SULLE m-STRUTTURE DI MÖBIUS (*)

di ADRIANO BARLOTTI (a Perugia) (**)

SOMMARIO. — *Si ottengono due diverse classi di m-strutture di Möbius infinite (per ogni valore dell'intero positivo m). Le m-strutture della prima classe sono generate con una costruzione analoga a quella dei piani liberi e sono prive di configurazioni chiuse di specie m. A quelle della seconda classe si perviene indicando come si costruiscano degli m-ovoidi negli spazi numerabili.*

SUMMARY. — *Two different classes of infinite Möbius m-structures have been obtained (for any m). The m-structures of the first class are obtained using a construction similar to that of free planes, and do not contain closed configurations of type m. The m-structures of the second class are obtained by constructing m-ovoids in countable spaces.*

Recentemente R. Permutti ha introdotto e studiato un nuovo tipo di strutture di incidenza alle quali ha dato il nome di m-strutture di Möbius (cfr. [5] e [6]). Tali strutture appaiono particolarmente interessanti perchè nella loro classe si inquadrano in modo del tutto naturale i piani affini e i piani di Möbius (che si ottengono precisamente in corrispondenza ai valori 0 e 1 di m).

Esempi di m-strutture per valori di m diversi da 0 e da 1 sono stati dati in [5] dove è stato provato precisamente che per ogni valore di $m \geqq 0$ esiste una m-struttura di Möbius avente « ordine » due. Restano però aperte le questioni relative all'esistenza di strutture di Möbius finite di specie $m \geqq 2$ e ordine $n \geqq 3$ e di m-strutture infinite per $m \geqq 2$. Nella presente nota vogliamo indicare due diversi procedimenti che portano a costruire due diverse classi di

(*) Pervenuto in Redazione il 3 marzo 1969.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività dei Contratti di Ricerca matematica del C. N. R.

(**) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica dell'Università — Piazza dell'Università — 06100 Perugia.

m-strutture di Möbius infinite per ogni valore di m. Il primo di questi utilizza l'idea che sta alla base della costruzione dei piani liberi (cfr. [4] e anche [7]) e le m-strutture che si ottengono in tal modo sono prive di configurazioni «chiuse di specie m». Il secondo procedimento consiste nella costruzione di m-ovoidi negli spazi numerabili e porta quindi ad m-strutture di Möbius di tipo « ovoidale ».

Nel n. 1 sono richiamati brevemente le definizioni e alcuni risultati che vengono utilizzati nel seguito.

1. Le m-strutture di Möbius e gli m-ovoidi.

Una *struttura di incidenza* è una terna ordinata $(\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ di insiemi non vuoti (i cui elementi sono detti rispettivamente *punti*, *blocchi* e *coppie incidenti*) per i quali risulta:

$$\mathfrak{P} \cap \mathfrak{B} = \varnothing, \qquad I \subseteq \mathfrak{P} \times \mathfrak{B}.$$

Se $P \in \mathfrak{P}$, $b \in \mathfrak{B}$ e $(P, b) \in I$ diremo che P e b sono *incidenti*, che *P appartiene a b* o che *b passa per P*. Se P appartiene ad a e a b diremo anche che *a e b sono incidenti in P*.

Indicato con m un intero positivo, è chiamata *m-struttura di Möbius* (o struttura di Möbius di specie m) una struttura di incidenza $\mathfrak{M}(\mathfrak{P}, \mathfrak{B}, I)$ verificante i seguenti postulati:

(M, 1) *Per $m+2$ punti distinti passa un blocco ed uno solo.*

(M, 2) *Fissati un blocco a, m punti distinti $P_1, \dots, P_m$ appartenenti ad a ed un punto Q non appartenente ad a, esiste uno ed un solo blocco b passante per $P_1, \dots, P_m$, Q ed incidente ad a solo nei punti $P_1, \dots, P_m$.*

(M, 3) *Esistono $m+3$ punti non appartenenti ad un medesimo blocco. Ogni blocco passa per almeno m punti distinti.*

Dati un intero $m \geqq 1$ ed uno spazio proiettivo S_{m+2}, di dimensione $m+2$, si chiama *m-ovoide* ogni insieme, $\mathfrak{E}$, di punti di S_{m+2} per cui valgono le seguenti proprietà:

(E, 1) *$\mathfrak{E}$ contiene almeno m punti distinti.*

(E, 2) *Ogni S_m di S_{m+2} ha in comune con $\mathfrak{E}$ al più $m+1$ punti distinti.*

(E, 3) *Comunque si fissi un gruppo γ di m punti distinti di $\mathfrak{E}$, l'unione degli S_m aventi in comune con $\mathfrak{E}$ tutti e soli i punti di γ è un iperpiano di S_{m+2}* (che viene detto *iperpiano eccezionale* relativo a γ).

