1/6	0	*	0	0	1/2	1/2

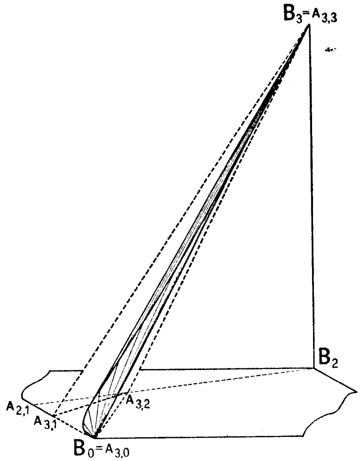

Fig. 1

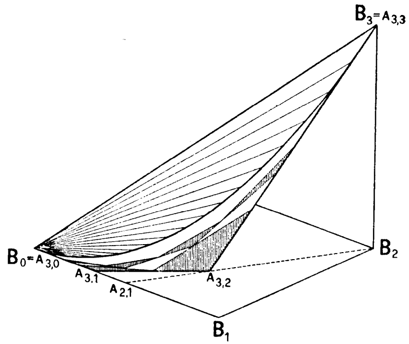

Fig. 2

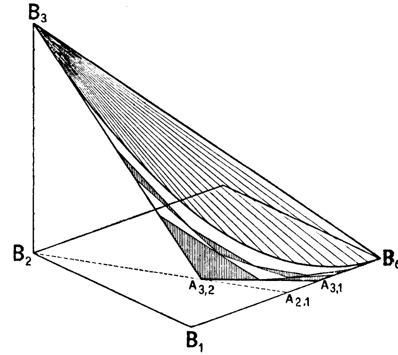

Fig. 3

Nelle figure (in S_3!) i punti B_0, B_1, B_2, B_3 (corrispondenti alle spezzate $OB_0B_0B_0B_0$, $OB_0B_1B_1B_1$, $OB_0B_1B_2B_2$, $OB_0B_1B_2B_3$) rappresentano i processi $A_{3,0}(=B_p, p=0)$, $A_{1,1}$, $A_{2,2}$, $A_{3,3}$ $(=B_p, p=1)$.

Il poliedro C_3 dei punti compatibili in S_3 è il tetraedro di vertici $A_{3,0}=B_0$, $A_{3,1}=(2B_0+B_1)/3$, $A_{3,2}=(B_0+B_1+B_2)/3$, $A_{3,3}=B_3$ (*); lo si vede in fig. 1 (spigoli tratteggiati marcati) e, scomposto in tre pezzi, nelle figg. 1-2-3 intese a dare un'idea di come siano incapsulate una nell'altra le successive regioni C_r (**) dei punti r-proseguibili (poliedri di vertici $A_{r,h}$, $h=0, 1, \ldots, r$, $A_{r,0}=B_0$, $A_{r,r}=B_3$).

I triangoli $(A_{r,h}, A_{r+1,h+1}, A_{r,h+1}$: misture di tre siffatti processi ipergeometrici) contenuti fra due successive spezzate $A_{r,h}$ ed $A_{r+1,h}$, e le due piramidi cui ciascun triangolo dà luogo congiungendolo a B_0 e a B_3, costituiscono $C_r - C_{r+1}$, regione dei punti di rango massimo r. Nelle figg. 2 e 3 si vedono (da sopra e da sotto) i due triangoli (in grigio) con $r=3$ (punti non proseguibili), i tre (in bianco) con $r=4$ (proseguibili un sol passo), i quattro (in grigio) con $r=5$; quelli (non più indicati) da $r=6$ in poi (per ogni r ce n'è $r-1$) riempiono la lacuna fino alla curva B_p il cui involucro convesso (intersezione dei coni di vertice in B_0 e in B_3, v. fig. 1) è C_∞ (regione dei punti indefinitamente proseguibili). Tale involucro e la superficie poliedrica (triangoli predetti) dividono la parte residua, $C_3 - C_\infty$, nei due pezzi *inferiore* (fig. 2) e *superiore* (fig. 3: visto da sotto!): piramide-cono rispettivamente di vertice B_0 e di vertice B_3.

(*) Limitatamente a S_2 lo sarebbero inoltre i punti del triangolo C_2 di vertici $A_{2,0}=B_0$, $A_{2,1}=(B_0+B_1)/2$, $A_{2,2}=B_2$ (e, per S_1, quelli del segmento C_1 di estremi B_0 e B_1).

(**) Scriviamo C_r per $C_r^{(3)}$, e così $A_{r,h}$ per $A_{r,h}^{(3)}$, ecc., sottintendendo che ci riferiamo sempre alle proiezioni in S_3.