Per le proprietà delle m-strutture di Möbius e degli m-ovoidi si veda [5]. Qui ci limitiamo a ricordare che partendo da un m-ovoide, $\mathfrak{E}$, si ottiene una m-struttura di Möbius, $\mathfrak{M}$, con il seguente procedimento (cfr. [5], n. 7): Si assumono come punti di $\mathfrak{M}$ i punti di $\mathfrak{E}$, come blocchi di $\mathfrak{M}$ le sezioni iperpiane di $\mathfrak{E}$ che contengono più di m punti distinti e infine si stabilisce che un punto P è incidente ad un blocco a se e solo se $P \in a$ in S_{m+2}.

Nel presente lavoro avremo bisogno di ordinare degli insiemi i cui elementi sono delle r-ple di numeri naturali distinti. Per questo procederemo nel seguente modo. Chiameremo *rango* di una r-pla l'insieme dei suoi elementi scritti secondo i loro valori decrescenti. Date due r-ple, Ω ed Ω', i cui ranghi siano rispettivamente $(i_1, \dots, i_r)$ e $(j_1, \dots, j_r)$, diremo che Ω ha rango minore di Ω' (e scriveremo $\Omega < \Omega'$) se la prima delle differenze $i_1 - j_1, \dots, i_r - j_r$ che non risulta nulla è negativa. Si verifica subito che se $\Omega < \Omega'$ e $\Omega' < \Omega''$ allora è anche $\Omega < \Omega''$ e quindi è possibile ordinare le r-ple dell'insieme secondo i valori crescenti dei loro ranghi.

2. Costruzione di una m-struttura di Möbius mediante successive estensioni.

Partiamo da un insieme $\mathfrak{M}_0$ di $\lambda_0 \geqq m + 3$ punti. A ciascuno di questi punti associamo un *indice* dato da uno dei primi λ_0 numeri naturali (in modo che punti diversi abbiano indici diversi).

Con i punti di $\mathfrak{M}_0$ formiamo tutte le possibili $(m+2)$-ple diverse di punti distinti e in corrispondenza a ciascuna di queste definiamo un blocco. A ognuno dei μ_0 blocchi così introdotti possiamo associare la $(m+2)$-pla di numeri costituita dagli indici dei punti che determinano il blocco stesso. Ordinati i blocchi in modo che i ranghi delle $(m+2)$-ple di numeri ad essi associate formino una successione crescente, diamo ad essi, nell'ordine in cui si seguono, come indici gli interi $\lambda_0 + 1, \lambda_0 + 2, \dots, \lambda_0 + \mu_0$.

Chiamiamo $\mathfrak{M}_0^{(1)}$ la struttura d'incidenza formata dai λ_0 punti di $\mathfrak{M}_0$ e dai μ_0 blocchi ora introdotti, con la convenzione che in $\mathfrak{M}_0^{(1)}$ un blocco sia incidente con tutti e soli i punti che lo determinano. Ovviamente *per ogni* $(m+2)$*-pla di punti di* $\mathfrak{M}_0^{(1)}$ *passa esattamente un blocco.*

Se comunque si scelgano il blocco a, i punti $P_i \in a$ $(i = 1, \dots, m)$ e $Q \notin a$ esiste in $\mathfrak{M}_0^{(1)}$ esattamente un solo blocco passante per

$P_i\,(i=1,\dots,m)$ per Q ed incidente ad a solo nei punti P_i, $\mathfrak{M}_0^{(1)}$ è una m-struttura di Möbius (1).

In caso contrario consideriamo l'insieme, Γ, costituito da tutti i sistemi $(a\,; P_1,\dots,P_m)$ formati da un·blocco, a, e da una m-pla di punti, P_i, appartenenti ad a. Ordiniamo gli elementi di Γ secondo i valori crescenti dell'indice del blocco a e, a parità di valore di questo indice, secondo i valori crescenti dei ranghi delle m-ple costituite dagli indici dei punti P_i. Se $(a'\,; P'_1,\dots,P'_m)$ è l'elemento di Γ che viene per primo in questo ordinamento, consideriamo l'insieme J composto da a' e da tutti i blocchi passanti per gli m punti P'_i $(i=1,\dots,m)$. Indichiamo con

$$(1) \qquad a',\, j_1,\, j_2,\, \dots,\, j_h$$

l'insieme formato da a' al quale facciamo seguire gli altri elementi di J ordinati secondo i valori crescenti dei loro indici (2). Sia j_{α_1} il primo blocco dell'insieme (1) che interseca in $m+1$ punti uno dei blocchi che lo precedono in (1). Indichiamo con (1*) l'insieme che si ottiene da (1) cancellando il blocco j_{α_1} e sia j_{α_2} il primo blocco di (1*) che interseca in $m+1$ punti uno dei blocchi che lo precedono in (1*). Ripetendo successivamente il procedimento che ha fatto passare da (1) a (1*), con un numero finito di passi si dividono gli elementi di J in due classi:

$$(1') \qquad j'_0 = a',\, j'_1,\, j'_2,\, \dots,\, j'_h,$$

e

$$(1'') \qquad j_{\alpha_1},\, j_{\alpha_2},\, \dots j_{\alpha_k}.$$

I blocchi di (1′) sono tali che due qualunque di essi hanno in comune solo gli m punti P'_i $(i=1,\dots,m)$: diremo che essi appartengono al fascio «parziale» di $\mathfrak{M}_0^{(1)}$, individuato da a' e dalla m-pla di punti P'_i. Ogni blocco di (1″) invece incontra almeno un blocco di (1′) oltre che nei punti P'_i in un ulteriore punto. Per ogni coppia (j'_u, j_{α_v}), formata da un blocco della classe (1′) e da un blocco della classe (1″) che si intersechino solo nei punti P'_i, aggiungiamo

(1) Si riconosce facilmente che ciò accade solo se $\lambda_0 = m+4$. Cfr. [5].

(2) Si osservi che in questo primo passaggio a' ha certamente indice minore di quello dei blocchi j_s. Questo fatto non è detto che si verifichi quando (come sarà detto più avanti) si ripete il procedimento partendo dal generico $\Gamma^{(i)}$.

ad $\mathfrak{M}_0^{(1)}$ un punto incidente soltanto con i blocchi j'_u e j_{a_v}. Ordinati tali nuovi punti in modo che le coppie (j'_u, j_{a_v}) da cui essi provengono si seguano secondo i valori crescenti dell'indice del primo elemento j'_u e, a parità di questo, secondo i valori crescenti degli indici di j_{a_v}, attribuiamo ad essi come indici successivamente gli interi che seguono $\lambda_0 + \mu_0$. Chiamiamo $\mathfrak{M}_0^{(1,1)}$ la struttura che si ottiene da $\mathfrak{M}_0^{(1)}$ con l'aggiunta dei suddetti punti (3).

Indichiamo poi con $\Gamma^{(1)}$ l'insieme a cui si giunge da Γ cancellando tutti i sistemi formati da un blocco di (1') e dalla m-pla di punti P'_i $(i = 1, \dots, m)$, e partendo da $\Gamma^{(1)}$ procediamo in $\mathfrak{M}_0^{(1,1)}$ come abbiamo fatto sopra partendo da Γ: giungeremo così ad una struttura d'incidenza $\mathfrak{M}_0^{(1,2)}$. Continuando nello stesso modo, dopo un numero finito di passi arriveremo a un insieme $\Gamma^{(r-1)}$ tale che il passo successivo porta a un insieme $\Gamma^{(r)}$ coincidente con l'insieme vuoto. Poniamo allora $\mathfrak{M}_0^{(1,r)} = \mathfrak{M}_0^{(2)}$.

Il procedimento che abbiamo seguito nell'aggiungere man mano i nuovi punti porta che *nella struttura* $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ *comunque si scelgano un blocco, a, una m-pla di punti distinti, $P_1, \dots, P_m$, appartenenti ad a e un punto Q non appartenente ad a esiste al più un blocco passante per Q ed incidente ad a solo nei punti $P_1, \dots, P_m$.*

In $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ consideriamo tutti i possibili sistemi $(a; P_1, \dots, P_m; Q)$ formati da un blocco, a, da una m-pla di punti, P_i, appartenenti ad a e da un punto, Q, non appartenente ad a e sia Δ l'insieme di quelli fra tali sistemi per cui non esiste alcun blocco passante per Q ed incidente ad a solo nei punti P_i. Se Δ è l'insieme vuoto poniamo $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_0^{(2)}$; se invece tale insieme non è vuoto consideriamo in Δ il sistema $(a'; P'_1, \dots, P'_m; Q')$ godente delle seguenti proprietà:

i) a' ha indice minimo;

ii) nell'eventualità che in Δ vi siano più sistemi in cui a' è lo stesso, l'insieme degli indici dei punti $P'_1, \dots, P'_m$ ha rango minimo;

iii) nell'eventualità che in Δ vi siano più sistemi in cui a' è lo stesso e anche i punti $P'_1, \dots, P'_m$ sono i medesimi, Q' ha indice minimo.

In corrispondenza al sistema $(a'; P'_1, \dots, P'_m; Q')$ aggiungiamo un blocco, b, incidente in un primo momento solo con i punti $P'_1, \dots, P'_m$ e Q'; a tale blocco diamo come indice il numero naturale che segue il più alto precedentemente introdotto. Successiva-

(3) Se (1'') è l'insieme vuoto risulta ovviamente $\mathfrak{M}_0^{(1,1)} = \mathfrak{M}_0^{(1)}$.

mente per ogni blocco, h, che passa per $P'_1, \dots, P'_m$, non passa per Q', e non appartiene al fascio parziale individuato da a' e $P'_1, \dots, P'_m$, aggiungiamo un nuovo punto incidente solo con b ed h e chiamiamo $\mathfrak{M}_0^{(2,1)}$ la struttura ottenuta aggiungendo ad $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ il blocco b e questi punti e modificando l'insieme delle incidenze di $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ solo con l'aggiunta di quelle ora indicate.

Detto Δ' l'insieme che si ottiene da Δ cancellando tutti i sistemi $(a; P_1, \dots, P_m; Q)$ per cui risulta che il blocco b passa per Q ed è incidente ad a solo nei punti $P_1, \dots, P_m$ (4), possiamo ripetere partendo da $\mathfrak{M}_0^{(2,1)}$ e da Δ' il procedimento applicato sopra ad $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ e Δ, ottenendo la struttura $\mathfrak{M}_0^{(2,2)}$ e l'insieme Δ''. Continuando il procedimento fino ad esaurire gli elementi di Δ si giunge ad una struttura $\mathfrak{M}_0^{(2,1)} = \mathfrak{M}_1$.

Dal procedimento seguito per passare da $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ ad $\mathfrak{M}_1$ risulta che *comunque si scelga in $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ un blocco, a, una m-pla di punti distinti, $P_1, \dots, P_m$, appartenenti ad a e un punto Q non appartenente ad a, esiste in $\mathfrak{M}_1$ almeno un blocco passante per Q ed incidente ad a solo nei punti $P_1, \dots, P_m$.*

Consideriamo ora la successione di strutture:

$$\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n, \dots \tag{2}$$

definite induttivamente nel modo seguente. Supponiamo di aver definito $\mathfrak{M}_i$, che questa struttura consti di ϱ_i elementi (fra punti e blocchi) e che a ciascuno di questi elementi sia associato come indice uno dei primi ϱ_i numeri naturali in modo che vi sia una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di $\mathfrak{M}_i$ e i loro indici. La struttura $\mathfrak{M}_{i+1}$ si ottiene allora con i seguenti tre passaggi:

1) Consideriamo in $\mathfrak{M}_i$ le $(m+2)$-ple di punti per le quali non passa alcun blocco. In corrispondenza di ciascuna di queste definiamo un nuovo blocco incidente con i punti che lo determinano, e indichiamo con μ_i il numero dei blocchi che si vengono così ad aggiungere. A tali blocchi, ordinati in modo che i ranghi delle $(m+2)$-ple composte dagli indici dei punti che li determinano formino una successione crescente, attribuiamo come indici i numeri naturali da $\varrho_i + 1$ a $\varrho_i + \mu_i$. Chiamiamo $\mathfrak{M}_i^{(1)}$ la struttura che si ottiene aggiungendo ad $\mathfrak{M}_i$ questi μ_i blocchi ed ampliando l'insieme delle incidenze nel modo sopra indicato.

(4) P. es., tutti i sistemi $(a_\alpha; P'_1, \dots, P'_m; Q')$ dove a_α è un qualunque blocco del fascio parziale individuato da a' e da $P'_1, \dots, P'_m$.

2) Da $\mathfrak{M}_i^{(1)}$ passiamo ad $\mathfrak{M}_i^{(2)}$ aggiungendo dei punti in modo analogo a quello seguito per passare da $\mathfrak{M}_0^{(1)}$ ad $\mathfrak{M}_0^{(2)}$.

Osserviamo esplicitamente che tutti i blocchi che in $\mathfrak{M}_{i-1}^{(2)}$ appartengono al fascio parziale individuato da un blocco e da una m-pla di punti, appartengono al fascio parziale individuato da questi stessi elementi anche in $\mathfrak{M}_i^{(2)}$.

3) Ad $\mathfrak{M}_i^{(2)}$ aggiungiamo dei nuovi blocchi con un procedimento del tutto analogo a quello seguito per passare da $\mathfrak{M}_0^{(2)}$ ad $\mathfrak{M}_1$. La struttura che così si ottiene è $\mathfrak{M}_{i+1}$.

Notiamo che se b è un blocco aggiunto nel passare da $\mathfrak{M}_i^{(2)}$ ad $\mathfrak{M}_{i+1}$ per supplire alla mancanza in $\mathfrak{M}_i^{(2)}$ di un blocco passante per il punto Q ed incidente ad a solo nei punti P_i $(i = 1, \ldots, m)$, in $\mathfrak{M}_{i+1}^{(1)}$ il blocco b viene ad appartenere al fascio parziale individuato da a e dalla m-pla P_i (cioè b conserva la proprietà di essere incidente ad a solo nei punti $P_1, \ldots, P_m$ anche in tutti gli stadi successivi).

Poichè nel passaggio da $\mathfrak{M}_i$ ad $\mathfrak{M}_{i+1}$ non vengono nè soppressi punti o blocchi nè distrutte incidenze, per la successione delle strutture $\mathfrak{M}_i$ ora definite risulta:

$$\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{M}_i \subseteq \ldots$$

Poniamo $\mathfrak{M} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{M}_i$. Si riconosce facilmente che $\mathfrak{M}$ è una m-struttura di Möbius: basta controllare che per essa sono verificati i postulati (M, 1), (M, 2) ed (M, 3).

a) Proviamo che vale (M, 1). Consideriamo $m+2$ punti distinti di $\mathfrak{M}$ e sia $\mathfrak{M}_h$ la prima struttura della successione (2) nella quale sono contenuti tutti questi $m+2$ punti. Per il modo come è definita $\mathfrak{M}_{h+1}$ in essa esiste certamente un blocco incidente con gli $m+2$ punti considerati; quindi in $\mathfrak{M}$ esiste almeno un blocco incidente con quegli $m+2$ punti. Supponiamo allora che in $\mathfrak{M}$ di tali blocchi ne esistano più di uno. In tal caso però si troverà necessariamente in (2) una prima struttura $\mathfrak{M}_{j+1}$ in cui sono contenuti due blocchi incidenti con la $(m+2)$-pla di punti in esame. Ma ciò non è possibile perchè è in contrasto con il procedimento indicato per passare da $\mathfrak{M}_j$ ad $\mathfrak{M}_{j+1}$ [5]. Quindi in $\mathfrak{M}$ per $m+2$ punti distinti passa un blocco ed uno solo.

[5] Infatti un punto che appartenga ad $\mathfrak{M}_{j+1}$ e non ad $\mathfrak{M}_j$ è incidente con due blocchi che in $\mathfrak{M}_j$ hanno m punti in comune, mentre i blocchi di $\mathfrak{M}_{j+1}$ che non appartengano già ad $\mathfrak{M}_j$ o sono incidenti con $m+2$ punti di $\mathfrak{M}_j$ per i quali non passa alcun altro blocco, o sono incidenti con solo $m+1$ punti.

b) Mostriamo ora che vale il postulato (M, 2). Consideriamo in $\mathfrak{M}$ un blocco, a, m punti distinti, $P_1, \dots, P_m$, appartenenti ad a ed un punto Q non appartenente ad a, e sia $\mathfrak{M}_h$ la prima delle strutture (2) che contiene tali elementi. Il procedimento che fa passare da $\mathfrak{M}_h$ ad $\mathfrak{M}_{h+1}$ assicura che in $\mathfrak{M}_{h+1}$ esiste almeno un blocco passante per Q e incidente ad a solo nei punti $P_1, \dots, P_m$. Quindi in $\mathfrak{M}_{h+2}$ esiste uno e un solo blocco b passante per Q e appartenente al fascio parziale di $\mathfrak{M}_{h+2}$ individuato da a e dalla m-pla di punti P_i. Per quanto abbiamo osservato sopra [cfr. 2) e 3)] tale blocco appartiene anche al fascio parziale di $\mathfrak{M}_k$ individuato da a e dagli m punti P_i per ogni $k > h + 2$, e quindi in nessuna delle strutture (2) il blocco b può intersecare a fuori dei punti $P_1, \dots, P_m$. Ne segue che in $\mathfrak{M}$ il blocco b passa per $P_1, \dots, P_m, Q$ e non è incidente ad a in alcun punto distinto da $P_1, \dots, P_m$. Se supponiamo che in $\mathfrak{M}$ vi sia oltre b un altro blocco, b', godente di questa proprietà, necessariamente l'indice di b' è maggiore dell'indice di b, e detta $\mathfrak{M}_r$ la struttura (2) in cui compare b', in $\mathfrak{M}_{r+1}$, per il procedimento seguito per ottenere questa struttura, i blocchi b' ed a devono avere $m + 1$ punti in comune. È quindi assurdo supporre che in $\mathfrak{M}$ i blocchi a e b' abbiano solo m punti in comune.

c) Infine per provare che in $\mathfrak{M}$ è soddisfatto anche il postulato (M, 3) basta notare che i $\lambda_0 (= m + 3)$ punti di $\mathfrak{M}_0$ non appartengono tutti ad uno stesso blocco e che i blocchi che via via vengono definiti contengono almeno $m + 1$ punti distinti.

Pertanto, poichè valgono i tre postulati richiesti, $\mathfrak{M}$ è effettivamente una m-struttura di Möbius (6).

In una struttura di incidenza chiamiamo *configurazione chiusa di specie m* un insieme $\mathfrak{C}$ composto da un numero finito di punti e di blocchi tali che:

j) ogni blocco di $\mathfrak{C}$ è incidente con almeno $m + 3$ punti di $\mathfrak{C}$;

jj) ogni punto di $\mathfrak{C}$ è incidente con almeno tre blocchi di $\mathfrak{C}$.

Si riconosce subito che con *la costruzione indicata sopra per $\mathfrak{M}$ si ottiene una m-struttura priva di configurazioni chiuse di specie m.*

Infatti in tale costruzione i blocchi sono incidenti, nello stadio in cui vengono definiti, con al più $m + 2$ punti, mentre i punti non appartenenti ad $\mathfrak{M}_0$ sono incidenti, nello stadio in cui vengono

(6) Abbiamo avuto notizia, quando avevamo già ultimato questa parte del lavoro, di una costruzione di piani di Möbius « liberi » fatta dai dottori A. Schleiermacher e K. Strambach, ma non ne abbiamo potuto prendere visione.

introdottti, con esattamente due blocchi. Supponiamo che esista in $\mathfrak{M}$ una configurazione chiusa, $\mathfrak{C}$, di specie m. Poichè gli elementi di questa sono in numero finito possiamo considerare fra essi quello di indice massimo. Se esso è un blocco è incidente con al più $m+2$ punti aventi indice minore e quindi con al più $m+2$ punti di $\mathfrak{C}$, mentre se esso è un punto è incidente con al più due blocchi aventi indice minore e quindi con al più due blocchi di $\mathfrak{C}$. Pertanto in entrambi i casi si giunge ad una contraddizione con l'ipotesi che la configurazione $\mathfrak{C}$ sia chiusa.

Altri tipi di m-stutture di Möbius infinite si possono ottenere modificando in qualche punto la costruzione precedentemente indicata ([7]).

3. Costruzione di m-ovoidi negli spazi numerabili.

Fissato l' intero $m\ (\geqq 1)$ consideriamo uno spazio grafico (non degenere) S_{m+2}, di dimensione $m+2$, che sia numerabile, cioè tale che si possa stabilire una corrispondenza biunivoca, Ω, fra i suoi elementi (spazi lineari subordinati delle diverse dimensioni ([8])) e i numeri naturali ([9]). Fissata la Ω diremo *indice* di un elemento, α, di S_{m+2} il numero naturale che corrisponde ad α nella Ω.

Indichiamo qui un procedimento che porta a costruire un m-ovoide di S_{m+2}. Per questo definiamo, per induzione, degli insiemi di punti nel modo seguente.

Si scelga un insieme, $\mathfrak{E}_0$, di m punti indipendenti di S_{m+2} e si associ a ciascuno di questi punti un numero intero, h, con $1 \leqq h \leqq m$, in modo che a punti diversi corrispondano numeri di-

([7]) Per esempio, introduciamo dopo i passaggi 1), 2) e 3) il seguente:

4) per ogni coppia (a', b') di blocchi di $\mathfrak{M}_i^{(2)}$ che non appartengono ad uno stesso fascio parziale di $\mathfrak{M}_i^{(2)}$ e che hanno in comune meno di $m+1$ punti in $\mathfrak{M}_{i+1}$, aggiungiamo dei punti incidenti (al momento dell'aggiunzione) solo con a' e b' e in numero tale che a' e b' vengano ad avere in comune esattamente $m+1$ punti.

Si ottiene allora una m-struttura in cui due blocchi si intersecano o in m o in $m+1$ punti (cfr. [2]).

Altri modi di apportare modifiche alla precedente costruzione sono suggeriti dai procedimenti indicati in [3] e in [1].

([8]) Nel seguito a noi interesseranno quelli di dimensione 0, m, $m+1$.

([9]) È subito visto che uno spazio grafico (non degenere) è numerabile quando risulta numerabile l'insieme dei punti di una sua retta.

versi. Il numero che corrisponde a ciascun punto sarà chiamato l'*altezza* del punto in questione. Fra tutti gli iperpiani di S_{m+2} che contengono i punti di $\mathfrak{E}_0$ sia τ_1 quello di indice più basso e si indichi con $\mathfrak{T}_0$ l'insieme che ha come unico elemento τ_1.

Fissiamo una qualunque successione di numeri naturali,

(3) $$a_1\,,\,a_2\,,\,\dots\,,\,a_n\,,\,\dots$$

tale che:

1) $1 \leqq a_n \leqq n$,

2) ogni numero naturale venga ripetuto in essa infinite volte [10].

Supposto poi di aver definito l'insieme $\mathfrak{E}_i$ contenente $m+i$ punti (a ciascuno dei quali è associata un'altezza) e l'insieme $\mathfrak{T}_i$, contenente $\binom{m+i}{m}$ iperpiani, τ_k, definiamo gli insiemi $\mathfrak{E}_{i+1}$ e $\mathfrak{T}_{i+1}$ nel modo seguente. Indicato con r l'$(i+1)$-esimo termine della (3), consideriamo l'insieme delle m-ple di punti di $\mathfrak{E}_i$, ordinate secondo i valori crescenti dei ranghi delle altezze dei loro punti, e sia p_r l'r-mo elemento di questo insieme. Scegliamo lo spazio lineare, α_i, di dimensione m, che ha indice minimo fra quelli che verificano le seguenti condizioni:

i) contengono gli m punti di p_r;

ii) non sono contenuti in nessun iperpiano di $\mathfrak{T}_i$ [11];

iii) non contengono nessun punto di $\mathfrak{E}_i$ oltre quelli di p_r.

In α_i scegliamo il punto, P_{m+i+1}, che ha indice minimo fra quelli che:

j) non appartengono a nessun iperpiano di $\mathfrak{T}_i$;

jj) non appartengono a nessuno spazio lineare di dimensione m che contenga $m+1$ punti di $\mathfrak{E}_i$.

Chiamiamo $\mathfrak{E}_{i+1}$ l'insieme che si ottiene aggiungendo P_{m+i+1} agli $m+i$ punti di $\mathfrak{E}_i$: al punto P_{m+i+1} assegniamo come altezza l'intero $m+i+1$.

[10] Come esempio indichiamo la successione seguente:

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, \dots, 1, 2, \dots h, 1, \dots$$

[11] Dal modo come è definito $\mathfrak{T}_i$ segue che in $\mathfrak{T}_i$ esiste un solo iperpiano che può contenere uno spazio m-dimensionale passante per i punti di p_r.

Consideriamo poi tutte le m-ple di punti di $\mathfrak{E}_{i+1}$ che contengono il punto P_{m+i+1}: a ciascuna di queste associamo l'iperpiano di indice minimo che contiene i punti della m-pla e nessun altro punto di $\mathfrak{E}_{i+1}$. L'insieme $\mathfrak{T}_{i+1}$ si ottiene aggiungendo tutti questi iperpiani a quelli di $\mathfrak{T}_i$ (12).

Per gli insiemi di punti $\mathfrak{E}_i$ risulta ovviamente:

$$\mathfrak{E}_0 \subset \mathfrak{E}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{E}_i \subset \ldots,$$

e la loro unione

$$\mathfrak{E} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{E}_i$$

è un m-ovoide di S_{m+2}.

Per provare ciò basta mostrare che per l'insieme $\mathfrak{E}$ sono verificate le proprietà (E, 1), (E, 2) ed (E, 3). La validità della (E, 1) è subito vista. Supponiamo che non valga la (E, 2) cioè che ci sia un sottospazio S_m di S_{m+2} avente dimensione m e contenente più di $m+1$ punti di $\mathfrak{E}$. Ordinati i punti di $S_m \cap \mathfrak{E}$ secondo i valori crescenti dell'altezza, sia P_h, di altezza h, l'$(m+2)$-esimo di questi punti. P_h dovrebbe appartenere a $\mathfrak{E}_{h-m}$, ma ciò contrasta con la costruzione che fa passare da $\mathfrak{E}_{h-m-1}$ a $\mathfrak{E}_{h-m}$, e ne consegue che per $\mathfrak{E}$ vale anche la (E, 2). Dimostriamo infine la (E, 3). Fissata comunque una m-pla, p, di punti di $\mathfrak{E}$ sia P_k il punto di p che ha altezza massima, k. Fra gli iperpiani di $\mathfrak{T}_{k-m}$ ve ne è uno, τ^*, che contiene tutti i punti di p. Per il modo come sono definiti i punti $P_i\,(i > k)$, nessuno di questi può appartenere a τ^*, cioè $\mathfrak{E} \cap \tau^* = p$ e quindi l'unione dei sottospazi di dimensione m aventi a comune con $\mathfrak{E}$ tutti e soli i punti di p è almeno l'iperpiano τ^*. Inoltre preso un qualunque spazio lineare α^* di dimensione m, contenente p e non appartenente a τ^*, esso deve necessariamente contenere oltre i punti di p un ulteriore punto di $\mathfrak{E}$. Infatti supponiamo che ciò non accada. α^* ha un certo indice, u, e ordinate le m-ple di punti di $\mathfrak{E}_{k-m}$ secondo i valori crescenti dei ranghi delle altezze dei loro punti sia v il posto che p occupa in questo ordinamento. Poichè l'intero v compare infinite volte nella succes-

(12) È superfluo rilevare che, poichè i punti di $\mathfrak{E}_i$ e gli iperpiani di $\mathfrak{T}_i$ sono in numero finito, il punto P_{m+i+1} e gli iperpiani che vanno aggiunti a quelli di $\mathfrak{T}_i$ per ottenere $\mathfrak{T}_{i+1}$ sono ben determinati.

sione (3), per il modo come è definito il procedimento che fa passare da $\mathbb{E}_i$ ad $\mathbb{E}_{i+1}$, dopo un numero finito di passi ([13]) per costruire da un insieme $\mathbb{E}_j$ il successivo $\mathbb{E}_{j+1}$ si deve prendere in considerazione α^* per aggiungere su esso (qualora non contenga già $m+1$ punti di $\mathbb{E}_j$) il punto P_{m+j+1} : quindi α^* contiene necessariamente $m+1$ punti di $\mathbb{E}$. Vale così anche la (E, 3) e cioè $\mathbb{E}$ è un m-ovoide.

La m-struttura di Möbius che si ottiene da questo m-ovoide con il procedimento indicato in [5] n. 7 è certamente diversa da quelle a cui si giunge con il procedimento dato nel n. 2 di questo lavoro. Infatti, poichè queste sono prive di configurazioni chiuse di specie m, i piani affini dedotti da esse (cfr. [5], n. 3) sono privi di configurazioni chiuse, invece i piani affini dedotti da una m-struttura ovoidale sono desarguesiani (cfr. [6], n. 1, (V)).

BIBLIOGRAFIA

[1] BARLOTTI, A.: *Configurazioni k-chiuse e piani k-aperti.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 35 (1965), 56-64.

[2] BARLOTTI, A.: *Sulle 2-curve nei piani grafici.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 37 (1967), 91-97.

[3] DITOR, S.: *A new kind of free extension for projective planes.* Canad. Math. Bull., 5 (1962), 167-170.

[4] HALL, M.: *Projective planes.* Trans. Amer. Math. Soc., 54 (1943), 229-277.

[5] PERMUTTI, R.: *Una generalizzazione dei piani di Möbius.* Le Matematiche, 22 (1967), 360-374.

[6] PERMUTTI, R.: *Sulle m-strutture ovoidali di Möbius.* Le Matematiche, 23 (1968), 50-59.

[7] SIEBENMANN, L. C.: *A characterization of free projective planes.* Pacific J. Math. 15 (1965), 293-298.

([13]) Al più tanti quanti ne occorrono per incontrare per la u-esima volta l'intero v nella successione (3).